现代数学基础丛书 114

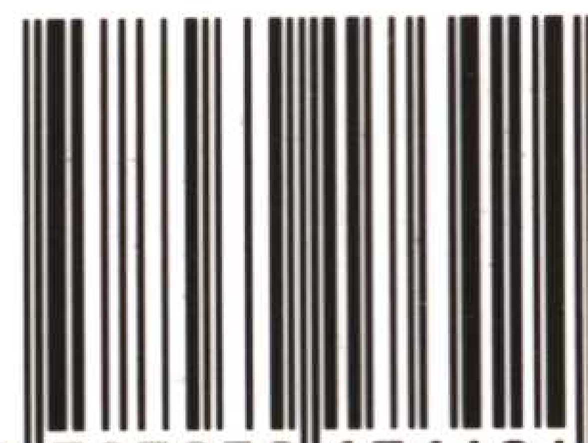
Adams谱序列和球面稳定同伦群

林金坤 著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-2548.0101)



ISBN 978-7-03-017642-4

销售分类建议：高等数学

定 价：38.00 元

现代数学基础丛书　114

Adams 谱序列和球面稳定同伦群

林金坤　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书在介绍上同调运算及其与 Eilenberg-Maclane 谱的上同调群的关系之后，引入了 Steenrod 代数并叙述它的两种基底，典则反自同构等. 在阐述谱的同伦范畴之后介绍了一般的谱序列以及收敛到谱的同伦群的 Adams 谱序列并介绍它的 E_2 项 (Steenrod 代数的上同调) 的计算过程和一些结果. Smith-Toda 谱 $V(n)$和 BP 谱作为 Steenrod 模的几何实现引入，然后介绍它的一些性质. 在介绍广义 Adams 谱序列的基础上介绍了国内外有关球面稳定同伦群的研究概况，而最后是以编著者多年的研究成果为基础，叙述和证明了球面稳定同伦群一序列新元素族的存在性.

本书适合高等院校基础数学专业拓扑学及相关方向的研究生、教师及数学工作者.

图书在版编目(CIP)数据

Adams 谱序列和球面稳定同伦群/林金坤 编著. —北京：科学出版社，2007

(现代数学基础丛书；114)

ISBN 978-7-03-017642-4

I. A… II. 林… III. ①谱序列–研究 ②稳定同伦群–研究 IV. O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 078751 号

责任编辑：陈玉琢／责任校对：鲁 素

责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新 蕾 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2007 年 7 月第一次印刷 印张：16

印数：1—2 500 字数：294 000

定价：38.00 元

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前言

本书是在 1986 年 9~12 月南开大学数学研究所“几何拓扑学术年会”举办的讲座的讲稿的基础上编著而成的. 期间十多年也曾作为南开大学数学学院代数拓扑方向历届研究生的教材. 正如书的标题, 它的目的是使读者能认识和掌握上同调运算及谱序列等代数拓扑学的重要工具, 并迅速进入到球面稳定同伦群的科研前沿领域. 阅读本书它要求读者预先具备代数拓扑学的同调群和上同调群等同调论的基本知识以及同伦群和 CW 复形等同伦论的基本知识.

自从 1950 年 J.P.Serre 发现 n 维球面 S^n 的同伦群 $\pi_{n+r}S^n(r>0)$ 是有限群以来, 球面同伦群 $\pi_{n+r}S^n$ 的计算与确定成了代数拓扑学的核心课题之一. 近几十年来, 众多的代数拓扑学者前赴后继, 从这一核心课题发展出许多重要的工具和方法, 取得了许多成果. 但是, 到目前为止, 距离问题的全部解决还很遥远, 使这一核心课题成为经典难题之一. 早在 1940 年末, H. Freudenthal 发现了同伦双角锥定理, 揭示了球面同伦群具有稳定现象, 即当 $n\geqslant r+2$, n 维球面 S^n 的 $n+r$ 维同伦群 $\pi_{n+r}S^n$ 和 $n+1$ 维球面 S^{n+1} 的 $n+r+1$ 维同伦群 $\pi_{n+r+1}S^{n+1}$ 都是彼此同构的, 从而当 $n\geqslant r+2$, 可将这些彼此同构的同伦群 $\pi_{n+r}S^n$ 统称为球面稳定同伦群 π_r^s. 1960 年, J.F.Adams 发现了以空间的同调信息为 E_2 项并且收敛到空间的同伦群的谱序列, 成为空间的同伦群的有力的计算工具. 为了稳定同伦群的需要, J.F.Adams 等人还将拓扑空间范畴提升到以谱为对象的空间的稳定同伦范畴, 并且使代数拓扑的同调论和同伦论两个重要分支在稳定同伦范畴的广义同调论中得到了统一. 从此, 球面稳定同伦群的研究在更高的视野下更加蓬勃的发展起来. 除了以经典的 Adams 谱序列为工具, 后来还发展出以 BP 谱为基础的广义的 Adams-Novikov 谱序列等作为工具, 研究和发现球面稳定同伦群的新元素族. 近十多年来还兴起广义 L_2 局部化的球谱的同伦群的研究, 以此逼近球面稳定同伦群, 呈现其研究方式的多样化.

本书将着重介绍 Adams 谱序列的有关知识以及利用它作为工具来发觉球面稳定同伦群新元素族的研究概况和一些成果. 由于 Adams 谱序列实际上是一种高阶上同调运算, 因此本书以原初的上同调运算的讲述开篇. 第 1 章讲述上同调运算的一般概念、性质及其与 Eilenberg-Maclane 空间的上同调群的关系. 作为最重要的原初上同调运算之一, 讲述了 Steenrod 平方运算是如何构造出来的以及它与 Eilenberg-Maclane 空间的上同调代数 $H^*(K(G,n),Z_2)$ 的对应关系.

第 2 章讲述 Steenrod 代数, 它是作为 Steenrod 平方运算 Sq^i(当素数 $p=2$) 或者循环缩减幂 P^i(当 p 为奇素数) 在合成乘法及加法之下所构成的代数. 在介绍

Steenrod 代数 A 的构成的基础上, 讲述了 Steenrod 代数的第一种 Z_p 基底 —— 可许基底, 它的 Hopf 代数结构以及它的对偶代数 A^* 的结构. 以它的对偶代数 A^* 的 Z_p 基底为基础介绍了 Steenrod 代数的另一种 Z_p 基底 ——Milnor 基底及由此推演出的一些公式.

第 3 章包含了 Boardman 的稳定同伦范畴的一些构造. 从 CW 谱的构造开始, 讲述谱的映射及同伦等概念, 使得谱的范畴成为稳定同伦范畴, 并在这个范畴中讲述了以谱为基础的广义同调及广义上同调群, Ω 谱以及谱的上纤维序列, Eilenberg-Maclane 谱. 为后面讲述 Adams 谱序列的需要还介绍了连通有限型谱的 p 局部化的构造.

Adams 谱序列是本书的重点内容之一. 第 4 章从一般谱序列的概念讲起, 进而讲述谱的 Adams 分解以及以 Ext 群为 E_2 项而收敛到谱的同伦群的 Adams 谱序列. 最后介绍高阶上同调运算的概念和性质以及如何将 Adams 谱序列看成是一种高阶上同调运算.

Adams 谱序列的 E_2 项是谱的上同调群的 Ext 群, 它是谱的同伦群计算的基本依据. 因此 Ext 群的计算也成为球面稳定同伦群这一核心课题的一个重要方面. 第 5 章从 Bar 和 Cobar 构造的计算方法讲起, 介绍了 Liulevicius 有关 Steenrod 代数 A 的上同调 $H^{s,*}(A)=\mathrm{Ext}_A^{s,*}(Z_p,Z_p)$ 当 $s=1,2$ 的全部 Z_p 基底的得出过程, 列出了 T. Aikawa 所得出的三维的 Steenrod 代数上同调 $H^{3,*}(A)=\mathrm{Ext}_A^{3,*}(Z_p,Z_p)$ 的全部 Z_p 基底元素及其所满足的关系. 以上的 Z_p 基元的得出各有其特殊的方法, 第 5 章最后介绍 Steenrod 代数上同调的一般计算工具 ——May 谱序列以及 $\mathrm{Ext}_P^{*,*}(Z_p,Z_p)$ 的部分计算结果.

许多重要的谱是 Steenrod 代数上的模的几何实现. 第 6 章在介绍 Steenrod 代数上的模能有几何实现的一个充分条件的基础上, 讲述 Smith-Toda 谱 $V(n)$ 当 $n=0,1,2,3$, $p>2n$ 的存在性的证明. 谱 $V(n)$ 是 Steenrod 代数 A 的外代数部分 $E_n=E(Q_0,Q_1,\cdots,Q_n)$ 的几何实现, 并且存在第 n 周期性映射 $\alpha^{(n)}:\Sigma^{2p^2-2}V(n-1)\to V(n-1)$ 使得 $V(n)$ 是它的上纤维. 除了谱 $V(n)$, 第 6 章还讲述了 Brown-Peterson 谱的存在性的原始证明. 第 6 章最后部分介绍 S.Oka 关于谱 $V_r(1)$(它是 $\alpha^r:\Sigma^{2r(p-1)}V(0)\to V(0)$ 的上纤维, $r\geqslant 1$) 是可交换可结合环谱的结果及其分裂环谱的性质等.

自从以谱为基础的广义同调论产生之后, 经典的 Adams 谱序列被推广到广义的 Adams 谱序列, 而其中以 BP 谱为基础的广义 Adams-Novikov 谱序列更得到广泛的应用. 第 7 章介绍任意平坦环谱为基础的广义 Adams 谱序列, 它以 $\mathrm{Ext}_{E_*E}^{s,t}(E_*(X), E_*(Y))$ 为 E_2 项而收敛到同伦群 $[X,Y]_{t-s}$. 当谱 E 是 Brown-Peterson 谱 BP 时, 它是应用更广泛的 Adams-Novikov 谱序列. 第 7 章最后介绍 Bruner 关于具有 Filtration 1 的映射 $h:Y\to\Sigma W$ 在广义 Adams 谱序列中由 E_2 项到 E_∞ 项保持收敛性的

结果.

以 Adams 谱序列以及广义的 Adams-Novikov 谱序列为工具发觉球面稳定同伦群新元素族是代数拓扑科研前沿的核心重要课题之一. 第 8 章不加证明地概要介绍 20 世纪 70 年代以来十多年间国外这方面的研究概况及取得的一些成果, 包括 J 同态和它的象, Adams-Novikov 谱序列的 E_2 项 $\mathrm{Ext}^{s,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)$ 当 $s=1,2$ 时分别由 $\alpha_{tp^n/i,j}$ 元素族和 $\beta_{tp^n/i,j}$ 元素族所构成的结果以及球面稳定同伦群的 $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ 元素族, S.Oka 的 $\beta_{tp/j}$ 元素族, R.Cohen 的 h_0b_n 元素族等.

本书前 8 章是依据几十篇文献编写而成的, 每 1 章末尾附有相应的参考文献目录供读者查阅, 它可带领读者进入球面稳定同伦群的科研前沿领域. 第 9 章是以编著者近十几年来的研究成果为基础, 著述球面稳定同伦群一序列新元素族存在性的证明过程. 在第 9.1 节叙述与球谱 S 和 Smith-Toda 谱 $V(1)$ 密切相关的一些谱及其相应的上纤维序列的基础上, 第 9.2 节证明了对于 a_0 相关元素 $\sigma \in \mathrm{Ext}^{s,tq}_A(Z_p, Z_p)$ 与 $\sigma' \in \mathrm{Ext}^{s+1,tq}_A(Z_p, Z_p)$, $h_0\sigma' \in \mathrm{Ext}^{s+2,tq+q}_A(Z_p, Z_p)$ 与 $i_*(h_0\sigma) \in \mathrm{Ext}^{s+1,tq+q}_A(H^*M, Z_p)$ 分别收敛到球谱 S 和 Moore 谱 M 的同伦群的非零元素. 这个一般结果只以二阶微分 $d_2(\sigma) = a_0\sigma'$ 及一些低维 Ext 群的生成元情况作为假设, 具有广泛的适用性, 能导出球面稳定同伦群的一序列 $h_0\sigma$ 元素族, 其中 σ 可有多种选择. 第 9.3 节证明了 $(i'i)_*(h_0\sigma) \in \mathrm{Ext}^{s+1,tq+q}_A(H^*V(1), Z_p)$ 的收敛性导出 $(i'i)_*(g_0\sigma) \in \mathrm{Ext}^{s+2,tq+*}_A$ $(H^*V(1), Z_p)$ 的收敛性的一般结果, 而第 9.4 节是 $i_*(h_0\sigma) \in \mathrm{Ext}^{s+1,tq+q}_A(H^*M, Z_p)$ 的收敛性可回拖而得到 $h_0\sigma \in \mathrm{Ext}^{s+1,tq+q}_A(Z_p, Z_p)$ 的收敛性的一般结果. 作为前四节一般结果的应用, 第 9.5 节证得球面稳定同伦群一序列新元素族, 计有 h_0h_n, h_0b_n, $h_0h_nh_m, h_0(h_nb_{m-1} - h_mb_{n-1})$ 元素族并猜想还可得 $h_0g_n, h_0k_n, h_0f_n, h_0f'_n$ 等元素族. 第 9.6 节叙述球面稳定同伦群一系列乘积元素族和新元素族 $h_0h_n\widetilde{\gamma}_s, h_0b_n\widetilde{\gamma}_s$, $h_0h_nh_m\widetilde{\gamma}_s, h_0(h_nb_{m-1} - h_mb_{n-1})\widetilde{\gamma}_s, g_0h_n\widetilde{\gamma}_s, g_0b_n\widetilde{\gamma}_s$ 等的大致证明过程. 前几节都是用经典的 Adams 谱序列为工具发觉出的球面稳定同伦群的新元素族. 第 9.7 节以 h_0b_n 元素族为几何输入, 以 Adams 谱序列和 Adams-Novikov 谱序列相结合作为工具, 证明了 $h_n \in \mathrm{Ext}^{1,p^nq}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*V(1))$ 在 Adams-Novikov 谱序列的收敛性并且由此得出球面稳定同伦群的第三周期性 $\gamma_{p^n/j}(1 \leqslant j \leqslant p^n - 1)$ 元素族的收敛性. 第 9.8 节以 h_0h_n 元素族为几何输入, 通过在 Adams-Novikov 分解中的推演, 证明了球面稳定同伦群第二周期性元素族 $\beta_{tp^n/j}(1 \leqslant j \leqslant p^n - 1$ 当 $t \geqslant 1$; $1 \leqslant j \leqslant p^n$ 当 $t \geqslant 2)$ 在 Adams-Novikov 谱序列的收敛性.

除了 Smith-Toda 谱 $V(n)$(当 $n = 0,1,2,3, p > 2n$) 及 $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ 元素族以外, 第 9 章中所得出的球面稳定同伦群的一序列新元素族, 其证明不需要另外的已知元素族作为几何输入. 本书全书也基本上做到自包含, 以方便读者循序渐进地阅读, 了解并掌握球面稳定同伦群科研前沿领域的某些方法和结果.

本书的编著和出版得到各方面的支持和帮助. 感谢周学光先生的指导和南开大

学数学学院南开数学所提供的良好学术氛围, 使编著者能在上同调运算和 Steenrod 代数的研究的基础上进入球面稳定同伦群的研究领域开展近二十年的研究. 感谢国家自然科学基金委员会自 1989 年至 2004 年为编著者提供的连续资助. 本书也是作为编著者主持的国家自然科学基金 2002 至 2004 年研究项目 "Toda 乘积和球面稳定同伦群"(批准号 10171049) 的成果之一. 本书的初稿曾在南开大学数学学院代数拓扑方向研究生中使用过. 感谢有关老师和研究生为本书提供的有益意见和校正.
由于编著者水平所限, 书中的错误或不妥之处在所难免, 请读者批评指正.

编著者

2006 年 11 月于南开大学

目　　录

第 1 章　上同调运算

1.1　上同调运算的一般概念

粗略地讲, 上同调运算就是一种运算, 当它作用到空间的某些上同调类, 则产生另外一些上同调类. 简单的例子如加法: 若 u, v 为 q 维上同调群 $H^q(X,G)$ 的两个元, 则有 $u+v \in H^q(X,G)$. 另外的例子还有卡积: 若 $u \in H^p(X,G), v \in H^q(X,G')$, 则 $u \cup v \in H^{p+q}(X, G \otimes G')$. 群同态 $\eta: G \to G'$ 导出的上同调群同态 $\eta^*: H^q(X,G) \to H^q(X,G')$ 和联系于系数群短正合序列 $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ 的 Bockstein 同态 $\beta: H^q(X,G'') \to H^{q+1}(X,G')$ 也是这方面的例子. 以上都是初等的上同调运算.

更进一步的上同调运算是 Steenrod 的循环缩减幂

$$Sq^i: H^q(X,Z_2) \to H^{q+i}(X,Z_2)$$
$$P^i: H^q(X,Z_p) \to H^{q+2i(p-1)}(X,Z_p)$$

其中 $p>2$ 是素数, Z_p 为 mod p 整数加群. 与此相关联的还有 Pontrjagin 平方运算

$$B_2: H^q(X,Z_{2^k}) \to H^{2q}(X,Z_{2^{k+1}})$$

和由 Thomas[1] 得到的在奇素数 p 的推广

$$B_p: H^q(X,Z_{p^k}) \to H^{pq}(X,Z_{p^{k+1}})$$

我们将在 1.3 节中介绍 Sq^i 和 P^i 的构造及一些性质, 而 B_2 和 B_p 的构造则是类似的.

显然, 许多运算将可以由以上运算作各种不同的组合而得到, 例如 $B_p(P^iu \cup P^j(v+w))$ 是三个变量 u,v,w 的上同调运算. 因此, 我们称以上的运算为最基本的上同调运算.

定义 1.1.1　$(q,r;G,G')$ 型 (一个变量的) 上同调运算 T 是两个上同调函子之间的自然变换

$$T(X): H^q(X,G) \to H^r(X,G')$$

若对任意空间 X 和 $y_1, y_2 \in H^q(X,G), T(y_1+y_2) = T(y_1)+T(y_2)$, 则称 T 为可加上同调运算. 次数 q 的稳定上同调运算$T=\{T^n\}$ 是一序列上同调运算 $T^n(X): H^n(X,G) \to H^{n+q}(X,G')$ 使 $T^{n+1}\cdot\sigma = \sigma\cdot T^n$, 其中 $\sigma: H^n(X,G) \to H^{n+1}(SX,G)$ 为双角锥同构.

以后我们将看到 Steenrod 平方运算 Sq^i 是次数 i 的稳定上同调运算.

定义 1.1.2　若固定 $k+1$ 个非负整数 $q_1, q_2, \cdots, q_k, r$ 和 $k+1$ 个系数群 $G_1, G_2, \cdots, G_k, G'$ 并且对每个空间 X 和元 $u_i \in H^{q_i}(X, G_i)$ $(i=1,2,\cdots,k)$, T 对应一个元 $T(u_1, u_2, \cdots, u_k) \in H^r(X, G')$ 而且对任一映射 $f: Y \to X$, 有

$$f^*T(u_1, u_2, \cdots, u_k) = T(f^*u_1, \cdots, f^*u_k)$$

则称 T 是 k 个变量的 $(q_1, \cdots, q_k, r; G_1, \cdots, G_k, G')$ 型上同调运算. 以上定义的 T 实际上是函子 $H^{q_i}(-, G_i)$ 的笛卡儿乘积到函子 $H^r(-, G')$ 的自然变换.

卡积是两个变量的上同调运算的例子, 它是双线性的, 即是可加的. 加法也是两个变量的上同调运算, 但不是双线性的, 即不是可加的.

定义 1.1.3　若 T 是如上所述的 k 个变量上同调运算, T_1 是 l 个变量上同调运算使其取值函子为 $H^{q_1}(-, G_1)$, 则

$$T(T_1(v_1, \cdots, v_l), u_2, \cdots, u_k)$$

称为 T 与 T_1 的合成. 可见上同调运算的合成是以自然的方式定义的.

定义 1.1.4　若 T 是如上所述的 k 个变量上同调运算, 而且 $q_1 = q_2$, $G_1 = G_2$, 则由以下方式得到的 $k-1$ 个变量上同调运算

$$T'(u_1, u_2, \cdots, u_{k-1}) = T(u_1, u_1, u_2, \cdots, u_{k-1})$$

叫做 T 的限制.

定义 1.1.5　一族上同调运算叫做生成所有运算, 若任意上同调运算都可由族中上同调运算经过有限次合成和限制而得到. 族中的上同调运算就称为生成元.

我们将在 1.5 节分别对不同的 q, r, G, G' 确定所有 $(q, r;\ G, G')$ 型上同调运算 $O(q, r; G, G')$ 的生成元.

1.2　Eilenberg-Maclane 空间和上同调运算

定义 1.2.1　已给整数 $n \geqslant 0$ 和 Abel 群 G, CW 复形 $K(G,n)$ 叫做 (G,n) 型的 Eilenberg-Maclane 空间, 如果

$$\pi_r(K(G,n)) = \begin{cases} G, & \text{当 } r = n \\ 0, & \text{当 } r \neq n \end{cases}$$

对 $n=1$, G 可以是非 Abel 群. 对 $n=0$, 因为 $\pi_0(K(G,n))$ 和 G 一一对应, 因此可以看成 $K(G,n) = G$ 具有离散拓扑.

定理 1.2.2　(a) 对 $n \geqslant 1$ 和 Abel 群 G, CW 复形 $K(G,n)$ 存在 (当 $n=1$, G 可以是非 Abel 群).

(b) 若 $\phi: G \to H$ 为群同构, W 为空间使 $\pi_r(W) = H$ (当 $r = n$), $\pi_r(W) = 0$ (当 $r > n$), 则存在映射 $f: K(G,n) \to W$ 使 $f_*: \pi_n(K(G,n)) \to \pi_n(W)$ 为同构.

证 (a) 因为 $G = F/R$, F 为自由群, R 为子群, 令 $X = \bigvee\limits_{\alpha} S_\alpha^n$, 对 F 的每个生成元 α, 对应 X 中一个 S_α^n. 设 $i_\alpha: S_\alpha^n \to X$ 为内射, 作 $\theta: F \to \pi_n(X)$ 使 $\theta(\alpha) = [i_\alpha]$, 则 θ 为同构. 因为 R 也是自由群, 对 R 的每个生成元 γ, 令 $\phi_\gamma^n: S_\gamma^n \to X$ 为 $\theta(\gamma)$ 的代表, 令 $Y_{n+1} = X \cup_{\phi_\gamma^n} CS_\gamma^n$, 其中用 ϕ_γ^n 粘贴 $n+1$ 维胞腔 CS_γ^n 是对每个生成元 $\gamma \in R$. 因此 Y_{n+1} 是 CW 复形, 而且当 $0 < r < n$, $\pi_r(Y_{n+1}) = 0$, 这是因为 Y_{n+1} 没有 $0 < r < n$ 维胞腔. 考虑以下恰当序列图形

$$
\begin{array}{ccccccc}
\pi_{n+1}(Y_{n+1}, X) & \xrightarrow{\partial_*} & \pi_n(X) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(Y_{n+1}) & \to & \pi_n(Y_{n+1}, X) \\
\cong \big\downarrow p_* & & & & & & \\
\pi_{n+1}(Y_{n+1}/X) & & & & & & \\
\cong \big\downarrow & & \big\uparrow \theta & & & & \\
\pi_{n+1}(\bigvee\limits_{\gamma} S_\gamma^{n+1}) & & & & & & \\
\cong \big\downarrow & & & & & & \\
R & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

因为 $\partial_*[g_\gamma^{n+1}] = [\phi_\gamma^n]$, 其中 $g_\gamma^{n+1}: (E^{n+1}, S^n) \to (Y_{n+1}, X)$ 为 $n+1$ 维胞腔 CS_γ^n 的特征映射, 因此上述图形可换, 从而 $\pi_n(Y_{n+1}) \cong G$(注意到 (Y_{n+1}, X) 是连通的).

下面将 Y_{n+1} 再粘贴更高维的胞腔以便消掉 $\pi_m(Y_{n+1})$ 的非零元素. 设当 $m \geqslant n+1$ 时, 已有 CW 复形 $Y_m \supset Y_{n+1}$, 使 $\pi_n(Y_{n+1}) \cong \pi_n(Y_m) \cong G$, $\pi_r(Y_m) = 0$ $(n < r < m)$. 设 $\pi_m(Y_m)$ 的生成元组为 $\{\beta\}_{\beta \in B}$, 令 $\phi_\beta^m: S_\beta^m \to Y_m$ 为 β 的代表, 作 $Y_{m+1} = Y_m \cup_{\phi_\beta^m} CS_\beta^m$ (对每个生成元 β), 有恰当序列

$$\cdots \to \pi_{m+1}(Y_{m+1}, Y_m) \xrightarrow{\partial_*} \pi_m(Y_m) \xrightarrow{i_*} \pi_m(Y_{m+1}) \to \pi_m(Y_{m+1}, Y_m) = 0$$

因为 $\partial_*[f_\beta^{m+1}] = [\phi_\beta^m]$, 其中 $f_\beta^{m+1}: (E^{m+1}, S^m) \to (Y_{m+1}, Y_m)$ 为 $m+1$ 维胞腔 CS_β^m 的特征映射, 因此 ∂_* 满, 从而 $\pi_m(Y_{m+1}) = 0$. 类似地可以证明 $0 = \pi_r(Y_m) \cong \pi_r(Y_{m+1})$ (当 $n < r < m$), 完成了归纳法. 令 $Y = \bigcup\limits_{m \geqslant n+1} Y_m$, 具有弱拓扑, 则

$$\pi_r(Y) \cong \pi_r(Y_{r+1}) = \begin{cases} G, & \text{当 } r = n \\ 0, & \text{当} r \neq n \end{cases}$$

(b) 记 $Y = K(G,n)$ 如上所构造. 因此 Y 的 n 维架 $Y^n = \bigvee\limits_{\alpha} S_\alpha^n$, 内射 $i_\alpha S_\alpha^n \to Y^n \subset Y$ 的同伦类 $[i_\alpha]$ 是 G 的生成元, 令 $f_\alpha^n: S_\alpha^n \to W$ 为 $\phi[i_\alpha]$ 的代表, 定义 $f: Y^n \to W$ 为 $f|_{S_\alpha^n} = f_\alpha^n$, 则以下图形可换:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_{n+1}(Y,Y^n) \to & \pi_n(Y^n) \to & \pi_n(Y) \to 0 \\ & \Big\downarrow (f|_{Y^n})_* & \downarrow\cong \\ & & G \\ & & \downarrow\phi \\ & \pi_n(W) \quad \cong & H \end{array}$$

设 $f: Y^m \to W$ $(m \geqslant n+1)$ 已构造, 使 $(f|_{Y^m})_* = \phi$ 如上图. 若 $h: S^m \to Y^m$ 为 Y 的 $m+1$ 维胞腔 e^{m+1} 的特征映射, 则 $(f|_{Y^m})_*[h] \in \pi_m(W) = 0$, f 可扩张到 $m+1$ 维胞腔 e^{m+1}, 从而可扩张到 Y^{m+1}, 使 $(f|_{Y^{m+1}})_* = \phi: \pi_n(Y^{m+1}) \to \pi_n(W)$. 因此, 类似于 (a) 中的作法, 存在映射 $f: Y \to W$ 使 $f_* = \phi: \pi_n(Y) \to \pi_n(W)$. 证毕.

注 由以上证明可以得出 $K(G,n)$ 在同伦等价意义下唯一. E-M 空间的例子有 $K(Z,1) = S^1$; $K(Z_2,1) = RP^\infty$, 实无穷维射影空间; $K(Z,2) = CP^\infty$, 复无穷维射影空间; $K(Z_m,1) = L^\infty(m)$, 无穷维透镜空间.

推论 1.2.3 存在弱同伦等价 $\epsilon'_n: K(G,n) \to \Omega K(G,n+1)$.

证 由文献 [3]

$$\pi_r(\Omega K(G,n+1)) \cong \pi_{r+1}(K(G,n+1)) = \begin{cases} G, & \text{当 } r=n \\ 0, & \text{当 } r \neq n \end{cases}$$

因此由定理 1.2.2 (b), 存在映射 $\epsilon'_n: K(G,n) \to \Omega K(G,n+1)$ 使 ϵ'_n 导出同伦群之间的同构. 证毕.

引理 1.2.4 若 X 为 CW 复形, $f: X \to Y$ 为弱同伦等价而 Y 为 H 空间, 则存在 X 的 H 空间结构使 f 为 H 映射. 更进一步, 若 Y 是 H 群, 则 X 也是 H 群.

证 $X \times X$ 也是 CW 复形. 设 $\mu: Y \times Y \to Y$ 为 Y 的 H 空间乘法, 则 $[\mu(f \times f)] \in [X \times X, Y]$. 由 Whitehead 定理, 弱同伦等价 f 导出一一对应

$$f_*: [X \times X, X] \to [X \times X, Y]$$

因此存在映射 $\lambda: X \times X \to X$ 使 $f\lambda \simeq \mu(f \times f)$. 若 $i_\alpha: X \to X \times X$ 为内射 $(\alpha = 1,2)$, 则

$$f\lambda i_\alpha \simeq \mu(f \times f)i_\alpha = \mu i_\alpha f \simeq f$$

从而 $\lambda i_\alpha \simeq 1$, $\lambda: X \times X \to X$ 是 H 空间乘法. 更进一步, 若 Y 是 H 群, 可证 λ 满足相应条件使得 X 是 H 群. 证毕.

定理 1.2.5 $K(G,n)$ 有 H 空间结构, 且对任一 CW 复形 X, $[X; K(G,n)]$ 是群, 而且是 Abel 群.

证 由推论 1.2.3 和引理 1.2.4 得出 $K(G,n)$ 有 H 空间结构, 且有弱同伦等价 $\Omega\epsilon'_{n+1} \cdot \epsilon'_n: K(G,n) \to \Omega^2 K(G,n+2)$, 因此 $[X; K(G,n)] \cong [X, \Omega^2 K(G,n+2)]$ 是 Abel 群 (见文献 [3]).

定理 1.2.6 对任意 CW 复形 X, 存在同构

$$\phi\colon [X;K(G,n)] \cong H^n(X,G)$$

其中 $\phi[f]=f^*(u_n)$, $u_n\in H^n(K(G,n),G)$ 为唯一生成元, 它对应于 Hurewicz 同构 $\Phi_n:\pi_n(K(G,n))\to H_n(K(G,n))$ 的逆, 称为基本上同调类.

证 因为 $K(G,n)$ 是 H 空间, 因此是 m 单式, 对所有 $m\geqslant 1$, 从而 $[X,x_0;K(G,n),*]\cong[X,K(G,n)]$ (见文献 [3] 定理 7.2.6~7.2.7), 而且当 $n\geqslant 1$, $H^n(X,G)=\widetilde{H}^n(X,G)$, 因此下面只需证明 $\phi\colon[X,x_0;K(G,n),*]\cong\tilde{H}^n(X,G)$. 设 $X=S^r\ (r\geqslant 1)$, 则以上同构显然成立, 因此对 $X=\bigvee\limits_{\alpha}S^r_\alpha$ 也成立. 因为 X 的 1 维架 $X^1=\bigvee S^1_\alpha$, 因此对 X^1 成立, 不妨设已对 X^{r-1} 成立, 考虑以下恰当序列的可换图形 (记 $K(G,n)=K$)

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\leftarrow[X^{r-1},K] & \leftarrow & [X^r,K] & \leftarrow & [X^r/X^{r-1},K] & \leftarrow & [SX^{r-1},K]\\
\| & & \| & & \| & & \|\\
 & & & & & & [X^{r-1},\Omega K]\\
 & & & & & & \|\\
\cdots\leftarrow[X^{r-1},K] & \leftarrow & [X^r,K] & \leftarrow & [\bigvee S^r_\alpha,K] & \leftarrow & [X^{r-1},K(G,n-1)]\\
\cong\downarrow\phi & & \cong\downarrow\phi & & \downarrow\phi & & \cong\downarrow\phi \quad \cong\downarrow\phi\\
\cdots\leftarrow H^n(X^{r-1},G) & \leftarrow & H^n(X^r,G) & \leftarrow & H^n(\bigvee S^r_\alpha,G) & \leftarrow & H^{n-1}(X^{r-1},G)
\end{array}$$

其中上横行为 $X^{r-1}\xrightarrow{i}X^r\to X^r\cup_i CX^{r-1}\simeq X^r/X^{r-1}$ 导出的 Puppe 恰当序列 (见文献 [3]), 而下横行为 (X^r,X^{r-1}) 的系数群为 G 的上同调群恰当序列. 由五项引理, ϕ 对 X^r 是同构. 若 X 是无限维 CW 复形, 因为 $H^n(X,G)$ 只和 X^{n+1} 有关, 而任映射 $f\colon X^{n+1}\to K$ 总可以扩张到 X(见定理 1.2.2(b)), 因此 ϕ 对 X 也是同构. 证毕.

定理 1.2.7 对应 $T\mapsto Tu_q$ 定义了所有 $O(q,r;G,G')$ 型上同调运算和 $H^r(K(G,q),G')$ 的同构.

证 先考虑 CW 复形的范畴. 记 $Y=K(G,q)$, 对任意 $w\in H^r(Y,G')$ 和任意 CW 复形 X, $v\in H^q(X,G)$, 由定理 1.2.6, 存在映射 $f\colon X\to Y$ 使 $f^*u_q=v$, 定义上同调运算 $T\colon H^q(X,G)\to H^r(X,G')$, 使 $Tv=f^*w$. 若 $g\colon X'\to X$ 为映射, 则 $fg\colon X'\to Y$ 使 $(fg)^*u_q=g^*v$, 因此

$$Tg^*v=(fg)^*w=g^*f^*w=g^*Tv$$

从而 $T\in O(g,r;G,G')$, 而通过选择 $v=u_q$, $f=1$, 可知 $Tu_q=w$, 从而对应 $T\mapsto Tu_q$ 是满的. 若 $T,T'\in O(q,r;G,G')$ 使 $Tu_q=T'u_q$, 如同上述, $f\colon X\to Y$ 为映射使 $f^*u_q=v\in H^q(X,G)$, 则

$$Tv=Tf^*u_q=f^*Tu_q=f^*T'u_q=T'f^*u_q=T'v$$

从而 $T=T'$, 对应是单的.

若 X 是任意拓扑空间, 利用 J.B. Giever[4] 的结果, X 的奇异复形 $S(X)$ 有几何

实现 $P(X)$, 即存在单纯复形 $P(X)$ 使 $H^q(P(X),G)$ 自然同构于 $H^q(S(X),G)$, 因此定理得证. 证毕.

以上关于一个变量的上同调运算的结果, 可直接推广到 k 个变量的情况. 设 $Y_i = K(G_i,q_i)\,(i=1,2,\cdots,k)$, $Y = Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_k$, $\phi_i\colon Y\to Y_i$ 为投射, $u_i\in H^{q_i}(Y_i,G_i)$ 为基本上同调类.

定理 1.2.8 由 $T\in O(q_1,q_2,\cdots,q_k,r;G_1,\cdots,G_k,G')$ 到 $T(\phi_1^*u_1,\phi_2^*u_2,\cdots,\phi_k^*u_k)\in H^r(Y,G')$ 的对应定义了 $O(q_1,q_2,\cdots,q_k,r;G_1,\cdots,G_k,G')$ 与 $H^r(Y,G')$ 之间的同构.

证 设 X 为 CW 复形, $v_i\in H^{q_i}(X,G_i)$, 则存在映射 $f_i\colon X\to Y_i$, 使 $f^*u_i=v_i$, 令 $f\colon X\to Y$ 为映射使 $\phi_i f=f_i$. 设 $T,T'\in O$ 使

$$T(\phi_1^*u_1,\cdots,\phi_k^*u_k)=T'(\phi_1^*u_1,\cdots,\phi_k^*u_k)$$

则

$$\begin{aligned}T(v_1,\cdots,v_k)&=T(f_1^*u_1,\cdots,f_k^*u_k)\\&=T(f^*\phi_1^*u_1,\cdots,f^*\phi_k^*u_k)=f^*T(\phi_1^*u_1,\cdots,\phi_k^*u_k)\\&=f^*T'(\phi_1^*u_1,\cdots,\phi_k^*u_k)=T'(v_1,\cdots,v_k)\end{aligned}$$

即 $T=T'$, 对应是单的. 另外, 任意 $w\in H^r(Y,G')$, 则可定义 $T(v_1,\cdots,v_k)=f^*w$, 从而有 $T(\phi_1^*u_1,\cdots,\phi_k^*u_k)=w$, 对应是满的. 然后再由 CW 复形的范畴推广到拓扑空间的范畴. 证毕.

1.3 Steenrod 平方运算 Sq^i 的构造

本节中我们将给出重要的上同调运算 —— Steenrod 平方运算 Sq^i 的构造. 这是稳定上同调运算. 以下是本节主要定理.

定理 1.3.1 存在上同调运算

$$Sq^i\colon H^n(X,A,Z_2)\to H^{n+i}(X,A,Z_2)\qquad(n\geqslant 0)$$

满足:

(a) $Sq^0=1$.

(b) Sq^1 是联系于系数群的恰当序列 $0\to Z_2\to Z_4\to Z_2\to 0$ 的 Bockstein 同态.

(c) 若 $x\in H^n(X,A,Z_2)$, 则 $Sq^n x=x^2$, 其中 x^2 指的是卡积 $x\cup x$.

(d) 若 $x\in H^n(X,A,Z_2)$, 则

$$Sq^i x=0,\qquad 当\ i>n$$

(e) $\delta Sq^i = Sq^i\delta$, 其中 $\delta\colon H^{n-1}(A,Z_2)\to H^n(X,A,Z_2)$ 为空间偶 (X,A) 上同调恰当序列的连接同态.

(f) Cantan 公式

$$Sq^i(xy)=\sum_{j+k=i}(Sq^jx)(Sq^ky)$$

(g) Adem 关系

$$Sq^aSq^b=\sum_{j=0}^{[\frac{a}{2}]}\binom{b-1-j}{a-2j}Sq^{a+b-j}Sq^j,\qquad \text{当 } 0<a<2b$$

Sq^ix 实质上是缩减幂 $x\cup_i x$, 使当 $i=n$ 时 $x\cup_i x=x\cup x=x^2$, 我们将先在上链群中来构造缩减卡积 $c\cup_i d$, 然后再过渡到上同调类. 我们将用到同调论中都有叙述的零调模型定理1.3.3.

定义 1.3.2 设 $\mathcal{T}$ 为拓扑空间范畴, $\mathcal{C}$ 为链复形范畴. $M=\{\Delta_n,n\geqslant 0\}$, 其中 Δ_n 是 n 维标准单形, M 称为模型. $F,G\colon\mathcal{T}\to\mathcal{C}$ 为两个函子, G 称为在模型 M 上零调, 若对任意拓扑空间 $X\in\mathcal{T}$, $H_n(G(X))=0\,(n>0)$. F 称为在模型 M 上自由, 若对 $X\in\mathcal{T}$,

$$\Big\{F(f)(\delta_n)\in F(X)\,|\,\text{所有 } f\colon\Delta_n\to X,\ n\geqslant 0\Big\}$$

是 $F(X)$ 的基, 其中 $\delta_n\in F(\Delta_n)$, 而 $F(f)\colon F(\Delta_n)\to F(X)$ 是由映射 $f\colon\Delta_n\to X$ 导出的链映射.

定理 1.3.3(零调模型定理) 设 $F,G\colon\mathcal{T}\to\mathcal{C}$ 为两个函子使 G 在模型 M 零调, F 在 M 上自由, 则对任 $X\in\mathcal{T}$ 和给定的自然同态 $\phi\colon H_0(F(X))\to H_0(G(X))$, 存在自然链映射 $\phi_\#\colon F(X)\to G(X)$ 使下图可换:

$$\begin{array}{ccccccc}
\to F_2(X) & \xrightarrow{\partial} & F_1(X) & \to & F_0(X) & \to & H_0(F(X))\\
\downarrow\phi_2 & & \downarrow\phi_1 & & \downarrow\phi_0 & & \downarrow\phi\\
\to G_2(X) & \xrightarrow{\partial} & G_1(X) & \to & G_0(X) & \to & H_0(G(X))
\end{array}$$

而且 $\phi_\#$ 在链同伦意义下唯一.

设 X 为拓扑空间, $S_*(X)=\bigcup_n S_n(X)$ 为 X 的奇异复形, 即 $S_n(X)=\Big\{$所有映射 $f\colon\Delta_n\to X\}$ 生成的自由 Abel 群, 并且有微分 $d\colon S_n(X)\to S_{n-1}(X)$ 使 $d^2=0$. 设 $T\colon S_*(X)\otimes S_*(X)\to S_*(X)\otimes S_*(X)$ 定义为 $T(x\otimes y)=(-1)^{|x|\cdot|y|}(y\otimes x)$, 叫做交换同态.

命题 1.3.4 存在次数 j, $j\geqslant 0$ 的自然同态 $D_j\colon S_*(X)\to S_*(X)\otimes S_*(X)$ 使

(1) D_0 是链映射, 且导出对角同态 $H_0(X)\to H_0(X)\otimes H_0(X)$.

(2) $dD_j+(-1)^{j+1}D_jd=D_{j-1}+(-1)^jTD_{j-1}$, $j>0$.

且若 $\{D_j\}$,$\{D'_j\}$ 为两个这样的序列, 则存在自然同态 $E_j: S_*(X)\to S_*(X)\otimes S_*(X)$ (次数 j, $j\geqslant 0$), 使

(3) $E_0=0$.

(4) $dE_{j+1}+(-1)^jE_{j+1}d=-E_j+(-1)^{j+1}TE_j+D_j-D'_j$.

证 设 $R=\mathbf{Z}[t]/(t^2-1)$, 即整系数 Z 上的多项式环模 (t^2-1) 生成的理想. R 是具有单位元的环. 设 $\mathcal{C}$ 为环 R 上链复形范畴, $\mathcal{T}$ 为拓扑空间范畴. 设 W_k 为一个母元 w_k 的自由 R 模 $(k\geqslant 0)$, $W_*=\sum\limits_{k\geqslant 0}W_k$ 为链复形, 其微分 $d: W_k\to W_{k-1}$ 定义为

$$d(w_k)=[1+(-1)^kt]w_{k-1},\qquad k\geqslant 1$$

而增广 ϵ 为 $\epsilon(1)=\epsilon(t)=1$.

考虑函子 $F,G:\mathcal{T}\to\mathcal{C}$ 定义为

$$F(X)=W_*\otimes S_*(X)\qquad (t(w\otimes u)=tw\otimes u)$$

$$G(X)=S_*(X)\otimes S_*(X)\quad (t(u\otimes u')=T(u\otimes u'))$$

容易看出, F 在模型 $M=\{\Delta_n, n\geqslant 0\}$ 上自由, G 在 M 上零调 (由 Künneth 公式, 并注意到 S_* 以 R 为系数环), 因此由零调模型定理, 存在链映射 $\phi_\#: F(X)\to G(X)$ 导出对角同态

$$\begin{array}{ccc}
H_0(F(X)) & \longrightarrow & H_0(G(X))\\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong\\
H_0(W_*\otimes S_*(X)) & \to & H_0(S_*(X)\otimes S_*(X))\\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong\\
H_0(X) & \longrightarrow & H_0(X)\otimes H_0(X)
\end{array}$$

令 $D_j(a)=\phi(w_j\otimes a)$, $a\in S_*(X)$, 则 (1) 成立. 由 ϕ 是链映射,

$$\begin{aligned}
&dD_j(a)+(-1)^{j+1}D_jd(a)\\
&=\phi d(w_j\otimes a)+(-1)^{j+1}\phi(w_j\otimes da)\\
&=\phi(dw_j\otimes a)+(-1)^j\phi(w_j\otimes da)+(-1)^{j+1}\phi(w_j\otimes da)\\
&=\phi(w_{j-1}\otimes a)+(-1)^j\phi(tw_{j-1}\otimes a)\\
&=D_{j-1}(a)+(-1)^jTD_{j-1}(a)\qquad (\text{由}t(u\otimes u')=T(u\otimes u'))
\end{aligned}$$

因此 (2) 成立. 若有这样两个序列 $\{D_j\}$, $\{D'_j\}$, 从而存在两个链映射 $\phi,\phi': F(X)\to G(X)$, 都导出对角同态, 则由定理 1.3.3, 存在链同伦 $\Psi_q: F_q(X)\to G_{q+1}(X)$ 使

$$d\Psi_q+\Psi_{q-1}d=\phi'_q-\phi_q$$

令 $E_j(a)=\Psi(w_{j-1}\otimes a)$, $j\geqslant 1$, 从而 $E_0=0$, (3), (4) 成立. 证毕.

定义 1.3.5 设

$$D_j^*\colon \mathrm{Hom}(S_*(X)\otimes S_*(X),Z)\to \mathrm{Hom}(S_*(X),Z)$$

为 D_j 的对偶, 对 $c\in \mathrm{Hom}(S_n(X),Z)$ 以及 $d\in \mathrm{Hom}(S_m(X),Z)$, 则 $c\otimes d\in \mathrm{Hom}((S_*(X)\otimes S_*(X))_{n+m},Z)$, 令 $c\cup_i d=D_i^*(c\otimes d)\in \mathrm{Hom}(S_{n+m-i}(X),\ Z)$ 称为 c 和 d 的卡 i 乘积.

命题 1.3.6 (1) 对任意映射 $f\colon Y\to X$, $c,d\in S^*(X)$ 有 $f^{\#}(c\cup_i d)=f^{\#}c\cup_i f^{\#}d$.

(2) $\delta(c\cup_i c')=(-1)^i\delta c\cup_i c'+(-1)^{i+n}c\cup_i\delta c'-(-1)^i c\cup_{i-1}c'-(-1)^{nm}c'\cup_{i-1}c$, 其中 $c\in S^n(X)$, $c'\in S^m(X)$, δ 是 $S^*(X)$ 的微分.

(3) $(c_1+c_2)\cup_i(d_1+d_2)=c_1\cup_i d_1+c_1\cup_i d_2+c_2\cup_i d_1+c_2\cup_i d_2$.

证 (1) 是显然的.

(2) $\delta(c\cup_i c')(a)=D_i^*(c\otimes c')(da)=(c\otimes c')(D_i da)$

$=c\otimes c'[(-1)^i dD_i a-(-1)^i D_{i-1}a-TD_{i-1}a]$

$=(-1)^i\delta(c\otimes c')(D_i a)-(-1)^i(c\otimes c')(D_{i-1}a)-(-1)^{nm}(c'\otimes c)(D_{i-1}a)$

$=[(-1)^i\delta c\otimes c'+(-1)^{i+n}c\otimes\delta c'](D_i a)-[(-1)^i(c\otimes c')+(-1)^{nm}c'\otimes$
$c](D_{i-1}a)$

$=[(-1)^i\delta c\cup_i c'+(-1)^{i+n}c\cup_i\delta c'-(-1)^i c\cup_{i-1}c'-(-1)^{nm}c'\cup_{i-1}c](a)$.

(3) 由卡 i 乘积定义的线性性得出. 证毕.

定义 1.3.7 $Sq^i\colon S^n(X)\to S^{n+i}(X)$ 为

$$Sq^i(c)=\begin{cases} c\cup_{n-i}c, & \text{当 } 0\leqslant i\leqslant n\\ 0 & \text{当 } i>n\end{cases}$$

命题 1.3.8 (1) $f^{\#}Sq^i c=Sq^i f^{\#}c$.

(2) 若 c 在 A 上为 0 mod 2, 其中 $A\subset X$, 则 $Sq^i c$ 也在 A 上为 0 mod 2.

(3) 若 $\delta c=0(\mathrm{mod}\ 2)$, 则 $\delta Sq^i c=0(\mathrm{mod}\ 2)$.

(4) 若 $c=\delta d(\mathrm{mod}\ 2)$, 则

$$Sq^i c=\delta[d\cup_{n-i}c+d\cup_{n-i-1}d](\mathrm{mod}\ 2)(i\leqslant n)$$

(5) 若 $\delta c_1=\delta c_2=0\,(\mathrm{mod}\ 2)$, 则

$$Sq^i(c_1+c_2)=Sq^i c_1+sq^i c_2+\delta(c_1\cup_{n-i+1}c_2)\,(\mathrm{mod}\ 2)$$

证 (1), (2) 是显然的.

(3) $\delta Sq^i c=\delta(c\cup_{n-i}c)=\delta c\cup_{n-i}c+c\cup_{n-i}\delta c+2c\cup_{n-i-1}c=0\,(\mathrm{mod}\ 2)$.

(4) $\delta[d\cup_{n-i}c+d\cup_{n-i-1}d]=\delta d\cup_{n-i}c+d\cup_{n-i}\delta c+d\cup_{n-i-1}c+c\cup_{n-i-1}d+\delta d\cup_{n-i-1}d+d\cup_{n-i-1}\delta d+2d\cup_{n-i-2}d=c\cup_{n-i}c=Sq^i c\,(\mathrm{mod}\ 2)$

(5) $\delta[c_1 \cup_{n-i+1} c_2] = \delta c_1 \cup_{n-i+1} c_2 + c_1 \cup_{n-i+1} \delta c_2 + c_1 \cup_{n-i} c_2 + c_2 \cup_{n-i} c_1 = c_1 \cup_{n-i} c_2 + c_2 \cup_{n-i} c_1 \pmod 2$. 因此 $Sq^i(c_1 + c_2) = (c_1 + c_2) \cup_{n-i} (c_1 + c_2) = c_1 \cup_{n-i} c_1 + c_1 \cup_{n-i} c_2 + c_2 \cup_{n-i} c_1 + c_2 \cup_{n-i} c_2 = Sq^i c_1 + Sq^i c_2 + \delta(c_1 \cup_{n-i+1} c_2) \pmod 2$. 证毕.

由以上结论看出, Sq^i 将上循环 c 变成上循环 $Sq^i c$, 将上边缘 c 变成上边缘 $Sq^i c$, 而且具有自然性, 因此可以定义上同调运算

$$Sq^i: H^n(X, A, Z_2) \to H^{n+i}(X, A, Z_2)$$

为 $Sq^i\{c\} = \{Sq^i c\}$, 而且由命题 1.3.8(5) 可知 Sq^i 是同态. Sq^i 的定义与 $\{D_j\}$ 的选择无关, 因为由 $\{D_j\}$ 和 $\{D'_j\}$ 定义的 Sq^i 和 $Sq^{i'}$, 有

$$\begin{aligned} 0 &= (c \otimes c)[dE_{n-i+1} + E_{n-i+1}d + E_{n-i} + TE_{n-i} + D_{n-i} \\ &\quad + D'_{n-i}](a) \\ &= (c \otimes c)[E_{n-i+1}d + D_{n-i} + D'_{n-i}](a) \\ &= [Sq^i c + Sq^{i'} c + \delta E_{n-i+1}(c \otimes c)](a) \pmod 2 \end{aligned}$$

因此 $\{Sq^i c\} = \{Sq^{i'} c\}$ 是同一个上同调类. 下面只要证明 Sq^i 满足定理 1.3.1 的性质.

定理 1.3.1 的证明 (d) 由定义是显然的, 下面证明 (c). 由 Eilenberg-Zilber 定理, $\rho: S(X \times Y) \to S(X) \otimes S(Y)$ 是链等价. 设 $\Delta: X \to X \times X$ 为对角映射, 则命题 1.3.4 中 D_0 和 $\rho \cdot \Delta_\#: S(X) \to S(X) \otimes S(X)$ 都导出对角同态 $H_0(X) \to H_0(X) \otimes H_0(X)$, 因此有链同伦 $D_0 \simeq \rho \cdot \Delta_\#$. 设 $x = \{c\} \in H^n(X, A, Z_2)$, 则

$$\begin{aligned} Sq^n\{c\} &= \{c \cup_0 c\} = D_0^*\{(c \otimes c)\} \\ &= \Delta^* \rho^* \{(c \otimes c)\} = \{c\} \cup \{c\} = x^2 \end{aligned}$$

下面证明 (e).

注意到 δ 是这样定义的,

$$0 \to S^{n-1}(X, A, Z_2) \to S^{n-1}(X, Z_2) \xrightarrow{i^\#} S^{n-1}(A, Z_2) \to 0$$

对 $S^{n-1}(A, Z_2)$ 的上循环 c, 有 $d \in S^{n-1}(X, Z_2)$ 使 $i^\# d = c$, 而 $i^\# \delta d = \delta i^\# d = \delta c = 0$, 因此 $\delta d \in S^n(X, A, Z_2)$. 而 $\delta\{c\} = \{\delta d\}$. 设 $d' = d \cup_{n-i} \delta d + d \cup_{n-i-1} d$, 则 $i^\# d' = i^\# d \cup_{n-i} i^\# \delta d + i^\# d \cup_{n-i-1} i^\# d = c \cup_{n-i-1} c \pmod 2$, 因此

$$\begin{aligned} \delta Sq^i\{c\} &= \delta\{c \cup_{n-i-1} c\} = \{\delta d'\} \\ &= \{\delta d \cup_{n-i} \delta d\} = Sq^i\{\delta d\} \\ &= Sq^i \delta\{c\} \pmod 2 \end{aligned}$$

下面证明 (b) 和 (g) 中特殊情形: $Sq^1 Sq^{2i} = Sq^{2i+1}$ 和 $Sq^1 Sq^{2i+1} = 0$.

设 $\beta: H^{n-1}(-, Z_2) \to H^n(-, Z_2)$ 为联系于 $0 \to Z_2 \xrightarrow{\alpha} Z_4 \xrightarrow{\gamma} Z_2 \to 0$ 的 Bockstein 运算, 令

$$S(j)=\begin{cases}1, & j\ 偶\\ 0, & j\ 奇\end{cases}$$

我们证明 $\beta Sq^j=S(j)Sq^{j+1}$, 由此加上 (a) 可得 (b) 和 (g). 设 $\{c\}\in H^{n-1}(X,A,Z_2)$, 因此有 $d\in S^{n-1}(X,A,Z_4)$ 使 $\gamma^{\#}(d)=c$, 从而 $\gamma^{\#}\delta d=\delta\gamma^{\#}(d)=\delta c=0$, 得出 $\delta d=\alpha^{\#}c'=2c'$, $c'\in S^n(X,A,Z_2)$, 而 $\beta\{c\}=\{c'\}$. 但是 $Sq^j\{c\}=\{c\cup_{n-j-1}c\}$, 其中 $\delta c=2b$, $b\in S^n(X,A,Z)$,

$$\begin{aligned}&\delta(c\cup_{n-j-1}c)=(-1)^{n-j-1}2b\cup_{n-j-1}c\\&+(-1)^{j-1}c\cup_{n-j-1}2b-(-1)^{n-j-1}c\cup_{n-j-2}c\\&-(-1)^{n-1}c\cup_{n-j-2}c\end{aligned}$$

因此 $\beta Sq^j\{c\}=\{b\cup_{n-j-1}c+c\cup_{n-j-1}b+S(j)c\cup_{n-j-2}c\}$. 而 $b\cup_{n-j-1}c+c\cup_{n-j-1}b=\delta(c\cup_{n-j}b)\ (\mathrm{mod}\ 2)$, 因此 $\beta Sq^j\{c\}=S(j)Sq^{j+1}\{c\}$.

下面证明 (a).

$H^*(RP^2,Z_2)\cong Z_2[x]/(x^3)$, 其中 x 为 $H^1(RP^2,Z_2)$ 的生成元. $\beta Sq^0 x=Sq^1x=x^2\neq 0$, 则 $Sq^0x\neq 0$, 而 x 为 $H^1(RP^2,Z_2)$ 唯一非零元, 因此 $Sq^0x=x$. 令 $f\colon S^1\to RP^2$ 为 RP^2 的一维胞腔的特征映射, 则 $f^*x=y_1$ 是 $H^1(S^1,Z_2)$ 的生成元, 从而有

$$Sq^0y_1=Sq^0f^*x=f^*Sq^0x=f^*x=y_1$$

由 (e) 可知 $\sigma\cdot Sq^n=Sq^n\cdot\sigma$, 其中 $\sigma\colon H^n(X)\to H^{n+1}(SX)$ 为双角锥同构, 因此若 y_n 为 $H^n(S^n,Z_2)$ 的生成元

$$Sq^0y_n=Sq^0\sigma^{n-1}y_1=\sigma^{n-1}Sq^0y_1=y_n$$

对任意 CW 复形 X, 由 Hopf 同构定理, $\psi\colon[X,S^n]\to H^n(X,Z)$, 当 $\dim X\leqslant n$ 为同构, 因此对任意 $x\in H^n(X,Z_2)$, 有 $x'\in H^n(X,Z)$ 使 $k_*(x')=x$(其中 k_* 由投射 $k\colon Z\to Z_2$ 导出), 而且存在映射 $h\colon X\to S^n$ 使 $h^*(y_n')=x'$, 其中 $k_*(y_n')=y_n$, y_n' 为 $H^n(S^n,Z)$ 的生成元. 因此

$$x=k_*x'=k_*h^*(y_n')=h^*k_*(y_n')=h^*(y_n)$$

$$Sq^0x=Sq^0h^*(y_n)=h^*Sq^0y_n=x$$

再由内射 $i\colon X^n\to X$ 导出单同态 $i^*\colon H^n(X)\to H^n(X^n)$, $Sq^0x=x$ 可推广到 $x\in H^n(X,Z_2)$, X 是无限维 CW 复形. 然后类似于定理 1.2.7 的证明, 结论可推广到任意拓扑空间 X.

下面证明 (f).

设 $\rho\colon S(X\times Y)\to S(X)\otimes S(Y)$ 为 Eilenberg -Zilber 链等价. $r\colon W\to W\otimes W$ 定义为

$$r(w_i)=\sum_{j+k=i}(-1)^{jk}w_j\otimes t^jw_k$$

并把它 R 线性扩张, 则合成

$$\begin{aligned}
&W\otimes S(X\times Y)\xrightarrow{r\otimes\rho}W\otimes W\otimes S(X)\otimes S(Y)\xrightarrow{1\otimes T\otimes 1}\\
&W\otimes S(X)\otimes W\otimes S(Y)\xrightarrow{\phi_X\otimes\phi_Y}S(X)\otimes S(X)\otimes S(Y)\otimes S(Y)\\
&\qquad\xrightarrow{1\otimes T\otimes 1}S(X)\otimes S(Y)\otimes S(X)\otimes S(Y)\\
&\qquad\xrightarrow{\sigma\otimes\sigma}S(X\times Y)\otimes S(X\times Y)
\end{aligned}$$

是一个导出对角同态 $H_0(X\times Y)\to H_0(X\times Y)\otimes H_0(X\times Y)$ 的链映射, 故可看作 $\phi_{X\times Y}$. 因为 $\sigma\rho\simeq 1$(E-Z 链等价), 因此对上循环 $c\in S^n(X,Z_2),d\in S^m(Y,Z_2)$ 和循环 $a\in S_n(X,Z_2),b\in S_m(Y,Z_2)$ 有 $c(\sigma\rho(a))=c(a)$, 而且

$$\begin{aligned}
&[Sq^i(c\times d)](a\times b)=[Sq^i\rho^*(c\otimes d)](\sigma(a\otimes b))\\
=&[\rho^*(c\otimes d)\otimes\rho^*(c\otimes d)]\phi_{X\times Y}(w_{n+m-i}\otimes\sigma(a\otimes b))\\
=&[c\otimes d\otimes c\otimes d](\rho\otimes\rho)(\sigma\otimes\sigma)(1\otimes T\otimes 1)\cdot\\
&\cdot(\phi_X\otimes\phi_Y)(1\otimes T\otimes 1)(r\otimes\rho)(w_{n+m-i}\otimes\sigma(a\otimes b))\\
=&[c\otimes d\otimes c\otimes d](1\otimes T\otimes 1)(\phi_X\otimes\phi_Y)(1\otimes T\otimes 1)\cdot\\
&\cdot(\sum_{j+k=n+m-i}w_j\otimes t^jw_k\otimes a\otimes b)\\
=&\sum_{j+k=n+m-i}(c\otimes c\otimes d\otimes d)(\phi_X\otimes\phi_Y)(w_j\otimes a\otimes t^jw_k\otimes b)\\
=&\sum_{j+k=n+m-i}[(c\otimes c)(\phi_X(w_j\otimes a))][(d\otimes d)(T^j\phi_Y(w_k\otimes b))]\\
=&\sum_{j+k=n+m-i}(Sq^{n-j}(c)(a))(Sq^{m-k}(d)(b))\\
=&\sum_{r+s=i}[Sq^rc\times Sq^sd](a\times b)\ (\text{mod }2)
\end{aligned}$$

因此对 $x,y\in H^*(X,A,Z_2)$ 有

$$Sq^i(x\times y)=\sum_{j+k=i}(Sq^jx)\times(Sq^ky)$$

再过渡到卡积即证明了 (f).

以上只对 Adem 关系 (g) 的特殊情况 $Sq^1Sq^{2j}=Sq^{2j+1}$ 和 $Sq^1Sq^{2j+1}=0$ 作了证明. (g) 一般情况的证明不再详述.

下面证明当 $x\in H^1(X,Z_2)$, Sq^ix^k 的简单表示, 这可应用到 $X=RP^\infty$ 的情况.

命题 1.3.9 若 $\dim x=1$, $Sq^ix^k=\binom{k}{i}x^{k+i}$.

证 当 $k=0$, 由 1.3.1(a), (d), 结论成立. 归纳假设对 $k-1$ 已成立, 则由 Cartan

公式

$$Sq^i x^k = Sq^i(x \cdot x^{k-1}) = Sq^0 x Sq^i x^{k-1} +$$
$$+ Sq^1 x Sq^{i-1} x^{k-1} = \left[\binom{k-1}{i} + \binom{k-1}{i-1}\right] x^{k+i} = \binom{k}{i} x^{k+i}$$

证毕.

引理 1.3.10 设 p 为素数, 而 $a = \sum_{i=0}^{m} a_i p^i$, $b = \sum_{i=0}^{m} b_i p^i$ 使 $0 \leqslant a_i, b_i < p$, 则

$$\binom{b}{a} = \prod_{i=0}^{m} \binom{b_i}{a_i} \pmod p$$

证 因为

$$\begin{aligned}\binom{p}{i} &= \frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{1 \cdot 2 \cdots i} \qquad (0 < i < p)\\ &\equiv 0 \pmod p\end{aligned}$$

因此 $(1+x)^p = 1 + x^p \pmod p$. 再由归纳法, 可得 $(1+x)^{p^i} = 1 + x^{p^i} \pmod p$, 因此

$$(1+x)^b = (1+x)^{\sum b_i p^i} = \prod_{i=0}^{m} (1+x)^{b_i p^i}$$
$$= \prod_{i=0}^{m} (1 + x^{p^i})^{b_i} = \prod_{i=0}^{m} \sum_{s=0}^{b_i} \binom{b_i}{s} x^{s p^i}$$

因为在 $(1+x)^b$ 的二项展开式中 $x^a = x^{\Sigma a_i p^i}$ 的系数为 $\binom{b}{a}$, 与上述式子比较, 即得出引理的结论. 证毕.

命题 1.3.11 若 $\dim u = 1$, 则

$$Sq^i(u^{2^k}) = \begin{cases} u^{2^k}, & 当\ i = 0 \\ 0, & 当\ i \neq 0, 2^k \\ u^{2^{k+1}}, & 当\ i = 2^k \end{cases}$$

证 由命题 1.3.9 和引理 1.3.10 得出. 证毕.

下面我们叙述定理 1.3.1 中的 Steenrod 运算 Sq^i 在 $p > 2$ 的推广, 即 Steenrod 循环缩减幂 $P^i \colon H^n(X, Z_p) \to H^{n+2i(p-1)}(X, Z_p)$ 的存在性.

定理 1.3.12 设 p 为奇素数,

$$\beta \colon H^n(X, Z_p) \to H^{n+1}(X, Z_p)$$

为联系于恰当序列 $0 \to Z_p \to Z_{p^2} \to Z_p \to 0$ 的 Bockstein 运算, 则存在稳定上同调

运算

$$P^i: H^n(X, Z_p) \to H^{n+2i(p-1)}(X, Z_p) \qquad (n \geqslant 0, i \geqslant 0)$$

满足:

(a) $P^0 = 1$.

(b) 若 $\dim x = 2i, P^i x = x^p$.

(c) 若 $\dim x < 2i, P^i x = 0$.

(d) Cartan 公式: $P^i(xy) = \sum_{j+k=i} (P^j x)(P^k y)$.

(e) Adem 关系: 若 $a < pb$, 则

$$P^a P^b = \sum_{t=0}^{[\frac{a}{p}]} (-1)^{a+t} \binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt} P^{a+b-t} P^t$$

若 $a \leqslant b$, 则

$$P^a \beta P^b = \sum_{t=0}^{[\frac{a}{p}]} (-1)^{a+t} \binom{(p-1)(b-t)}{a-pt} \beta P^{a+b-t} P^t + \sum_{t=0}^{[\frac{a-1}{p}]} (-1)^{a+t-1} \binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt-1} P^{a+b-t} \beta P^t$$

Cartan 公式和 $P^i(x \times y) = \sum_{j+k=i} (P^j x) \times (P^k y)$ 等价, 另外 P^i 是稳定上同调运算, 即 P^i 和

$$\sigma: H^n(X, Z_p) \to H^{n+1}(SX, Z_p)$$

或者和

$$\delta: H^{n-1}(A, Z_p) \to H^n(X, A, Z_p)$$

可交换.

证　$p > 2$ 情况下的 P^i 和 $p = 2$ 情况下的 Sq^i 构造的方法不完全相同. 但由于 P^i 的构造叙述起来较长, 因此下面只提出其构造的基本思路 (见文献 [7]).

设 p 为奇素数. S^∞ 为复欧式空间 C^∞ 中单位球, $\tau: S^\infty \to S^\infty$ 定义为 $\tau(z_0, z_1, z_2, \cdots) = (\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{p}} z_0, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{p}} z_1, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{p}} z_2, \cdots)$, 则 τ 生成一个 p 阶循环群 Π, 而 Π 作用在 S^∞ 上, 轨迹空间 $S^\infty/\Pi = L^\infty(p)$ 是透镜空间. L^∞ 在每个维数 k 恰有一个 k 维胞腔 w_k, 而 $H^k(L^\infty, Z_p) \cong Z_p$, 以 w_k 为生成元 (所有 $k \geqslant 0$). 循环缩减幂 P^i 的构造可归结为以下几个主要步骤:

(1) 设 K 为 CW 复形, 先从胞腔上链群开始, 可以作出一个对应 (一般的不是同态)

$$P: H^q(K,Z_p) \to H^{pq}(L^\infty \times K^p, Z_p)$$

使 j^*Pu 恰好是 p 重叉积 $u \times u \times \cdots \times u$, 其中 $u \in H^q(K,Z_p)$, $K^p = K \times \cdots \times K$, 而 $j: C_q(K^p) \to \sum\limits_{r+s=q} C_r(L^\infty) \otimes C_s(K^p)$ 是胞腔链群之间的链映射使 $j(x) = w_0 \otimes x$, 其中 w_0 为 L^∞ 的 0 维胞腔.

(2) 设 $d: K \to K^p$ 为对角映射, d 导出 $d^*: H^k(L^\infty \times K^p, Z_p) \to H^q(L^\infty \times K, Z_p)$, 且由 Künneth 公式, 存在对应 $D_k: H^q(K,Z_p) \to H^{pq-k}(K,Z_p)$ 使 $d^*pu = \sum\limits_k w_k \times D_k u$, 其中 $u \in H^q(K,Z_p)$, 而 $w_k \in H^k(L^\infty, Z_p)$.

(3) 可以证明 D_k 为同态, $D_0 u = u^p, D_k u = 0$(当 $k > (p-1)q$), $D_{(p-1)q} u = (-1)^{\frac{mq(q+1)}{2}}(m!)^q \cdot u$, 其中 $m = \frac{p-1}{2}$.

(4) 令 $P^i = (-1)^{i+\frac{mq(q+1)}{2}}(m!)^q D_{(q-2i)(p-1)}: H^q(K,Z_p) \to H^{q+2i(p-1)}(K, Z_p)$, 则本定理的 (a), (b), (c) 得证. 再证明 Cartan 公式 (d) 和 Adem 关系 (e).

1.4 上同调代数 $H^*(K(G,n),Z_2)$ 的决定

$H^*(K(G,n),Z_2)$ 是域 Z_2 上的向量空间, 在卡积下构成一个代数. 在 1.2 节已知 $H^r(K(G,n),Z_2)$ 和上同调运算 $O(n,r;G,Z_2)$ 有一一对应关系, 因此上同调代数 $H^*(K(G,n),Z_2)$ 的计算很重要. 本书将先从 $G = Z_2, Z, Z_m\,(m = 2^k)$ 开始, 然后过渡到一般有限生成 Abel 群 G 来决定 $H^*(K(G,n),Z_2)$ 的结构. 这方面的结果由 J.P.Serre [5](或 J.F.Adams [6]) 给出, 主要用到关于纤维化的 Borel 定理.

定义 1.4.1 设 A 为环 R 上的代数, 元 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \in A$ 叫做 A 的生成元简单系, 如果所有单项式 $x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_m^{\epsilon_m}(\epsilon_i = 0$ 或 1, $m \geqslant 0)$ 构成 A 的 R 基.

例 1.4.2 设 $R[x]$ 是以 x 为生成元的 R 上多项式代数, 则 $x, x^2, \cdots, x^{2^n}, \cdots$ 是 $R[x]$ 的生成元简单系, 外代数 $E[x_1, x_2, \cdots]$(即有 $x_i^2 = 0$) 中, $x_1, x_2, \cdots$ 是它的生成元简单系.

设 $p: E \to B$ 是纤维为 F 的纤维映射, 并且 E 是可缩空间, 则以下合成

$$\widetilde{H}^n(B;G) \cong H^n(B,b_0,G) \xrightarrow{p^*} H^n(E,F,G) \overset{\delta}{\cong} \widetilde{H}^{n-1}(F,G)$$

记为 $\sigma': \widetilde{H}^n(B,G) \to \widetilde{H}^{n-1}(F,G)$ 叫做上同调双角锥同态.

定理 1.4.3 (Borel) 设 $F \to E \xrightarrow{p} B$ 为纤维化使 E 为可缩空间, $b_1, b_2, \cdots \in H^*(B,R)$ 满足:

(1) 对每个 n, 只有有限个 $b_i \in H^n(B,R)$.

(2) $\sigma'(b_1), \sigma'(b_2), \cdots$ 是 $H^*(F,R)$ 的生成元简单系, 则

$H^*(B,R) \cong R[b_1, b_2, \cdots]$, 即以 $b_1, b_2, \cdots$ 为生成元的 R 上多项式代数.

我们省略这个定理的证明, 它主要运用 Serre 谱序列, 见文献 [9].

定义 1.4.4　设 $I=(r_1,r_2,\cdots,r_k)$ 为非负整数序列, 若 $r_k\geqslant 1, r_{i-1}\geqslant 2r_i$(当 $1\leqslant i\leqslant k$), 称 I 为可许序列. 令 $Sq^I=Sq^{r_1}Sq^{r_2}\cdots Sq^{r_k}$, Sq^I 叫可许单项式如果 I 是可许序列. 这时 $e(I)=(r_1-2r_2)+(r_2-2r_3)+\cdots+(r_{k-1}-2r_k)+r_k=r_1-r_2-\cdots-r_k$ 称为序列 I 的超过量(excess), 而 $d(I)=r_1+r_2+\cdots+r_k$ 叫做 I 的次数. 显然 $e(I)=2r_1-d(I)$. 若 $I=(r_1,r_2,\cdots,r_k), J=(t_1,t_2,\cdots,t_s)$, IJ 表示 $(r_1,\cdots,r_k,t_1,\cdots,t_s)$.

以下命题的证明留作习题.

命题 1.4.5　$e(IJ)=\begin{cases} e(I)-d(J), & 当\ I\neq 0 \\ e(J), & 当\ I=0 \end{cases}$

并且若 $x\in H^n(X,Z_2), e(I)>n$, 则 $Sq^Ix=0$.

定理 1.4.6　$H^*(K(Z_2,n),Z_2)$ 是以 Sq^Iu_n 为生成元的 Z_2 上多项式代数, 其中 I 取遍所有可许序列使 $e(I)<n$, $u_n\in H^n(K(Z_2,n),Z_2)$ 为唯一生成元, 称为基本上同调类.

证　当 $n=1$, $K(Z_2,1)=RP^\infty$, 因此 $H^*(K(Z_2,n),Z_2)=Z_2[u_1]$, 定理显然成立. 设定理对 n 已成立. 将 Sq^Iu_n 使 I 可许且 $e(I)<n$ 排序, 记为 $x_1,x_2,\cdots$. 设 $x_i\in H^{q_i}(K(Z_2,n),Z_2)$, 因此 $q_i=n+d(I)$, 其中 $x_i=Sq^Iu_n$. 引进可许序列

$$J(q,r)=\begin{cases} (2^{r-1}q,2^{r-2}q,\cdots,q), & 当\ r\geqslant 1 \\ 0, & 当\ r=0 \end{cases}$$

注意到

$$e(J(q,r))=\begin{cases} q, & 当\ r\geqslant 1 \\ 0, & 当\ r=0 \end{cases}$$

而 $d(J(q,r))=q(2^r-1)$. 因为 $H^*(K(Z_2,n),Z_2)$ 是以 $x_1,x_2,\cdots$ 为母元的多项式代数, 因此 $\{x_i^{2^r}\,|\,i\geqslant 1,r\geqslant 0\}$ 为它的生成元简单系, 但

$$Sq^{J(q_i,r)}x_i=Sq^{J(q_i,r)I}u_n$$

而且 Sq^i 与 σ' 可换, $\sigma'(u_{n+1})=u_n$, 因此

$$\sigma'(Sq^{J(q_i,r)I}u_{n+1})=Sq^{J(q_i,r)I}\sigma'(u_{n+1})=Sq^{J(q_i,r)I}u_n=x_i^{2^r}$$

对纤维化 $K(Z_2,n)\simeq\Omega K(Z_2,n+1)\to PK(Z_2,n+1)\xrightarrow{p}K(Z_2,n+1)$ 运用 Borel 定理, 得到 $H^*(K(Z_2,n+1),Z_2)$ 是以

$$Sq^{J(n+d(I),r)I}u_{n+1}$$

为母元的多项式代数, 其中 I 取遍可许序列使 $e(I)<n$. 因为在 $J(n+d(I),r)$ 和 I 的连接处, $n+d(I)\geqslant 2i_1$(这是因为 $n>e(I)=2i_1-d(I)$), 因此 $J(n+d(I),r)I$ 可

许. 下面只要证明对任意可许序列 I 使 $e(I)=n$, I 可写为

$$I = J(n+d(I'),r)I'$$

其中 I' 可许使 $e(I')<n$ 而 $r>0$.

设已给 I 使 $l(I)=n$, r 是第一个使 $i_r > 2i_{r+1}$, 则 $I=J(i_r,r)I'$, 其中 $I'=(i_{r+1},\cdots,i_k)$, 显然 $r\geqslant 1$, 因此

$$\begin{aligned} n = e(I) &= e(J(i_r,r)) - d(I') \\ &= i_r - d(I') > 2i_{r+1} - d(I') = e(I') \end{aligned}$$

而 $i_r = n+d(I')$. 证毕.

例 1.4.7 $H^*(K(Z_2,1),Z_2) = Z_2[u_1]$, $H^*(K(Z_2,2),Z_2) = Z_2[u_2, Sq^1u_2,\cdots, Sq^{2^k}Sq^{2^{k-1}}\cdots Sq^1u_2,\cdots]$, $H^*(K(Z_2,3),Z_2)$ 是以下为生成元

$$\begin{array}{lllll} u_3, & Sq^2u_3, & \cdots, & Sq^{2^r}Sq^{2^{r-1}},\cdots Sq^2u_3, & \cdots \\ Sq^1u_3, & Sq^3Sq^1u_3, & \cdots, & Sq^{3\cdot 2^r}Sq^{3\cdot 2^{r-1}},\cdots,Sq^3Sq^1u_3, & \cdots \end{array}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Sq^{2^{k-1}}, Sq^{2^{k-2}},\cdots,Sq^2Sq^1u_3,\cdots,$$
$$Sq^{(2^k+1)2^r},\cdots,Sq^{2^k+1}Sq^{2^{k-1}},\cdots,Sq^2Sq^1u_3,\cdots$$

的多项式代数.

定理 1.4.8 当 $n\geqslant 2$, $H^*(K(Z,n),Z_2)$ 是以 Sq^Iu_n 为生成元的多项式代数, 其中 I 取遍所有可许序列 $I=(i_1,\cdots,i_r)$ 使 $e(I)<n$ 且 $i_r>1$. $u_n\in H^n((K(Z,n),Z_2)$ 为基本类.

证 $K(Z,2)=CP^\infty$, 因此 $H^*(K(Z,2),Z_2)=Z_2[u_2]$, 而 $I=(i_1,\cdots,i_r)$ 使 $e(I)<2$ 和 $i_r>1$ 只能是 $I=0$, 定理成立. 以下的归纳法和 1.4.7 中完全类似. 证毕.

设 $m=2^h, h\geqslant 2$, 联系于恰当序列 $0\to Z_2\to Z_{2^{h+1}}\to Z_{2^h}\to 0$ 的 Bockstein 运算 β_h: $H^n(K(Z_m,n),Z_m)\to H^{n+1}(K(Z_m,n),Z_2)$, 令 $v_{n+1}=\beta_h(u_n')$, 其中 $u_n'\in H^n(K(Z_m,n),Z_m)$ 为基本上同调类. 设 $u_n\in H^n(K(Z_m,n),Z_2)$ 为唯一生成元, 记 $v_{n+1}=Sq_h'(u_n)$, 并令

$$Sq_h^I(u_n) = \begin{cases} Sq^Iu_n, & \text{当 } i_r>1 \\ Sq^{i_1}Sq^{i_2}\cdots Sq^{i_{r-1}}Sq_h'u_n, & \text{当 } i_r=1 \end{cases}$$

其中 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_r)$.

定理 1.4.9　当 $n \geqslant 2$, $H^*(K(Z_m, n), Z_2)\,(m = 2^h, h \geqslant 2)$ 是以 $Sq_h^I u_n$ 为生成元的多项式代数, 其中 I 取遍所有可许序列使 $e(I) < n$.

证　设 S^∞ 为复欧式空间 C^∞ 中单位球, 令 $\tau: S^\infty \to S^\infty$ 为 $\tau(z_0, z_1, \cdots) = (\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{m}} z_0, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{m}} z_1, \cdots)$, 因此群 Z_m 作用于 S^∞, 令 $L^\infty(m) = S^\infty / Z_m$ 为无穷维透镜空间. 由投射 $S^\infty \to L^\infty(m)$ 为泛覆盖映射, 容易证明 $L^\infty(m) = K(Z_m, 1)$. 由 G.W.Whitehead [8], $H^* K(Z_m, 1), Z_2) \cong E[u_1] \otimes Z_2[v_2]$, 即 u_1 生成的外代数和 v_2 生成的 Z_2 上多项式代数的张量积, 其中 $u_1 \in H^1(K(Z_m, 1), Z_2)$ 为唯一生成元. 而 $v_2 = \beta_h(u_1') = Sq_h'(u_1) \in H^2(K(Z_m, 1), Z_2)$, 因此 $H^*(K(Z_m, 1), Z_2)$ 有以下生成元的简单系:

$$u_1, v_2, v_2^2, \cdots, v_2^{2^k}, \cdots$$

但是, 这等于

$$u_1, v_2 = Sq_h'(u_1), Sq^2 Sq_h'(u_1), \cdots, Sq^{2^k} \cdots Sq^2 Sq_h'(u_1), \cdots$$

因此由 Borel 定理应用到道路纤维化 $K(Z_m, 1) \to PK(Z_m, 2) \to K(Z_m, 2)$, 注意到 σ' 和 Sq_h' 可换, 可知 $H^*(K(Z_m, 2), Z_2)$ 是以

$$u_2, Sq_h'(u_2), Sq^2 Sq_h'(u_2), \cdots, Sq^{2^k} \cdots Sq^2 Sq_h'(u_2), \cdots$$

为生成元的多项式代数, 因此定理对 $n = 2$ 成立. 以下的归纳法完全和定理 1.4.7 中的类似. 证毕.

由文献 [8] 定理 7.7 可知无穷维透镜空间 $L^\infty(m)$ 的整同调群为

$$H_0(L^\infty(m)) = Z, \qquad H_{2q}(L^\infty(m)) = 0 \qquad (q > 0)$$

$$H_{2q+1}(L^\infty(m)) = Z_m \qquad (q > 0)$$

因此当 $m = p^h\,(h \geqslant 1)$, p 为奇素数, 应用泛系数定理可知 $H^q(K(Z_m, 1), Z_2) = 0\,(q > 0)$. 因此用归纳法和 Borel 定理, 可得如下定理.

定理 1.4.10　设 $m = p^h\,(h \geqslant 1)$, 则 $H^q(K(Z_m, n), Z_2) = 0\,(q > 0)$.

以上我们已经确定 $H^*(K(G, n), Z_2)$ 的构造, 当 $G = Z_2, Z, Z_m\,(m = p^h, p \geqslant 2)$, 而对任一有限生成 Abel 群 G 是这些群 Z, Z_m 的直和. 因此如果我们能够证明以下定理, 则对任一有限生成群 G, $H^*(K(G, n), Z_2)$ 的构造就完全清楚.

定理 1.4.11　设 G', G'' 为 Abel 群, 则

$$H^*(K(G' \oplus G'', n)) \cong H^*(K(G', n)) \otimes H^*(K(G'', n))$$

其中上述上同调群的系数群是 Z_2.

证　这只要由 $K(G', n) \times K(G'', n) = K(G' \oplus G'', n)$ 及运用 Künneth 公式便可证明. 证毕.

定理 1.4.12　$H^{n+1}(K(G, n), G') \cong \mathrm{Ext}\,(G, G')$ 其中 $\mathrm{Ext}(G, G')$ 是扩充 $0 \to G' \to H \to G \to 0$(或短恰当序列) 的等价类的集合.

证 只证明 $G = G' = Z_2$ 的特殊情况, 而省略一般情况的证明. 对 $[\alpha] \in \text{Ext}\,(Z_2, Z_2)$, 它的代表 α 为

$$\alpha: 0 \to G' \to H \to G \to 0$$

设 β 是联系于 α 的 Bockstein 同态

$$\beta: H^n(K(Z_2,n),G) \to H^{n+1}(K(Z_2,n),G')$$

令 ϕ: $\text{Ext}\,(Z_2,Z_2) \to H^{n+1}(K(Z_2,n),G')$ 为 $\phi[\alpha] = \beta(u_n)$, 其中 $u_n \in H^n(K(Z_2,n),G)$ 为基本类. 若 $\alpha \sim \alpha'$ 为 $[\alpha]$ 的两个代表, 则有可换图形

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha: 0 \to & G' \to & H \to & G \to 0 \\ & \| & \downarrow & \| \\ \alpha': 0 \to & G' \to & H' \to & G \to 0 \end{array}$$

显然联系于 α 和 α' 的 Bockstein 同态相等, 因此 ϕ 是唯一定义的.

当 $G = G' = Z_2$, $\text{Ext}\,(Z_2,Z_2)$ 的非零元 $[\alpha]$ 只有

$$\alpha: 0 \to Z_2 \to Z_4 \to Z_2 \to 0$$

因此 $\phi[\alpha] = \beta(u_n) = Sq^1 u_n \neq 0$, 从而 ϕ 是单的, 而且是满的. 证毕.

1.5 一些类型上同调运算生成元的决定

本节中, 将利用 1.2~1.4 节的结果来确定一些类型的上同调运算的生成元. 我们主要考虑 $(q,r;G,G')$ 型的一个变量的上同调运算的各种特殊情形.

定理 1.5.1 (1)$O(0,r;G,G')$ 中所有运算和 G 到 G' 的所有函数一一对应.

(2) 当 $r>0$, $O(0,r;G,G')=0$, 即只有恒等于零的单个运算.

(3) 当 $q>0$, $O(q,0;G,G') \cong G'$, 即每个运算都是单值.

(4) 当 $r>0$, $T \in O(q,r;G,G')$, 则 $T(0)=0$.

(5) 当 $q>r>0$, $O(q,r;G,G')=0$.

(6) 当 $q=r>0$, $O(q,q;G,G') \cong \text{Hom}(G,G')$, 即所有运算都由同态 $G \to G'$ 所导出.

(7) 若 $r>q=1$, $G=Z$, $O(1,r;Z,G')=0$.

证 设 $Y = K(G,q)$, 我们主要用定理 1.2.6 和定理 1.2.7.

(1) 因为 $K(G,0)=G$, 具有离散拓扑, 因此 $H^0(K(G,0),\,G') \cong G' \oplus G' \oplus \cdots$, 其加项的个数和 G 的元素一一对应.

(2) $H^r(K(G,0),G')=0\,(当\ r>0)$.

(3) 这时 Y 连通, $H^0(Y,G') \cong G'$.

(4) 由定理 1.2.6, $0 \in H^q(X,G)$ 和常值映射 $f: X \to Y$ 相对应, 因此 $T(0) = Tf^*u_0 = f^*Tu_0 = 0$, 这是因为 f^* 将 $H^r(Y,G')$ 映成 0.

(5) 因为 $\pi_i(Y) = 0 (i < q)$, 由 Hurewicz 定理, $H_i(Y) = 0 (i < q)$, 因此 $H^r(Y,G') = 0$.

(6) 由 Hurewicz 定理, $G = \pi_q(Y) \cong H_q(Y)$, 因此 $\mathrm{Hom}(H_q(Y),G')$ 可看作 $\mathrm{Hom}(G,G')$. 由泛系数定理, 自然同态

$$H^q(Y,G') \to \mathrm{Hom}(H_q(Y),G') = \mathrm{Hom}(G,G')$$

同构, 因为 $H_{q-1}(Y) = 0$. 因此任意 $w \in H^q(Y,G')$ 可看作同态 $\eta: G \to G'$, 而基本类 u_0 对应于 $1: G \to G$, 因此与 η 的合成有 $\eta_* u_0 = w$.

(7) 因为 $K(Z,1) = S^1$, $H^r(K(Z,1),G') = 0$, 当 $r > 1$. 证毕.

定理 1.5.2　设 $q = 2, G = Z$. 若 r 是奇数, 则 $O(2,r;Z,G') = 0$. 若 $r = 2m > 0$, 每个 $T \in O(2,r;Z,G')$ 是一个 m 次幂与系数同态 $Z \to G$ 的导出同态的合成.

证　这时 $Y = K(Z,2) = CP^\infty$. $H^*(Y)$ 是基本上同调类 $u_0 \in H^2(Y)$ 为母元的多项式代数, 因此当 r 是奇数 $H^r(Y,G') = 0$. 而 $H^{2m}(Y,G') \cong \mathrm{Hom}(H_{2m}(Y),G')$, u_0^m 是 $H^{2m}(Y,Z)$ 的生成元, 在同构 $H^{2m}(Y,Z) \cong \mathrm{Hom}(H_{2m}(Y),Z)$ 中它对应于一个同构 $H_{2m}(Y) \cong Z$, 因此 $\mathrm{Hom}(H_{2m}(Y),G')$ 的任一元可分解为这个同构和系数同态 $Z \to G'$ 的合成. 证毕.

定理 1.5.3　设 $q = 1, r > 0, G = Z_2$, 则每个 $T \in O(1,Z_2;r,G')$ 是由卡积, Bockstein 上边缘运算和系数同态所生成.

证　这时 $Y = K(Z_2,1) = RP^\infty$. $H^*(Y,Z_2$ 是基本上同调类 $u_0 \in H^1(Y,Z_2)$ 为母元的多项式代数. 下面只要证明 u_0 通过卡积, Bockstein 运算 β 和系数同态 η_* 生成 $H^r(Y,G')$ 的任意一个元素 w.

RP^∞ 有胞腔分解使每个维数恰有一个胞腔 e_i, 而边缘关系为 $\partial e_{2i} = 2e_{2i-1}$, $\partial e_{2i-1} = 0$. 因此 $H^r(Y,G')$ 的任一元 $\{w\}$, 当 r 为奇数. 因为 w 是上循环, 则 $\delta w \cdot e_{r+1} = w \cdot \partial e_{r+1} = 2w \cdot e_r$, 因此 $2w \cdot e_r = 0$. 因为 $u_0^r \cdot e_r = 1 \pmod 2$, 因此 $\eta_* u_0^r = w$, 其中 $\eta: Z_2 \to G'$ 为同态定义为 $\eta(1) = w \cdot e_r$.

若 $r = 2m$, β 为相应于 $0 \to Z \xrightarrow{2} Z \to Z_2 \to 0$ 的 Bockstein 运算. 由 $\partial e_{2m} = 2e_{2m-1}, u_0^{2m-1} \cdot e_{2m-1} = 1 \pmod 2$ 蕴涵 $(\beta u_0^{2m-1}) \cdot e_{2m} = 1$(因为 $\delta u_0^{2m-1} \cdot e_{2m} = u_0^{2m-1} \cdot \partial e_{2m} = 2u_0^{2m-1} \cdot e_{2m-1} = 2$, 因此 $\beta u_0^{2m-1} \cdot e_{2m} = 1$), 因此 $\eta_* \beta u_0^{2m-1} = w$, 其中 $\eta: Z \to G'$ 为同态使 $\eta(1) = w \cdot e_{2m}$. 证毕.

以上定理可以推广到 $G = Z_k (k > 0$ 为整数). 这只要用到 $K(Z_k,1)$ 是无穷维透镜空间 $L^\infty(k)$.

定理 1.5.4　设 $q > 0, r = q+1$, 每个 $T \in O(q,G;q+1,G')$ 是相应于 $0 \to G' \to G'' \to G \to 0$ 的 Bockstein 运算.

证 在定理 1.4.13 中有同构

$$\phi: H^{q+1}(K(G,q),G') \cong \text{Ext }(G,G')$$

(因这时 G,G' 都是 Abel 群). 因此对 $w \in H^q(K(G,q+1),G')$ 对应 $\phi(w) \in \text{Ext}(G,G')$ 即 $\phi(w)$ 是一个扩充:

$$\phi(w): 0 \to G' \to G'' \to G \to 0$$

而 $\beta(u_0) = w$, 其中 $u_0 \in H^q(K(G,q),G)$ 为基本上同调类, β 是相应于扩充 $\phi(w)$ 的 Bockstein 运算. 证毕.

定理 1.5.5 若 $q>0, r>0$, G 是有限生成的, $G' = Z_2$, 则 $O(q,r;G,Z_2)$ 的每个元是由加法, Bockstein 运算及 Steenrod 平方运算 Sq^i 所生成.

证 由 G 是有限生成的, 则 G 可分解为若干个 Z, Z_2, Z_{2^h} $(h>1)$ 和 $Z_{p^h}(h \geqslant 1)$ 的直和. 因此 $H^*(K(G,q),Z_2)$ 同构于若干个 $H^*(K(Z,q),Z_2), H^*(K(Z_2,q),Z_2)$ 和 $H^*(K(Z_{2^h},q),Z_2)$ 的张量积, 由 1.4 节, 这些都是多项式代数, 而这个同构对应是卡积, 并且注意到 $H^*(K(Z_{2^h},q),Z_2)$ 的生成元中 $Sq_h^{\prime}u_r$ 是 Bockstein 运算 (见定理 1.4.9). 证毕.

推论 1.5.6 若 $q>0, r>0, G=G'=Z_2$, 则 $O(q,r;Z_2,Z_2)$ 的每个元都是由 Steenrod 平方运算所生成. 这实际上是第 2 章中讲到的 mod 2 Steenrod 代数.

定理 1.5.7 若 $q>0, r>0$, G 是有限生成的, 则 $O(q,G;r,Z_p)$ 的每个元是由加法、卡积、Bockstein 运算和 Steenrod 循环缩减幂 P^i 所生成 (p 为奇素数).

参 考 文 献

[1] Thomas E. 1956. A Generalization of the Pontrjagin square cohomology operations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **42**, 266～269. See also Memoirs of A.M.S. No. 27

[2] Steenrod N E. 1958. Cohomology operations. Symp. Inter. de Topologia Algebraica Univ. Nac. Autonoma de Mexico

[3] Maunder, Algebraic Topology. 1980. Camb. Univ. Press

[4] Giever J B. 1950. On the equivalence of two homology theory.Ann. of Math. 51, 499～513

[5] Serre J P. 1953. Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-Maclane. Comm. Math Helv. **27**, 198～232

[6] Adams J F. 1972. Algebraic Topology–A student guide. Camb. Univ. Press

[7] Steenrod N E. 1962. Cohomology operations, Written and Revised by D. B. A. Epstein. Princeton Univ. Press

[8] Whitehead G W. Elements of Homotopy Theory. Springer-Verlag

[9] Switzer R M. 1978. Algebraic Topology–Homotopy and Homology. Springer-Verlag

第2章　Steenrod 代数

2.1　Steenrod 代数的 Cartan 基

设 R 为交换环, $M=\{M_i\}_{i\geqslant 0}$ 是一系列 R 模, 则 M 称为分次 R 模. 我们称 M_i 的元有次数或维数 i. 例如, 拓扑空间 X 的同调群 $H_*(X,R)=\{H_i(X,R)\}_{i\geqslant 0}$, 上同调群 $H^*(X,R)=\{H^i(X,R)\}_{i\geqslant 0}$ 都是分次 R 模. 分次 R 模 M,N 之间的同态 $f\colon M\to N$ 是指的一系列同态 $f_i\colon M_i\to N_i\,(i\geqslant 0)$. 分次 R 模 $M\otimes N$ 定义为 $(M\otimes N)_n=\bigoplus\limits_{i=0}^{n}M_i\otimes N_{n-i}$.

定义 2.1.1　分次 R 模 A 叫做 R 分次代数, 若存在具有单位元 1(显然是次数 0 的元 $1\in A_0$) 的乘法 $\phi\colon A\otimes A\to A$. 如果以下图形可换, 这个代数叫做可结合的.

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A\otimes A & \xrightarrow{\phi\otimes 1} & A\otimes A \\ \Big\downarrow 1\otimes\phi & & \Big\downarrow\phi \\ A\otimes A & \xrightarrow{\phi} & A \end{array}$$

若 B 也是 R 分次代数, $T\colon A\otimes B\to B\otimes A$ 定义为 $T(a\otimes b)=(-1)^{|a|\cdot|b|}b\otimes a$, 其中 $|a|$ 表示 a 的次数, 若以下图形可换, 我们称 R 分次代数 A 是可换的.

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A & \xrightarrow{T} & A\otimes A \\ \phi\searrow & & \swarrow\phi \\ & A & \end{array}$$

定义 2.1.2　R 分次代数同态$f\colon A\to B$ 是分次 R 模的同态使与乘法可交换, 即 $f\phi_A=\phi_B(f\otimes f)$ 并且 $f(1)=1$.

定义 2.1.3　R 分次代数 A 叫做可增广的, 如果存在代数同态 $\epsilon\colon A\to R$, 其中 R 表示一个 R 分次代数, 其正次数的元都是零, 而零次数所有元与 R 同构.

有了以上关于分次代数的一般概念, 现在可以定义 mod 2 Steenrod 代数 $A_{[2]}$ 和 mod p Steenrod 代数 $A_{[p]}$. $A_{[2]}$ 实际上是由 Sq^i 生成的 Z_2 分次代数使之满足 Adem 关系.

定义 2.1.4　设 $M=\{M_i\}_{i\geqslant 0}$ 为分次 Z_2 模, 使 $M_i\cong Z_2$, 它的生成元为 Sq^i. $M^n=M\otimes\cdots\otimes M$, 而 $\Gamma(M)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}M^n$. mod 2 Steenrod 代数 $A_{[2]}$ 是 $\Gamma(M)$ 对于所有以下形式关系的商:

$$Sq^r \otimes Sq^s - \sum_{j=0}^{[\frac{r}{2}]} \binom{s-1-j}{r-2j} Sq^{r+s-j} \otimes Sq^j, \qquad \text{当 } r < 2s$$

我们记 $Sq^0 = 1$.

定义 2.1.5 设 $p > 2$ 为奇素数, $M = \{M_j\}_{j \geqslant 0}$ 为分次 Z_p 模使 $M_j \cong Z_p$, 当 $j = 1$ 或 $2i(p-1), i \geqslant 0$, 而其他 $M_j = 0$. 当 $j = 1$, 它的生成元为 Bockstein 运算β, 当 $j = 2i(p-1)$, 它的生成元为循环缩减幂$P^i (i \geqslant 0)$. 令 $M^n = M \otimes \cdots \otimes M$, $\Gamma(M) = \sum_{n=0}^{\infty} M^n$. mod p Steenrod 代数$A_{[p]}$ 是 $\Gamma(M)$ 对所有以下形式关系的商:

$$\text{当 } r < ps,\ P^r \otimes P^s = \sum_{t=0}^{[\frac{r}{p}]} (-1)^{r+t} \tbinom{(p-1)(s-t)-1}{r-pt} P^{r+s-t} \otimes P^t$$

$$\begin{aligned}\text{当 } r \leqslant s, P^r \otimes \beta \otimes P^s \\ &= \sum_{t=0}^{[\frac{r}{p}]} (-1)^{r+t} \tbinom{(p-1)(s-t)}{r-pt} \beta \otimes P^{r+s-t} \otimes P^t \\ &\quad + \sum_{t=0}^{[\frac{r-1}{p}]} (-1)^{r+t-1} \tbinom{(p-1)(s-t)-1}{r-pt-1} P^{r+s-t} \otimes \beta \otimes P^t\end{aligned}$$

我们记 $P^0 = 1$.

当 $p = 2$ 时, $A_{[2]}$ 中的 Bockstein 运算 $\beta = Sq^1$, 但 $p > 2$ 时, $A_{[p]}$ 中 Bockstein 运算 β 与 P^1 并不相同, 因此 $A_{[2]}$ 与 $A_{[p]}$ 有不同的构造, 需要分别处理. 下面讨论 $A_{[p]}$ 的 Cartan 基时, 只叙述 $p = 2$ 的情况, 将 $p > 2$ 的情况留给读者 (可参见文献 [1] 77 ~ 80 页).

定义 2.1.6 当 $p > 2$, 序列 $I = (\epsilon_0, s_1, \epsilon_1, s_2, \cdots, s_k, \epsilon_k, 0, 0, \cdots)$ 叫做可许的, 若 $s_i \geqslant ps_{i+1} + \epsilon_i\ (i \geqslant 1)$, 其中 s_i 为非负整数, $\epsilon_i = 0$ 或 1. 单项式

$$P^I = \beta^{\epsilon_0} P^{s_1} \beta^{\epsilon_1} P^{s_2} \cdots P^{s_k} \beta^{\epsilon_k}$$

叫做可许单项式, 若 I 是可许序列. I 的次数就是 P^I 的次数, 记为 $d(I) = \sum \epsilon_i + \sum 2s_i(p-1)$.

定义 2.1.7 当 $p = 2$, 非负整数序列 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 叫做可许的, 若 $i_{s-1} \geqslant 2i_s\ (k \geqslant s \geqslant 2)$, 而 $i_k \geqslant 1$. 单项式

$$Sq^I = Sq^{i_1} Sq^{i_2} \cdots Sq^{i_k}$$

叫做可许单项式, 若 I 是可许序列. k 叫做 I 的长度, 记为 $l(I)$. $m(I) = \sum_{s=1}^{k} s i_s$ 叫 I 的矩(moment). $d(I) = \sum_{s=1}^{k} i_s$ 叫做 I 的次数, 实际上就是 Sq^I 的次数, Sq^0 也叫做可许序列.

定理 2.1.8　对 $p \geqslant 2$, 所有可许单项式是 $A_{[p]}$ 的 Z_p(向量空间) 基.

证　只对 $p=2$ 的情况证明. 首先证明任一非可许单项式是具有更小矩的可许单项式的线性组合. 设 $I=(i_1,\cdots,i_k)$ 不可许, 则有 r 使 $n=i_r<2i_{r+1}=2m$. 由 Adem 关系

$$Sq^I = Sq^N Sq^n Sq^m Sq^M = \sum_j \lambda_j Sq^N Sq^{n+m-j} Sq^j Sq^M$$

其中 $\lambda_j \in Z_2$. 容易证明, 右边各单项式的矩比 Sq^I 小 (对 $j=0$ 和 $j>0$ 分别说明). 对矩作归纳法, 则每个单项式是可许单项式的线性组合.

还需要证明所有可许单项式是线性无关的. 已经知道, 实无穷维射影空间 RP^∞ 的 Z_2 上同调群 $H^*(RP^\infty)$ 是多项式环 $Z_2[u]$, 其中 $u \in H^1(RP^\infty)$. 用 P^n 表示 n 次笛卡尔积 $RP^\infty \times \cdots \times RP^\infty$, 则叉积 $w=u\times u\times\cdots\times u \in H^n(P^n)$. 以下命题的证明将使定理 2.1.8 得证.

命题 2.1.9　$\theta: A_{[2]} \to H^*(P^n)$ 使 $\theta(Sq^I)=Sq^I w$ 将 $A_{[2]}$ 所有次数 $\leqslant n$ 的可许单项式变成 $H^*(P^n)$ 中线性无关元素.

证　对 n 作归纳. 当 $n=1$ 时显然成立. 今设 $\sum \lambda_I Sq^I w=0$, 其中和式取遍所有固定次数 q 的可许单项式 $(q\leqslant n)$. 我们要证明 $\lambda_I=0$ 对所有 I. 对 I 的长度 $l(I)$ 作如下的归纳. 设对 $l(I)>m$ 已有 $\lambda_I=0$, 因此上式变成

(2.1.10)
$$\sum_{l(I)=m} \lambda_I Sq^I w + \sum_{l(I)<m} \lambda_I Sq^I w = 0$$

由 Künneth 公式

$$H^{q+n}(P^n) \cong \sum_s H^s(P) \otimes H^{q+n-s}(P^{n-1})$$

令 g 为到 $s=2^m$ 的直加项中的投射, 并且令 $w=u\times w'$ 其中 $w' \in H^{n-1}(P^{n-1})$. 因此由 Cartan 公式

$$Sq^I w = Sq^I(u\times w') = \sum_{J\leqslant I} Sq^J u \times Sq^{I-J} w'$$

其中 $J\leqslant I$ 意味着 $0\leqslant j_r\leqslant i_r$ 对所有 r. 设 $J_m=(2^{m-1},\cdots,2^1,2^0)$. 由命题 1.3.11, 当 J 不是形如 $(2^k,2^{k-1},\cdots,2^1,2^0)$ 或者中间可以插入 0, 则 $Sq^J u=0$. 而当 $J=J_m$(或者中间插入一些 0), 则 $Sq^J u=u^{2^m}$. 当 $l(I)<m$, 则 $J\leqslant I$ 蕴涵 $l(J)<m$, 从而 $gSq^I w=0$. 当 $l(I)=m, g(Sq^J u\times Sq^{I-J}w')=0$ 除非 $J=J_m\leqslant I$, 因此有

(2.1.11)
$$gSq^I w = \begin{cases} 0, & \text{当 } l(I)<m \\ u^{2^m}\times Sq^{I-J_m} w', & \text{当 } l(I)=m \end{cases}$$

将 g 应用到 (2.1) 式, 并利用 (2.2) 式, 可得

$$u^{2^m} \times \sum_{l(I)=m} \lambda_I Sq^{I-J_m} w' = 0$$

因为 I 取遍长为 m, 次数为 q 的所有可许序列, 因此 $I - J_m$ 将取遍长 $\leqslant m$ 而次数为 $q-2^m+1$ 的所有可许序列而且对应是一对一的. 由于 $m \geqslant 1, q-2^m+1 \leqslant n-1$, 因此由对 n 的归纳假设, 所有系数 $\lambda_I = 0$, 当 $l(I) = m$.

这全部证明了命题 2.1.9, 从而证明了定理 2.1.8.

所有可许单项式形成 A 的 Z_p 基叫做 A 的可许基或 Cartan 基.

推论 2.1.10 由 $Sq^I \to Sq^I w$ 给出的对应 $\theta: A_{[2]} \to H^*(P^n)$ 在次数 $\leqslant n$ 是单射的.

设 $I(A)$ 表示 A 的所有正次数的元所组成的理想, 即 $I(A) = \{A_i\}_{i>0}$. $I(A) \otimes I(A)$ 在乘法 $\phi: A \otimes A \to A$ 下的像叫做 A 的可分解元的集合. 这个像 $\phi(I(A) \otimes I(A))$ 是 A 中双侧理想. $Q(A) = I(A)/\phi(I(A) \otimes I(A))$ 叫做 A 的不可分解元的集合.

引理 2.1.11 A 的任何生成元集 B 包含子集 B_1, 使 B_1 在 $Q(A)$ 中的像是 $Q(A)$ 的 Z_p 基. 任何这种 B_1 生成 A 且 B_1 是 A 最小生成元集.

证 因为 A 的任一生成元集 B 都生成 $Q(A)$, 因此有子集 B_1 在 $Q(A)$ 中的像形成 Z_p 基. 如果 B_1 不生成 A, 令 A' 为 $\{1, B_1\}$ 生成的 A 的子代数, 则有次数最小的 $a \in A$ 使 $a \notin A'$. 存在 $a' \in A'$ 使 $a - a'$ 可分解, 即 $a - a' = \sum a'_i a''_i$, 其中 $a'_i, a''_i \in I(A)$, $a'_i, a''_i \in A'$, 从而 $a \in A'$, 矛盾.

定理 2.1.12 (a) 当 $p = 2$, Sq^i 可分解当且仅当 $i \neq 2^k$.

(b) 当 $p > 2$, P^i 可分解当且仅当 $i \neq p^k$.

证 (a) 将 Adem 关系改为

$$\binom{b-1}{a} Sq^{a+b} = Sq^a Sq^b + \sum_{j>0}^{[a/2]} \binom{b-1-j}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j$$

其中 $0 < a < 2b$. 因此当 $\binom{b-1}{a} \equiv 1 \pmod 2$, Sq^{a+b} 是可分解元. 今设 i 不是 2 的幂, 则 $i = a + 2^k$ $(0 < a < 2^k)$. 置 $b = 2^k$, 则 $b - 1 = 1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}$, 从而

$$\binom{b-1}{a} \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ 2)$$

这是因为当 $r = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i p^i, s = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i p^i$ 有 $\binom{s}{r} = \binom{b_0}{a_0} \cdots \binom{b_n}{a_n} \pmod p$. 因此 Sq^i 可分解.

若 $i = 2^k$ 而 $Sq^i = \sum\limits_{j=1}^{2^k-1} m_j Sq^j$, 则 $u^{2^{k+1}} = Sq^i u^{2^k} = \sum\limits_{j=1}^{2^k-1} m_j Sq^j u^{2^k} = 0$, 矛盾.

(b) 的证明留给读者. 证毕.

定理 2.1.13 (a) 当 $p = 2$, $\left\{Sq^{2^k}\right\}_{k \geqslant 0}$ 生成 $A_{[2]}$.

(b) 当 $p > 2$, $\left\{\beta, P^{p^k}\right\}_{k\geqslant 0}$ 生成 $A_{[p]}$.

证　由引理 2.1.11 和定理 2.1.12 容易得出.

2.2　Hopf 代数、A 的对偶代数 A^*

定理 2.2.1　(a) 生成元的对应

$$\psi(Sq^k) = \sum_{i=0}^{k} Sq^i \otimes Sq^{k-i}$$

可扩张为代数同态 $\psi: A_{[2]} \to A_{[2]} \otimes A_{[2]}$.

(b) 生成元的对应

$$\psi(\beta) = 1 \otimes \beta + \beta \otimes 1$$
$$\psi(P^k) = \sum_{i=0}^{k} P^i \otimes P^{k-i}$$

可扩张为代数同态 $\psi: A_{[p]} \to A_{[p]} \otimes A_{[p]}$.

证　(a) 设 $\underline{A}$ 为由 $\{Sq^i\}_{i>0}$ 生成的自由可结合代数, 我们有自然满同态 $\omega: \underline{A} \to A$ 使 $\ker \omega$ 由 Adem 关系生成. ψ 显然可以扩张为代数同态 $\underline{\psi}: \underline{A} \to A \otimes A$. 下面只要证明 $\underline{\psi}$ 在 $\ker\omega$ 上为 0.

设 $X = RP^\infty \times \cdots \times RP^\infty$($n$ 次乘积), 由推论 2.1.10 对应取值的映射 $\theta: A \to H^*(X)$ 在次数 $\leqslant n$ 为单射. 由系数是域的 Künneth 公式, A 模同态

$$\alpha: H^*(X) \otimes H^*(X) \to H^*(X \times X)$$

使 $\alpha(u \otimes v) = u \times v$ 是同构. 我们证明以下图形可换:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \xrightarrow{\theta\otimes\theta} & H^*(X) \otimes H^*(X) & \xrightarrow{\alpha} H^*(X \times X) \\ \uparrow \underline{\psi} & & \uparrow \theta \times \theta \\ \underline{A} & \xrightarrow{\omega} & A \end{array}$$

因为

$$\begin{aligned} (\theta \times \theta)\omega Sq^k &= (\omega Sq^k)(w \times w) \\ &= \sum_{i=0}^{k} Sq^i w \times Sq^{k-i} w \\ &= \alpha \left[\sum_{i=0}^{k} (Sq^i \otimes Sq^{k-i})(w \otimes w)\right] \\ &= \alpha \left[\underline{\psi} Sq^k \cdot w \otimes w\right] \\ &= \alpha(\theta \otimes \theta)\underline{\psi} Sq^k \end{aligned}$$

因此若 $m \in \underline{A}$ 使 $\deg m \leqslant n$ 而 $\omega(m)=0$, 由于 $\theta\otimes\theta$ 在次数 $\leqslant n$ 单射, 则 $\underline{\psi}(m)=0$. 这证明了 (a).

(b) 的证明留给读者.

定义 2.2.2 设 B 为交换环 R 上的可增广分次代数, B 称为 Hopf 代数, 如果存在称之为对角映射的代数同态 $\psi: B\to B\otimes B$ 使以下合成

$$B \xrightarrow{\psi} B\otimes B \begin{array}{c} \xrightarrow{1\otimes\epsilon} B\otimes R \xrightarrow{\cong} \\ \xrightarrow{\epsilon\otimes 1} R\otimes B \xrightarrow{\cong} \end{array} B$$

都是恒等对应.

我们称对角映射 ψ 是可结合的, 若以下图形可换:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\psi} & B\otimes B \\ \downarrow\psi & & \downarrow\psi\otimes 1 \\ B\otimes B & \xrightarrow{1\otimes\psi} & B\otimes B\otimes B \end{array}$$

我们称 ψ 是交换的, 若以下图形可换:

$$\begin{array}{ccc} B\otimes B & \xrightarrow{T} & B\otimes B \\ \psi\nwarrow & & \nearrow\psi \\ & B & \end{array}$$

定理 2.2.3 对 $p\geqslant 2$, mod p Steenrod 代数 A 是具有交换的, 可结合的对角映射 ψ(由定理 2.2.1 给出) 的 Hopf 代数.

证 只对 $p=2$ 证明. ψ 由定理 2.2.1 给出. 因为 A 连通 (即 $A_0\cong Z_2$ 且当 $i<0$ 有 $A_i=0$), 因此增广 $\epsilon: A\to Z_2$ 是唯一的. 因此以下图形中

$$A \xrightarrow{\psi} A\otimes A \begin{array}{c} \xrightarrow{1\otimes\epsilon} A\otimes Z_2 \xrightarrow{\cong} \\ \xrightarrow{\epsilon\otimes 1} Z_2\otimes A \xrightarrow{\cong} \end{array} A$$

所有映射均为代数同态, 容易验证合成都是恒等对应, 由 ψ 是代数同态, 可在生成元上验证 ψ 是可结合的、交换的. 证毕.

设 M 是分次 R 模, R 为域. 称 M 为有限型的, 若每个 M_i 都是有限维 R 模. M 的对偶 M^* 为分次 R 模 $M^*=\{M_i^*\}_{i\geqslant 0}$, 其中 $M_i^*=\mathrm{Hom}(M_i,R)$. 若 $f: M\to N$ 为分次 R 模同态, 则由 f 导出 R 模同态 $f^*: N^*\to M^*$ 使 $f^*(\omega)(m)=\omega(f(m))$, $\omega\in N_i^*, m\in M_i$. 若 M, N 都是有限型的, 则 $(M\otimes N)^*\cong M^*\otimes N^*$, 同构对应由 $(\omega\otimes\omega')(m\otimes m')=(-1)^{|m||\omega'|}\omega(m)\otimes\omega'(m')$ 给出.

若 B 是具有乘法 ϕ, 对角映射 ψ 的有限型 Hopf 代数, 容易证明, B^* 是具有乘法 ψ^* 和对角映射 ϕ^* 的 Hopf 代数. 因此对 mod p Steenrod 代数 A, 它的对偶代数 A^* 是具有乘法 $\psi^*: A^* \otimes A^* \to A^*$ 和对角映射 $\phi^*: A^* \to A^* \otimes A^*$ 的 Hopf 代数. 从下一节起, 我们将开始讨论对偶代数 A^* 的结构, 并进而得到 A 的 Milnor 基.

2.3 同 态 λ^*

设 H_*, H^* 分别表示有限 CW 复形 K 的 Z_p 同调群和上同调群, A 在 H^* 上的作用导出 A 在 H_* 上的作用如下:

$$\langle u\theta, \alpha\rangle = \langle u, \theta\alpha\rangle$$

$u \in H_*, \theta \in A, \alpha \in H^*$. 这个作用可看作为同态

$$\lambda: H_* \otimes A \to H_*$$

它的对偶同态为

$$\lambda^*: H^* \to H^* \otimes A^*$$

$$\langle \beta \otimes \theta, \lambda^*(\alpha)\rangle = \langle \lambda(\beta \otimes \theta), \alpha\rangle$$

其中 $\alpha \in H^*, \beta \in H_*, \theta \in A$. λ 限制在 $H_{k+i} \otimes A_i \to H_k$ 有对偶 $\lambda^i: H^k \to H^{k+i} \otimes A_i^*$. 因此

$$\lambda^* = \lambda^0 + \lambda^1 + \lambda^2 + \cdots$$

将 H^k 对应到 $\sum\limits_i H^{k+i} \otimes A_i^*$, K 是有限 CW 复形的条件是需要的, 不然 λ^* 将是无限和.

定理 2.3.1 $(\lambda^* \otimes 1)\lambda^*(\alpha) = (1 \otimes \phi^*)\lambda^*(\alpha)$ 对任意 $\alpha \in H^*$ 成立.

证 由 A 的乘法定义, 有 $(\theta_1 \cdot \theta_2)(\alpha) = \theta_1(\theta_2(\alpha))$, 因此导出 $u(\theta_1\theta_2) = (u\theta_1)\theta_2$, 这就是

$$\begin{array}{ccc} H_* \otimes A \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes \phi} & H_* \otimes A \\ \Big\downarrow \lambda_* \otimes 1 & & \Big\downarrow \lambda_* \\ H_* \otimes A & \xrightarrow{\lambda_*} & H_* \end{array}$$

它的对偶为如下可换图形:

$$\begin{array}{ccc} H^* \otimes A^* \otimes A^* & \xleftarrow{1 \otimes \phi^*} & H^* \otimes A^* \\ \Big\uparrow \lambda^* \otimes 1 & & \Big\uparrow \lambda^* \\ H^* \otimes A^* & \xleftarrow{\lambda^*} & H^* \end{array}$$

引理 2.3.2 同态 $\lambda^*: H^* \to H^* \otimes A^*$ 是环同态, 其中 H^* 的 Cup 积和 A^* 的乘法导出 $H^* \otimes A^*$ 的乘法.

证 令 K, L 为有限复形, $\theta \in A$, $\psi(\theta) = \sum \theta_i' \otimes \theta_i''$. 因此对任意 $\alpha \in H^*(K), \beta \in H^*(L)$ 有 (见文献 [2])

$$\theta(\alpha \times \beta) = \Sigma(-1)^{\dim\theta_i'' \dim\alpha}\theta_i'(\alpha) \times \theta_i''(\beta)$$

设 $\mu \in H_*(K), \nu \in H_*(L), \dim\mu = u, \dim\nu = v, \dim\alpha = a, \dim\theta_i' = k_i$ $\dim\theta_i'' = l_i$ 则

$$\begin{aligned}
&\langle \mu \times \nu, \theta(\alpha \times \beta)\rangle = \sum(-1)^{l_i a}\langle \mu \times \nu, \theta_i'(\alpha) \times \theta_i''(\beta)\rangle \\
&= \sum(-1)^{l_i a}(-1)^{v(a+k_i)}\langle \mu, \theta_i'(\alpha)\rangle\langle \nu, \theta_i''(\beta)\rangle \\
&= \sum(-1)^{l_i a}(-1)^{v(a+k_i)}\langle \mu\theta_i', \alpha\rangle\langle \nu\theta_i'', \beta\rangle \\
&= \sum(-1)^{l_i a}(-1)^{v(a+k_i)}(-1)^{a(v+l_i)}\langle \mu\theta_i' \times \nu\theta_i'', \alpha \times \beta\rangle \\
&= \sum(-1)^{vk_i}\langle \mu\theta_i' \times \nu\theta_i'', \alpha \times \beta\rangle
\end{aligned}$$

因此有

$$(\mu \times \nu)\theta = \sum(-1)^{\dim\nu\cdot\dim\theta_i'}\mu\theta_i' \times \nu\theta_i''$$

换言之, 以下图形可交换:

$$\begin{array}{ccccc}
H_*(K)\otimes H_*(L)\otimes A\otimes A & \xleftarrow{1\otimes 1\otimes\psi} & H_*(K)\otimes H_*(L)\otimes A = & H_*(K\times L)\otimes A \\
\downarrow 1\otimes T\otimes 1 & & & \downarrow \lambda \\
H_*(K)\otimes A\otimes H_*(L)\otimes A & \xrightarrow{\lambda\otimes\lambda} & H_*(K)\otimes H_*(L) = & H_*(K\times L)
\end{array}$$

它的对偶图形也可交换. 同时我们取 $K = L$, $d: K \to K \times K$ 为对角映射, 则有可换图形

$$\begin{array}{ccccccc}
H^*\otimes H^*\otimes A^*\otimes A^* & \xrightarrow{1\otimes 1\otimes\psi^*} & H^*\otimes H^*\otimes A^* = & H^*(K\times K)\otimes A^* & \xrightarrow{d^*\otimes 1} & H^*\otimes A^* \\
\uparrow 1\otimes T\otimes 1 & & & \uparrow \lambda^* & & \uparrow \lambda^* \\
H^*\otimes A^*\otimes H^*\otimes A^* & \xleftarrow{\lambda^*\otimes\lambda^*} & H^*\otimes H^* = & H^*(K\times K) & \xrightarrow{d^*} & H^*
\end{array}$$

由 $\alpha\otimes\beta \in H^*\otimes H^*$ 起经 d^*, λ^* 为 $\lambda^*(\alpha\cup\beta)$, 而经 $\lambda^*\otimes\lambda^*, 1\otimes T\otimes 1, 1\otimes 1\otimes\psi^*, d^*\otimes 1$ 则为 $\lambda^*(\alpha)\cup\lambda^*(\beta)$, 因此 λ^* 是环同态. 证毕.

引理 2.3.3 若 $\lambda^*(\alpha) = \sum \alpha_i \otimes \omega_i$, 则对任意 $\theta \in A$,

$$\theta(\alpha) = \sum(-1)^{\dim\alpha_i\cdot\dim\theta}\langle\theta, \omega_i\rangle\alpha_i$$

证 对 $\mu \in H_*$,

$$\begin{aligned}
&\langle\mu, \theta\alpha\rangle = \langle\mu\theta, \alpha\rangle = \langle(\mu\otimes\theta)\lambda_*, \alpha\rangle \\
&= \langle\mu\otimes\theta, \lambda^*\alpha\rangle = \langle\mu\otimes\theta, \sum\alpha_i\otimes\omega_i\rangle \\
&= \sum(-1)^{\dim\alpha_i\cdot\dim\theta}\langle\mu, \alpha_i\rangle\langle\theta, \omega_i\rangle
\end{aligned}$$

因此有 $\theta(\alpha) = \sum(-1)^{\dim\alpha_i\cdot\dim\theta}\langle\theta, \omega_i\rangle\alpha_i$. 证毕.

2.4 对偶代数 A^* 的结构

设 Z_p 作用在 S^{2N+1} 上为 $(z_1 e^{\frac{2\pi i}{p}}, z_2 e^{\frac{2\pi i}{p}}, \cdots, z_{N+1} e^{\frac{2\pi i}{p}})$, 其中 z_i 为复数, 则 $X = S^{2N+1}/Z_p$ 为透镜空间. X 可看成 $K(Z_p, 1)$ 的 $2N+1$ 维架, 且 $H^*(X)$ 有如下形式, $H^1(X)$ 由母元 x, 而 $H^2(X)$ 由母元 $y = \beta x$ 生成 (β 为 Bockstein 运算), 对 $0 \leqslant i \leqslant N$, $H^{2i}(X)$ 由 y^i 生成, 而 $H^{2i+1}(X)$ 由 xy^i 生成.

令 $M_0 = 1, M_1 = P^1, M_2 = P^p P^1, \cdots, M_k = P^{p^{k-1}} P^{p^{k-2}} \cdots P^p P^1$.

引理 2.4.1 $M_k \in A_{2p^k-2}$ 满足 $M_k y = y^{p^k}$. 若 θ 是 $\beta, P^1, P^2, \cdots$ 的单项式但不等于 M_k, 则 $\theta y = 0$. 同样 $(M_k \beta)(x) = y^{p^k}$, 若 θ 不等于 $M_k \beta$, 则 $\theta x = 0$.

证 令 $P = 1 + P^1 + P^2 + \cdots$, 因此 $Py = (1 + P^1) y = y + y^p$. 由 Cartan 公式, P 是环同态, 因此 $Py^{p^r} = (y + y^p)^{p^r} = y^{p^r} + y^{p^{r+1}}$. 换言之

$$P^j y^{p^r} = \begin{cases} y^{p^r}, & \text{当 } j = 0 \\ y^{p^{r+1}}, & \text{当 } j = p^r \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因为 $\beta y^i = i y^{i-1} \beta y = i y^{i-1} \beta \beta x = 0$, 因此 β 或 P^j 中只有 P^{p^r} 才能非平凡的作用在 y^{p^r} 上. 用归纳法, 可得引理结论. 证毕.

引理 2.4.2 $\lambda^* x$ 有形式 $x \otimes 1 + y \otimes \tau_0 + y^p \otimes \tau_1 + \cdots + y^{p^r} \otimes \tau_r$, 其中每个 τ_k 是 $A^*_{2p^k-1}$ 的唯一定义的元, 而 p^r 是 p 的最大幂使 $p^r \leqslant N$. 同样 $\lambda^* y = y \otimes \xi_0 + y^p \otimes \xi_1 + \cdots + y^{p^r} \otimes \xi_r$, 其中 $\xi_0 = 1$, ξ_k 是 $A^*_{2p^k-2}$ 唯一定义的元.

证 对 $\theta \in A_i, \theta y = 0$ 除非 θ 是 $M_0, M_1, \cdots, M_k, \cdots$ 中的一个, 即除非 $i = 2p^k - 2$(某个 k). 由引理 2.3.3, 若 $\lambda^* y = \sum \alpha_j \otimes \omega_j$, 则 $\theta y = \sum \pm \langle \theta, \omega_j \rangle \alpha_j$, 因此若 $i \neq 2p^k - 2$, $\lambda^i y = 0$. 从而有 $\lambda^*(y) = \lambda^0(y) + \lambda^{2p-2}(y) + \cdots + \lambda^{2p^r-2}(y)$, 但 $\lambda^{2p^k-2}(y) \in H^{2p^k}(X) \otimes A^*_{2p^k-2}$, 因此 $\lambda^{2p^k-2}(y) = y^{p^k} \otimes \xi_k$, ξ_k 是 $A^*_{2p^k-2}$ 唯一定义的元. 这证明了第二个结论. 第一个结论的证明完全类似. 证毕.

定理 2.4.3 (参见文献 [2] 定理 2) 对偶代数 A^* 是由 $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \cdots$ 生成的外代数和由 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 生成的多项式代数的张量积, 即 $A^* = E(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \cdots) \otimes P(\xi_1, \xi_2, \cdots)$.

为了证明定理 2.4.3, 我们先证明以下几个引理.

引理 2.4.4 $\langle M_k, \xi_k \rangle = 1, \langle \theta, \xi_k \rangle = 0$, 若 $\theta \neq M_k$. $\langle M_k \beta, \tau_k \rangle = 1, \langle \theta, \tau_k \rangle = 0$, 若 $\theta \neq M_k \beta$.

证 由 $\lambda^*(y) = y \otimes \xi_0 + \cdots + y^{p^r} \otimes \xi_r$, 因此 $\theta(y) = \sum\limits_{i=0}^{r} \langle \theta, \xi_i \rangle y^{p^i}$. 若 $\theta \neq M_k$, $\theta(y) = 0$, 从而 $\langle \theta, \xi_i \rangle = 0$. 若 $\theta = M_k$, $y^{p^k} = \theta(y) = \sum\limits_{i=0}^{r} \langle \theta, \xi_i \rangle y^{p^i}$, 因此有 $\langle \theta, \xi_k \rangle = 1$.
证毕.

考虑序列 $I=(\epsilon_0,r_1,\epsilon_1,r_2,\epsilon_2,\cdots)$, 其中 $\epsilon_i=0,1$. 而 $r_i=0,1,2,\cdots$, 对每个 I 定义

$$\omega(I)=\tau_0^{\epsilon_0}\xi_1^{r_1}\tau_1^{\epsilon_1}\xi_2^{r_2}\cdots$$

对每个 I 定义

$$\theta(I)=\beta^{\epsilon_0}P^{s_1}\beta^{\epsilon_1}P^{s_2}\cdots$$

其中 $s_1=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\epsilon_i+r_i)p^{i-1},\cdots,s_k=\sum\limits_{i=k}^{\infty}(\epsilon_i+r_i)p^{i-k},\cdots$ 则用 s_i 解出 r_i 有

$$r_i+\epsilon_i=s_i-ps_{i+1}$$

$$s_i\geqslant ps_{i+1}+\epsilon_i$$

$\theta(I)$ 是可许单项式, 而且 $\dim\theta(I)=\dim\omega(I)$. 将集合 $\{I\}$ 给予由右边起的字典式的序 (例如 $(1,2,0,\cdots)<(0,0,1,\cdots)$).

引理 2.4.5 $\langle\theta(I),\omega(J)\rangle=\begin{cases}\pm1, & 若\ I=J,\\ 0, & 若\ I<J\end{cases}$.

证 对 $\dim\theta(I)$ 作归纳法证明第一个等式. 当维数是 0, 显然正确.

情况 1 $I=(\epsilon_0,r_1,\cdots,\epsilon_{k-1},r_k,0,\cdots)$ 最后一个非零元是 r_k. 令 $I'=(\epsilon_0,r_1,\cdots,\epsilon_{k-1},r_k-1,0,\cdots)$, 因此 $\omega(I)=\omega(I')\xi_k$,

$$\langle\theta(I),\omega(I)\rangle=\langle\theta(I),\psi^*(\omega(I')\otimes\xi_k)\rangle=\langle\psi\theta(I),\omega(I')\otimes\xi_k\rangle$$

但是 $\theta(I)=\beta^{\epsilon_0}P^{s_1}\cdots\beta^{\epsilon_{k-1}}P^{s_k}$. 因此

$$\psi\theta(I)=\sum\pm\beta^{\epsilon_0'}\cdots P^{s_k'}\otimes\beta^{\epsilon_0''}\cdots P^{s_k''}$$

其中和式取遍所有序列 $(\epsilon_0',\cdots,s_k');(\epsilon_0'',\cdots,s_k'')$ 使 $\epsilon_0'+\epsilon_0''=\epsilon_0,\cdots,s_k'+s_k''=s_k$, 从而有

$$\langle\theta(I),\omega(I)\rangle=\sum\pm\langle\beta^{\epsilon_0'}\cdots P^{s_k'},\omega(I')\rangle\langle\beta^{\epsilon_0''}\cdots P^{s_k''},\xi_k\rangle$$

但右边因子除非 $\beta^{\epsilon_0''}\cdots P^{s_k''}=M_k$ 为 0, 而左边因子应为 $\beta^{\epsilon_0}P^{s_1-p^{k-1}}\beta^{\epsilon_1}\cdot P^{s_2-p^{k-2}}\cdots P^{s_{k-1}-p}\beta_{\epsilon_{k-1}}P^{s_k-1}$ 记为 $\theta(I')$. 因此

$$\langle\theta(I),\omega(I)\rangle=\pm\langle\theta(I'),\omega(I')\rangle=\pm1$$

情况 2 $I=(\epsilon_0,r_1,\cdots,\epsilon_k,0,\cdots)$ 最后一个非零元为 $\epsilon_k=1$, 同上法一样, 右边因子中唯一不为 0 的是 $\langle P^{p^{k-1}}\cdots P^pP^1\beta,\tau_k\rangle=1$, 而左边因子为 $\theta(J')$, 从而 $\langle\theta(I),\omega(I)\rangle=\pm\langle\theta(J'),\omega(J')\rangle=\pm1$.

对 $I<J$, $\langle\theta(I),\omega(J)\rangle=0$, 证明如下:

情况 1a J 的最后一个非零元为 r_k, I 也在这个位置为最后非零元, 用以上方法可证 $\langle\theta(I),\omega(J)\rangle=\pm\langle\theta(I'),\omega(J')\rangle=0$.

情况 1b　J 的最后一个非零元为 r_k, I 较早的位置为 0, 在以上的展开式中, 每个右边因子

$$\langle \beta^{\epsilon_0''} P^{s_1''} \cdots \beta^{\epsilon_{k-1}''}, \xi_k \rangle$$

为 0, 因此 $\langle \theta(I), \omega(J) \rangle = 0$.

情况 2 的证明完全类似. 证毕.

定理 2.4.3 的证明　考虑序列 I 限制在 $\dim \theta(I) = \dim \omega(I) = n$, 由引理 2.4.5, $\langle \theta(I), \omega(J) \rangle$ 所得矩阵是非奇异三角矩阵, 而 $\{\theta(I)\}$ 为 A 的 Z_p 基, 因此 $\{\omega(J)\}$ 是 A^* 的 Z_p 基. 证毕.

定理 2.4.6　$\phi^*(\xi_k) = \sum\limits_{i=0}^{k} \xi_{k-i}^{p^i} \otimes \xi_i$

$$\phi^*(\tau_k) = \sum_{i=0}^{k} \xi_{k-i}^{p^i} \otimes \tau_i + \tau_k \otimes 1$$

证　由 $\lambda^*(y) = \sum\limits_j y^{p^j} \otimes \xi_j$ 可得

$$\lambda^*(y^{p^i}) = \sum_j y^{p^{i+j}} \otimes \xi_j^{p^i}$$

因此

$$(\lambda^* \otimes 1)\lambda^*(y) = \sum_i \lambda^*(y^{p^i}) \otimes \xi_i$$

$$= \sum_j \sum_i y^{p^{i+j}} \otimes \xi_j^{p^i} \otimes \xi_i$$

但是

$$(1 \otimes \phi^*)\lambda^*(y) = \sum_k y^{p^k} \otimes \phi^*(\xi_k)$$

比较两式, 得出 $\phi^*(\xi_k) = \sum\limits_{i=0}^{k} \xi_{k-i}^{p^i} \otimes \xi_i$.

再由 $\lambda^*(x) = x \otimes 1 + \sum\limits_i y^{p^i} \otimes \tau_i$,

$$(\lambda^* \otimes 1)\lambda^*(x) = \lambda^*(x) \otimes 1 + \sum_i \lambda^*(y^{p^i}) \otimes \tau_i$$

$$= x \otimes 1 + \sum_i y^{p^i} \otimes \tau_i + \sum_j \sum_i y^{p^{i+j}} \otimes \xi_j^{p^i} \otimes \tau_i$$

以及

$$(1 \otimes \phi^*)\lambda^*(x) = x \otimes 1 + \sum_k y^{p^k} \otimes \phi^*(\tau_k)$$

得出 $\phi^*(\tau_k) = \tau_k \otimes 1 + \sum\limits_{i=0}^{k} \xi_{k-i}^{p^i} \otimes \tau_i$. 证毕.

2.5 A 的 Milnor 基

令 $R=(r_1,r_2,\cdots)$ 取遍所有非负整数序列 (除有限个 r_i 外都为零), 定义 $\xi(R)=\xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\cdots$. 令 $E=(\epsilon_0,\epsilon_1,\cdots)$ 取遍所有的 0, 1 序列 (除有限个 ϵ_i 外都为 0), 定义 $\tau(E)=\tau_0^{\epsilon_0}\tau_1^{\epsilon_1}\cdots$. 由定理 2.4.3, $\{\tau(E)\xi(R)\}$ 形成 A^* 的 Z_p 基, 因此有 A 的对偶基 $\{P(E,R)\}$, 其中 $P(E,R)\in A$ 定义为

$$\langle P(E,R),\tau(E')\xi(R')\rangle=\begin{cases}1, & 若E=E',R=R'\\ 0, & 其他\end{cases}$$

由引理 2.4.5, $P(0,(r,0,\cdots))=P^r$(因为 $\omega(I)=\xi_1^r,\theta(I)=P^{s_1},s_1=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\epsilon_i+r_i)p^{i-1}=r$). 令 P^R 为对偶于 $\xi(R)$ 的 $P(0,R)$. Q_k 为对偶于 τ_k 的 $P((0,\cdots,0,1,0,\cdots),0)$ $(k\geqslant 0)$, 因此 $Q_0=\beta$. 我们有 $P(E,R)=\pm Q_0^{\epsilon_0}Q_1^{\epsilon_1}\cdots P^R$.

定理 2.5.1 (参见文献 [2] 定理 4a) 元 $Q_0^{\epsilon_0}Q_1^{\epsilon_1}\cdots P^R$ 形成 A 的 Z_p 基, 叫 Milnor 基, 它们在相差符号的意义下对偶于 A^* 的 Z_p 基 $\{\tau(E)\xi(R)\}$, 其中 $Q_k\in A_{2p^k-1}$ 生成一个外代数, 即满足

$$Q_jQ_k+Q_kQ_j=0$$

它们和元 P^R 按以下规则置换

$$P^RQ_k-Q_kP^R=Q_{k+1}P^{R-(p^k,0,\cdots)}+Q_{k+2}P^{R-(0,p^k,0,\cdots)}+\cdots$$

其中 $(r_1,r_2,\cdots)-(s_1,s_2,\cdots)=(r_1-s_1,r_2-s_2,\cdots)$.

证 设 I 为 $A^*\otimes A^*$ 的由元 $1\otimes\xi_1,1\otimes\xi_2,\cdots$ 及 $\xi_1\otimes 1,\xi_2\otimes 1,\cdots$ 生成的理想, 因此有

$$\phi^*(\tau_k)=\tau_k\otimes 1+1\otimes\tau_k \qquad (\text{mod } I)$$
$$\phi^*(\xi_k)=0 \qquad (\text{mod } I)$$

从而有

$$\phi^*(\tau(E)\xi(R))=0, \qquad 若 R\neq 0$$
$$\phi^*(\tau(E))=\sum_{E_1'+E_2'=E}\pm\tau(E_1')\otimes\tau(E_2')$$

再由

$$\begin{aligned}&\langle P(E_1,0)P(E_2,0),\tau(E)\rangle\\ =&\langle\phi(P(E_1,0)\otimes P(E_2,0)),\tau(E)\rangle\\ =&\langle P(E_1,0)\otimes P(E_2,0),\phi^*\tau(E)\rangle\end{aligned}$$

$$=\langle P(E_1,0)\otimes P(E_2,0),\sum_{E_1'+E_2'=E}\pm\tau(E_1')\otimes\tau(E_2')\rangle$$

$$=\begin{cases}\pm 1, & \text{当 } E=E_1+E_2\\ 0, & \text{当 } E\neq E_1+E_2\end{cases}$$

它的对偶式为 $P(E_1,0)P(E_2,0)=\pm P(E_1+E_2,0)$. 其中当 E_1,E_2 同一分量中都是 1, 右式理解为 0. 因此 $P(E,0)$ 的乘积为外代数. 同样的方法可知 $P(E,0)P(0,R)=P(E,R)$.

再由 $\langle P^RQ_k,\tau(E)\xi(R')\rangle=\langle\phi(P^R\otimes Q_k),\tau(E)\xi(R')\rangle=\langle P^R\otimes Q_k,\phi^*(\tau(E)\cdot\xi(R'))\rangle$. 要使 $\phi^*(\tau(E)\xi(R'))$ 包含一项

$$(\text{非零常数})\cdot\xi(R)\otimes\tau_k$$

则 $\tau(E)\xi(R')$ 只可能是 $\tau_k\xi(R),\tau_{k+1}\xi(R-(p^k,0,\cdots)),\tau_{k+2}\xi(R-(0,p^k,0,\cdots)),\cdots$, 且对应的常数为 $+1$. 因此得到其对偶式

$$P^RQ_k=Q_kP^R+Q_{k+1}P^{R-(p^k,0,\cdots)}+Q_{k+2}P^{R-(0,p^k,0,\cdots)}+\cdots$$

证毕.

推论 2.5.2 $Q_0=\beta, Q_{k+1}=[P^{p^k},Q_k]$.

令 X 取遍如下的非负整数的无限矩阵 (称为 Milnor 矩阵).

$$\begin{Vmatrix} * & x_{01} & x_{02} & \cdots\\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots\\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{Vmatrix}$$

它的元素除有限个外都为 0, 且第一个分量省略掉. 对每个 X 定义 $R(X)=(r_1,r_2,\cdots),S(X)=(s_1,s_2,\cdots)$ 及 $T(X)=(t_1,t_2,\cdots)$ 如下:

$$r_i=\sum_j p^jx_{ij}\qquad(\text{加重行和})$$

$$s_j=\sum_i x_{ij}\qquad(\text{列和})$$

$$t_n=\sum_{i+j=n}x_{ij}\qquad(\text{对角线和})$$

定义系数 $b(X)=\Pi t_n!/\Pi x_{ij}!$.

定理 2.5.3 (参见文献 [2] 定理 4b) $P^RP^S=\sum_{R(X)=R,S(X)=S}b(X)P^{T(X)}$, 其中和式取遍所有满足 $R(X)=R,S(X)=S$ 的 Milnor 矩阵 X.

例 $R=(r,0,\cdots),S=(s,0,\cdots)$, 则 $R(X)=R$ 及 $S(X)=S$ 变成为

$$x_{10}+px_{11}+\cdots=r,\qquad x_{ij}=0\qquad(i>1)$$

$$x_{01}+x_{11}+\cdots=s,\qquad x_{ij}=0\qquad(j>1)$$

令 $x=x_{11}$, 满足条件的矩阵形如

$$\left\|\begin{array}{cccc} * & s-x & 0 & \cdots \\ r-px & x & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right\|$$

$b(X)$ 为二项式系数 $(r-px,s-x)=\frac{(r-px+s-x)!}{(r-px)!(s-x)!}$, 而 $0\leqslant x\leqslant \min(s,[\frac{r}{p}])$, 因此有以下推论.

推论 2.5.4 $P^rP^s=\sum\limits_{x=0}^{\min(s,[\frac{r}{p}])}(r-px,s-x)P^{(r-px+s-x,x)}$

推论 2.5.5 若 $r_1<p,r_2<p,\cdots$, 则

$$P^RP^S=(r_1,s_1)(r_2,s_2)\cdots P^{R+S}$$

证 若 $r_1<p\,,r_2<p\,,\cdots$, 则对 $i\geqslant 1$ 等式 $r_i=x_{i0}+px_{i1}+p^2x_{i2}+\cdots$ 将蕴涵 $x_{ij}=0\,(i\geqslant 1,j\geqslant 1)$. 由 $s_j=\sum\limits_i x_{ij}$, 则满足条件的矩阵是

$$\left\|\begin{array}{cccc} * & s_1 & s_2 & \cdots \\ r_1 & 0 & 0 & \cdots \\ r_2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right\|$$

因此 $P^RP^S=(r_1,s_1)(r_2,s_2)\cdots P^{R+S}$.

推论 2.5.6 设 $P_t(r)$ 表示 $P^{(0,\cdots,0,r,0,\cdots)}$, 其中 r 在序列的第 t 个位置上, 则 $P_t(1)$ 可递归的定义如下:

$$P_2(1)=[P^p,P^1],\qquad P_3(1)=[P^{p^2},P_2(1)]\,,\cdots$$

其中 $[a,b]=ab-(-1)^{\dim a\cdot\dim b}ba$.

定理 2.5.3 的证明 设已给任一具有基 $\{a_i\}$ 的 Hopf 代数 B 上对角映射代数同态 $\phi^*(a_i)=\sum\limits_{j',k'}C_i^{j'k'}a_{j'}\otimes a_{k'}$. 设 $\{a^i\}$ 为对偶于 $\{a_i\}$ 的对偶代数 B^* 的基, 则

$$\begin{aligned}\langle\phi(a^j\otimes a^k),a_i\rangle&=\langle a^j\otimes a^k,\phi^*(a_i)\rangle\\&=\langle a^j\otimes a^k,\sum_{j',k'}C_i^{j'k'}a_{j'}\otimes a_{k'}\rangle\\&=(-1)^{\dim a^k\cdot\dim a^j}C_i^{jk}\end{aligned}$$

因此有 $a^ja^k=\phi(a^j\otimes a^k)=\sum\limits_i(-1)^{\dim a^k\cdot\dim a^j}C_i^{jk}a^i$.

今对 $T=(t_1,t_2,\cdots)$ 计算 $\phi^*\xi(T)$. 令 $[i_1,i_2,\cdots,i_k]=(i_1+i_2+\cdots+i_k)!/i_1!i_2!\cdots i_k!$ 为推广的二项式系数, 使

$$(y_1+y_2+\cdots+y_k)^n=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}[i_1,i_2,\cdots,i_k]y_1^{i_1}y_2^{i_2}\cdots y_k^{i_k}$$

应用到

$$\phi^*(\xi_k)=\xi_k\otimes 1+\xi_{k-1}^p\otimes\xi_1+\cdots+\xi_1^{p^{k-1}}\otimes\xi_{k-1}+1\otimes\xi_k$$

我们有

$$\begin{aligned}\phi^*(\xi_k^{t_k})&=\sum[x_{k0},\cdots,x_{0k}]\xi_k^{x_{k0}}\xi_{k-1}^{px_{k-1,1}}\cdots\xi_1^{p^{k-1}x_{1,k-1}}\otimes\xi_1^{x_{k-1,1}}\cdots\xi_k^{x_{0k}}\\&=\sum[x_{k0},\cdots,x_{0k}]\xi(p^{k-1}x_{1,k-1},\cdots,x_{k0})\otimes\xi(x_{k-1,1},\cdots,x_{0k})\end{aligned}$$

计算 $\phi^*(\xi_1^{t_1}\xi_2^{t_2}\cdots\xi_k^{t_k}\cdots)$ 其系数为

$$[x_{10},x_{01}][x_{20},x_{11},x_{02}][x_{30},\cdots,x_{03}]\cdots=b(X)$$

因此有 $\phi^*(\xi(T))=\sum\limits_{T(X)=T}b(X)\xi(R(X))\otimes\xi(S(X))$. 过渡到对偶, 我们必须寻找所有的基元 $\tau(E)\xi(T)$ 使得 $\phi^*(\tau(E)\xi(T))$ 包含一项

$$(\text{非 0 常数})\cdot\xi(R)\otimes\xi(S)$$

容易看出, 像这样的基元仅仅是我们研究过的 $\xi(T)$, 因此有

$$P^RP^S=\sum_{R(X)=R,S(X)=S}b(X)P^{T(X)}$$

证毕.

定理 2.5.7 (参见文献 [2] 引理 9)　$\psi(Q_k)=1\otimes Q_k+Q_k\otimes 1$

$$\psi(P^R)=\sum_{R_1+R_2=R}P^{R_1}\otimes P^{R_2}$$

证

$$\begin{aligned}&\langle\psi(Q_k),\tau(E')\xi(R')\otimes\tau(E'')\xi(R'')\rangle\\&=\langle Q_k,\tau(E'+E'')\xi(R'+R'')\rangle\\&=\begin{cases}1, & \tau(E'+E'')=\tau_k\text{ 且 }R'+R''=0\\0, & \text{其他}\end{cases}\end{aligned}$$

因此　$\psi(Q_k)=1\otimes Q_k+Q_k\otimes 1$

$$\begin{aligned}&\langle\psi(P^R),\tau(E)\xi(R')\otimes\tau(E')\xi(R'')\rangle\\&=\langle P^R,\tau(E+E')\xi(R'+R'')\rangle\\&=\begin{cases}1, & E+E'=0\quad R'+R''=R\\0, & \text{其他}\end{cases}\end{aligned}$$

因此 $\psi(P^R) = \sum\limits_{R'+R''=R} P^{R'} \otimes P^{R''}$. 证毕.

若 $\psi(a) = 1\otimes a + a\otimes 1$, a 称为原初元, 因此 A 的原初元只有 $Q_0, Q_1, Q_2, \cdots, P^1$, $P_t(1)$.

2.6 典则反自同构

本节将讨论 Steenrod 代数 A 的典则反自同构 c 及其计算的公式. 首先我们从一般的 Hopf 代数的典则反自同构的概念讲起.

定义 2.6.1 设 C, B 为域 K 上分次连通 Hopf 代数, 令 $G(C,B)$ 是满足 $f_0 = 1_K: K \to K$ 的 $K-$向量空间映射 $f: C \to B$ 的集合. 若 $f, g \in G(C,B)$, 定义 $f * g$ 为合成

$$C \xrightarrow{\psi} C\otimes C \xrightarrow{f\otimes g} B\otimes B \xrightarrow{\phi} B$$

命题 2.6.2 $G(C,B)$ 中的运算 * 可逆但不可结合, 单位元为 $C \xrightarrow{\epsilon} K \xrightarrow{\eta} B$.

证 只要证明对 $f \in G(C,B)$, 存在逆元 $f^{-1} \in G(C,B)$ 使 $f * f^{-1} = \eta\epsilon$. 设 f^{-1} 在次数 $< n$ 的元已定义. 设 $x \in C_n$, $\psi(x) = 1\otimes x + x\otimes 1 + \sum x_i' \otimes x_i''$, 令

$$f^{-1}(x) = -f(x) - \sum f(x_i') f^{-1}(x_i'')$$

则容易证明 $\phi(f\otimes f^{-1})\psi(x) = 0 = \eta\epsilon(x)$, 当 $\deg x > 0$, 因此 $f * f^{-1} = \eta\epsilon$. 证毕.

定义 2.6.3 设 B 为域 K 上的分次连通 Hopf 代数, B 的恒同映射在 $G(B,B)$ 中的逆叫做 B 的典则反自同构, 记为 c_B(或叫自共轭).

命题 2.6.4 $c_B: B \to B$ 满足:

(1) $c(1) = 1$.

(2) 若 $\psi(a) = \sum a_i' \otimes a_i''$, $\deg a > 0$, 则 $\sum a_i' c(a_i'') = 0$.

证 由 $\phi(1\otimes c)\psi = \eta\epsilon$, 则当 $\deg a > 0$, $\psi(a) = \sum a_i' \otimes a_i''$, 有 $0 = \phi(1\otimes c)\psi(a) = \sum a_i' c(a_i'')$. $c(1) = 1$ 是显然的. 证毕.

例 2.6.5 若 G 是李群, 则同调群 $H_*(G)$ 是 Hopf 代数, 映射 $g \mapsto g^{-1}$ 导出典则反自同构

$$c: H_*(G) \to H_*(G)$$

命题 2.6.6 若 B 如上, 则下图可换:

$$\begin{array}{ccc}
B\otimes B & \xrightarrow{\phi} & B \\
\downarrow c\otimes c & & \\
B\otimes B & & \Big\downarrow c. \\
\downarrow T & & \\
B\otimes B & \xrightarrow{\phi} & B
\end{array}$$

即对 $b_1, b_2 \in B$ 有 $c(b_1b_2) = (-1)^{|b_1|\cdot|b_2|}c(b_2)c(b_1)$.

证 略.

命题 2.6.7 若 B 的乘法可换, 或上乘法可换, 则 $c^2 = 1: B \to B$.

证 只要证 $c^2 * c = \eta\epsilon$. 这里有

$$\begin{aligned} c^2 * c &= \phi(c^2 \otimes c)\psi \\ &= \phi(c \otimes c)(c \otimes 1)\psi \\ &= c\phi T(c \otimes 1)\psi \\ &= c\phi(c \otimes 1)\psi \qquad (\text{由设 } \phi T = \phi) \\ &= c\eta\epsilon = \eta\epsilon \end{aligned}$$

证毕.

命题 2.6.8 若 $c: B \to B$ 为典则反自同构, 则 c 的对偶 $c^*: B^* \to B^*$ 也是典则反自同构.

证 由 $\phi(1 \otimes c)\psi = \eta\epsilon$, 得出 $\psi^*(1 \otimes c^*)\phi^* = \epsilon^*\eta^*$. 证毕.

下面讨论 Steenrod 代数 A 的典则反自同构

$$c: A \to A$$

若 a 是 A 的原初元, 则 $a \cdot 1 + 1 \cdot c(a) = 0$, $c(a) = -a$, 因此对 A 的原初元 Q_k, P^1 有

$$c(Q_k) = -Q_k, \qquad c(P^1) = -P^1$$

一般的 $c(P^n)$ 可由 $\sum\limits_i P^{n-i}c(P^i) = 0$ 计算, 如果通过对偶代数来计算可以相对简单一些.

整数 n 的长度为 $l(\alpha)$ 的有序分割是其和为 n 的正整数有序序列 $(\alpha(1), \alpha(2), \cdots, \alpha(l(\alpha)))$. n 的所有有序分割的集合记为 Part (n) (例如 $\text{Part}(3) = \{(3), (2,1), (1,2), (1,1,1)\}$). Part$(n)$ 有 2^{n-1} 个元. 已给有序分割 $\alpha \in \text{Part}(n)$, $\sigma(i)$ 表示部分和 $\sum\limits_{j=1}^{i-1} \alpha(j)$.

命题 2.6.9 在对偶代数 A^* 中

$$c(\xi_n) = \sum_{\alpha \in \text{Part}(n)} (-1)^{l(\alpha)} \prod_{i=1}^{l(\alpha)} \xi_{\alpha(i)}^{p^{\sigma(i)}}$$

(例如 $c(\xi_3) = -\xi_3 + \xi_1\xi_2^p + \xi_2\xi_1^{p^2} - \xi_1\xi_1^p\xi_1^{p^2}$).

证 由 $\phi^*(\xi_n) = \sum\limits_{i=0}^{n} \xi_{n-i}^{p^i} \otimes \xi_i$, 有

$$\sum_{i=0}^{n} \xi_{n-i}^{p^i} c(\xi_i) = 0$$

因此

$$c(\xi_n) = -\sum_{i=0}^{n-1} c(\xi_i)\xi_{n-i}^{p^i}$$

用归纳法即可证明. 证毕.

因为运算 $a \mapsto c(a)$ 是反自同构, 可用命题 2.6.9 决定任意基元 $\xi(R)$ 的共轭. 过渡到对偶, 我们得到以下公式.

已给序列 $R = (r_1, \cdots, r_k, 0, \cdots)$, 考虑方程

$$r_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathrm{Part}(n)} \sum_{j=1}^{l(\alpha)} \delta_{i,\alpha(j)} p^{\sigma(j)} y_\alpha \qquad (*)$$

$i = 1, 2, 3, \cdots$. 其中 $\delta_{i,\alpha(j)}$ 为 Kronecker 指数, 未知量 y_α 为非负整数. 对每个解 Y, 定义 $S(Y) = (s_1, s_2, \cdots)$ 为

$$s_n = \sum_{\alpha \in \mathrm{Part}(n)} y_\alpha$$

(因此 $s_1 = y_1, s_i = y_2 + y_{(1,1)}$ 等) 定义系数 $b(Y)$ 为

$$b(Y) = [y_2, y_{(1,1)}][y_3, y_{(2,1)}, y_{(1,2)}, y_{(1,1,1)}] \cdots = \frac{\prod s_n!}{\prod\limits_{\alpha} y_\alpha!}$$

定理 2.6.10 (参见文献 [2] 定理 5) $c(P^R) = (-1)^{r_1+\cdots+r_k} \sum b(Y) P^{S(Y)}$, 其中和式取遍了方程 $(*)$ 的所有解.

方程 $(*)$ 的第 i 个方程的系数

$$\sum_{j=1}^{l(\alpha)} \delta_{i,\alpha(j)} p^{\sigma(j)}$$

是正的, 如果序列 $\alpha = (\alpha(1), \alpha(2), \cdots, \alpha(l(\alpha)))$ 包含整数 i, 而其他情况下这个系数为 0. 在 $i > k$ 的情况下, 左边 $r_i = 0$, 这时对每个包含 i 的 α 必有 $y_\alpha = 0$.

作为例子, 设 $k = 1$, 使得 $R = (r, 0, \cdots)$. 因此若 α 包含大于 1 的整数, 则 $y_\alpha = 0$, 剩下的分割为 $(1), (1,1), (1,1,1), \cdots$, 从而有

$$s_1 = y_1, \qquad s_2 = y_{1,1}, \qquad s_3 = y_{1,1,1}, \cdots$$

方程 $(*)$ 化为

$$r = s_1 + (1+p)s_2 + (1+p+p^2)s_3 + \cdots$$

这刚好是如下的维数限制

$$\begin{aligned} \dim P^S &= (2p-2)s_1 + (2p^2-2)s_2 + \cdots \\ &= \dim P^r = (2p-2)r \end{aligned}$$

推论 2.6.11 $c(P^r)=(-1)^r\sum P^S$, 其中和式取遍所有具有正确维数的 P^S. 例如 $c(P^{2p+3})=-P^{2p+3}-P^{(p+2,1)}-P^{(1,2)}$.

2.7 Steenrod 代数中的一些公式

在本节我们将利用 Steenrod 代数 A 的 Milnor 基证明一些公式.

定义 2.7.1 设 k 为域, B 为分次连通的 k 上的 Hopf 代数. $H=\mathrm{Hom}_k(B,B)$ 表示所有使 $f_0=\eta_0\epsilon_0\colon B_0\to B_0$ 的次数为零的向量空间映射 f 的集合. 若 $f,g\in H$, 令 $f*g=\phi(f\otimes g)\psi$, 其中 ϕ,ψ 为 B 的乘法和上乘法. $0\in H$ 是正维数时为 0, 而零维数时为 $\eta_0\epsilon_0$ 的向量空间映射.

命题 2.7.2 (1) $0*f=f*0=f$.

(2) 若 B 可换且上可换, 则 $f*g=g*f$.

(3) 若 B 可结合且上可结合, 则运算 $*$ 可结合.

(4) 若 f 为代数映射, 则 $f(g*h)=fg*fh$; 且若 f 为上代数映射, 则 $(g*h)f=gf*hf$.

(5) 若 f,g 为代数映射, B 可换且可结合, 则 $f*g$ 也为代数映射.

(6) 若 f,g 为上代数映射, B 上可换, 则 $f*g$ 也为上代数映射.

定义 2.7.3 设 A 为 mod p Steenrod 代数, $H=\mathrm{Hom}_{Z_p}(A,A)$ 如定义 2.7.1, 归纳的定义 $t_r\in H$ 如下: $t_1=1,t_2=1*1,t_r=t_{r-1}*1$(例如 $t_2(Sq^k)=\sum\limits_{i=0}^{k}Sq^iSq^{k-i}$).

设 $P=1+P^1+P^2+\cdots,R=(r_1,r_2,\cdots)$, 记 $\binom{r}{R}=\binom{r}{1}^{r_1}\binom{r}{2}^{r_2}\cdots$, 其中规定 $0^0=1$.

定理 2.7.4 (Peterson[4]) $t_r(P)=\sum\limits_R\binom{r}{R}P^R$.

推论 2.7.5 当 $p=2$, $t_2(Sq)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}Sq_2(k)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}Sq^{(0,k,0,\cdots)}$.

为了证明定理 2.7.4, 先证明以下引理. 考虑对偶映射 $t_r^*\colon A^*\to A^*$, 由命题 2.7.2(5), t_r^* 为代数映射.

引理 2.7.6

$$t_r^*(\xi_k)=\binom{r}{k}\xi_1^{p_k}\ (\mathrm{mod}\ I)\ (k>0)$$

$$t_r^*(\tau_k)=0\ (\mathrm{mod}\ I)\ (k\geqslant 0)$$

其中 $p_k=1+p+\cdots+p^{k-1}$, 而 I 是 A^* 的由 $\xi_2,\xi_3,\cdots$ 及 $\tau_0,\tau_1,\cdots$ 生成的理想.

证 对 r 作归纳. 当 $r=1$, t_1^* 是恒等映射, 显然成立. 设对 $r-1$ 已成立, 则

$$t_r^*(\xi_k)=\sum_{i=0}^{k}t_{r-1}^*(\xi_{k-i})^{p^i}\xi_i$$

$$
\begin{aligned}
&= t_{r-1}^*(\xi_k)\xi_0 + t_{r-1}^*(\xi_{k-1})^p\xi_1 \qquad (\text{mod } I)\\
&= \binom{r-1}{k}\xi_1^{p_k} + \binom{r-1}{k-1}\xi_1^{p\cdot p_{k-1}+1} \qquad (\text{mod } I)\\
&= \binom{r}{k}\xi_1^{p_k} \qquad (\text{mod } I)
\end{aligned}
$$

类似地有 $t_r^*(\tau_k) = 0 \ (\text{mod } I)$.

定理 2.7.4 的证明 设 $m = \xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\cdots\xi_k^{r_k}$ 为 A^* 的单项式, 则

$$
\langle t_r(P), m\rangle = \langle P, t_r^*(m)\rangle = \binom{r}{1}^{r_1}\binom{r}{2}^{r_2}\cdots\binom{r}{k}^{r_k}
$$

若 m 包含一个 τ_i, 则 $\langle t_r(P), m\rangle = 0$. 证毕.

引理 2.7.7 $\sum\limits_{t=0}^{m}(-1)^{t+1}\binom{m+j}{t} = (-1)^{m+1}\binom{m+j-1}{m} \quad (j>0)$.

证

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{m}(-1)^{t+1}\binom{m+j}{t} &= \sum_{t=0}^{m}(-1)^{t+1}\left[\binom{m+j-1}{t} + \binom{m+j-1}{t-1}\right]\\
&= (-1)^{m+1}\binom{m+j-1}{m}
\end{aligned}
$$

引理 2.7.8 $\binom{(p+1)m-1}{m} = 0 \ (\text{mod } p)$.

证 设 $m = b_0p^n + b_1p^{n+1} + \cdots \ (0 < b_i < p)$ 为 m 的 p 进展开式, 则有 $(p+1)m = b_0p^n + (b_0+b_1)p^{n+1} + \cdots$, 从而有

$$
(p+1)m - 1 = (p-1) + (p-1)p + \cdot + (p-1)p^{n-1} + (b_0-1)p^n + \cdots
$$

在 $(p+1)m-1$ 和 m 的 p 进展开式中, 对应于 p^n 的项的系数有 $\binom{b_0-1}{b_0} = 0(\text{mod } p)$. 因此引理得证.

由引理 2.7.7 和引理 2.7.8, 令 $j = pm$, 则有如下引理.

引理 2.7.9 $\sum\limits_{t=0}^{m}(-1)^{t+1}\binom{(p+1)m}{t} = 0 \ (\text{mod } p)$.

定理 2.7.10 (Peterson[4]) $P_2(k) = \sum\limits_{s=0}^{k}(-1)^{s+k}P^{(p+1)k-s}P^s$, 即所有长 $\leqslant 2$, 次数为 $k(p+1)(2p-2)$ 的可许基元的符号和.

证 由推论 2.5.4, 对可许的 P^tP^s 有

$$
P^tP^s = \sum_{i=0}^{s}\binom{t+s-(p+1)i}{s-i}P^{(t+s-(p+1)i,i)}
$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{k}(-1)^s P^{(p+1)k-s}P^s \\
&=\sum_{s=0}^{k}\sum_{i=0}^{s}(-1)^s\binom{(p+1)(k-i)}{s-i}P^{((p+1)(k-i),i)} \\
&=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{s=i}^{k}(-1)^s\binom{(p+1)(k-i)}{s-i}P^{((p+1)(k-i),i)}+(-1)^kP^{(0,k)}
\end{aligned}$$

但是, 由引理 2.7.9 , mod p 有以下等式:

$$\sum_{s=i}^{k}(-1)^s\binom{(p+1)(k-i)}{s-i}=(-1)^{i-1}\sum_{t=0}^{m}(-1)^{t+1}\binom{(p+1)m}{t}=0$$

证毕.

推论 2.7.11

$$t_2(Sq^k)=\sum_{i=0}^{k}Sq^iSq^{k-i}=0,\qquad 当\ k\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{2k}{3}-1}Sq^iSq^{k-i}=0,\qquad 当 k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$$

证　第一个由推论 2.7.5, 第二个由推论 2.7.5 和定理 2.7.10.

下面我们再证明有关典则反自同构的一些公式, 设 $S(i)$ 表示所有形如 P^R 的维数 i 的 Milnor 基元的和.

命题 2.7.12　$P^mS(l)=\sum\limits_R\binom{\sum p^ir_i}{pm}P^R$, 其中和式取遍所有序列 $R=(r_1,r_2,\cdots)$, 使得 $\sum 2(p^i-1)r_i=l+2m(p-1)$.

证　证明需要注意到以下等式. 若 $s_1,s_2,\cdots$ 是正整数的有限序列, 而 B 取遍所有 $b_1,b_2,\cdots$ 使 $0\leqslant b_i\leqslant s_i$ 且 $\sum\limits_{i\geqslant 1}b_i=k$, 则有以下等式:

$$\sum_B\prod_i\binom{s_i}{b_i}=\binom{\sum s_i}{k}$$

这只要通过在 $\prod(1+x)^{s_i}=(1+x)^{\sum s_i}$ 中比较 x^k 的系数即可得出. 另外还有

$$\binom{r}{a}=\binom{p^ir}{p^ia},\qquad \binom{p^ir}{b}=0\ (\mathrm{mod}\ p)$$

其中 b 不能被 p^i 整除, 这只要通过在 $(1+x)^{rp^i}=(1+x^{p^i})^r$ 中比较 x^{ap^i} 的系数即可得出. 现在注意到乘积 $P^mS(l)$ 中对每个使 $\sum p^{i-1}a_i=m$ 的 Milnor 矩阵

$$\left\| \begin{matrix} * & r_1 - a_1 & r_2 - a_2 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ & & \cdots & \end{matrix} \right\|$$

包含有一项

$$\prod_i \binom{r_i}{a_i} P^{(r_1, r_2, \cdots)}$$

因此有

$$\begin{aligned} P^m S(l) &= \sum_R \sum_A \prod_i \binom{r_i}{a_i} P^R = \sum_R \sum_A \prod_i \binom{p^i r_i}{p^i a_i} P^R \\ &= \sum_R \sum_B \prod_i \binom{p^i r_i}{b_i} P^R = \sum_R \binom{\sum p^i r_i}{pm} P^R \end{aligned}$$

其中 R 取遍序列 $(r_1, r_2, \cdots)$ 使 $\sum 2(p^i - 1) r_i = l + 2m(p-1)$, A 取遍序列 $(a_1, a_2, \cdots)$ 使 $\sum p^i a_i = m$, 而 B 取遍序列使 $\sum b_i = pm$. 证毕.

推论 2.7.13 $P^m c(P^n) = (-1)^n \sum\limits_R \binom{|R|}{m} P^R$, 其中 $|R| = \sum p^{i-1} r_i$, R 取遍序列 $(r_1, r_2, \cdots)$ 使 $\sum (p^i - 1) r_i = (p-1)(m+n)$.

证 由推论 2.6.11, $c(P^n) = (-1)^n S(2n(p-1))$.

推论 2.7.14

$$c(P^{p^{n-1}+p^{n-2}+\cdots+p+1}) = (-1)^n P^{p^{n-1}} P^{p^{n-2}} \cdots P^p P^1$$

证 当 $n = 1$ 成立. 设对 $n-1$ 已成立, 则

$$\begin{aligned} (-1)^n P^{p^{n-1}} P^{p^{n-2}} \cdots P^p P^1 &= (-1) P^{p^{n-1}} c(P^{p^{n-2}+\cdots+1}) \\ = (-1)^{i+p^{n-2}+\cdots+p+1} P^{p^{n-1}} S(2(p^{n-1}-1)) & \\ = (-1)^{p^{n-1}+p^{n-2}+\cdots+p+1} S(2(p^n - 1)) &= c(P^{p^{n-1}+\cdots+p+1}) \end{aligned}$$

其中若 $\sum 2(p^i - 1) r_i = 2(p^n - 1)$, 则 $\sum p^i r_i = p^n - 1 + \sum r_i$. 而

$$1 \leqslant \sum r_i \leqslant 2(p^n - 1)/2(p-1)$$

因此 $p^n \leqslant \sum p^i r_i \leqslant p + \cdots + p^n$,

$$\binom{\sum p^i r_i}{p^n} = 1 \quad (\mathrm{mod}\ p)$$

从而有 $P^{p^{n-1}} S(2(p^{n-1} - 1)) = S(2(p^n - 1))$. 证毕.

定理 2.7.15 若 $a \geqslant 0, b > 1$ 为整数, 则

$$\sum_{k=0}^{b} P^{p^a k} c(P^{p^a(b-k)}) = 0$$

引理 2.7.16　a, b 为整数使 $p^a \leqslant r \leqslant p^a b$, 则

$$\sum_{k=0}^{b} (-1)^k \binom{r}{p^a k} = 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

证　记 $r = p^a s + t, 1 \leqslant s \leqslant b, 0 \leqslant t \leqslant p^a$, 因此有

$$\binom{p^a s + t}{p^a k} = \binom{s}{k} \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

这可由在 $(1+x)^{p^a s+t} = (1+x^{p^a})^s(1+x)^t\ (\mathrm{mod}\ p)$ 中比较 $x^{p^a k}$ 的系数得出, 再由等式

$$\sum_{k=0}^{b} (-1)^k \binom{s}{k} = 0 \qquad (1 \leqslant s \leqslant b)$$

引理得证.

定理 2.7.15 的证明　由推论 2.7.13, 定理中和式的 Milnor 基展开式中, P^R 的系数是 (R 满足 $\sum(p^i-1)r_i = (p-1)p^a b$)

$$\sum_{k=0}^{b} (-1)^{p^a(b-k)} \binom{|R|}{p^a k} = (-1)^b \sum_{k=0}^{b} (-1)^k \binom{|R|}{p^a k}$$

由引理 2.7.16, 这系数当 $p^a \leqslant |R| \leqslant p^a b$ 为 0, 而由 R 所满足的等式, 给出

$$|R| = \sum_{i \geqslant 1} p^{i-1} r_i = \frac{1}{p}\left[(p-1)p^a b + \sum_{i \geqslant 1} r_i\right]$$

同时有

$$0 \leqslant \sum r_i \leqslant \frac{1}{p-1} \sum_{i \geqslant 1} (p^i - 1) r_i = p^a b$$

因此所需不等式 (因为 $b > 1$)

$$\frac{p-1}{p} \cdot p^a b \leqslant |R| \leqslant p^a b$$

成立. 证毕.

推论 2.7.17　$Sq^{2^n} + c(Sq^{2^n}) = Sq^{2^{n-1}} c(Sq^{2^{n-1}})$, 其中 $n > 0$.

证　由定理 2.7.15, 令 $p = 2, a = n-1, b = 2$.

参 考 文 献

[1] Steenrod N E. 1962. Cohomology operation. Written and revised by D.B.A.Epstein. Princeton Univ. Proc.

[2] Milnor J. 1958. Steenrod algebra and its dual. Ann of Math 67. 150~171

[3] Milnor J, Moore J C. 1965. On the structure of Hopf algebras. Ann of Math 81, 211~264

[4] Peterson F P. 1974. Some formulas in the Steenrod algebra. Proc. A. M. S 45, 291~294

[5] Davis D M. 1974. The antiantomorphisms of Steenrod algebra. Proc A. M. S. 44, 235~236

[6] 林金坤. 1985. Peterson 公式等的推广. 数学进展, Vol 14 No. 4, 348~355

[7] Straffin P D J. 1975. Indentities for conjugation in the Steenrod algebra. Proc A. M. S. 49, 253~255

第 3 章　谱的同伦范畴

3.1　CW 谱

谱的同伦范畴实际上就是稳定同伦范畴. 首先解释 “稳定” 这个名词. 我们说某些现象是稳定的, 如果它出现在任一维数, 或者出现在充分大的维数, 并且它不依赖于这个维数本身, 而是在维数充分大的时候, 以相同的方式出现这种现象.

例 3.1.1　Freudenthal 定理 (见 [1]P.85) 指出, 双角锥 (suspension) 同态

$$S: \pi_{n+r}(S^n) \to \pi_{n+r+1}(S^{n+1})$$

当 $n > r+1$ 为同构. 例如 $\pi_{n+1}(S^n) \cong \pi_{n+2}(S^{n+1}) \cong Z_2$, 当 $n > 2$. $\pi_{n+r}(S^n)$ 当 $n > r+1$ 叫做球面 S^n 的稳定同伦群.

为了描述这种稳定现象, 我们引进谱的概念.

定义 3.1.2　CW 谱 E 是一序列有基点的 CW 复形 $\{(E_n, *)\}_{n\in\mathbf{Z}}$, 使每个 E_n 的双角锥 SE_n 是 (或者同胚于)E_{n+1} 的子复形, 即存在内射或嵌入 $\epsilon_n: SE_n \to E_{n+1}$. 子谱$F \subset E$ 是由子复形 $F_n \subset E_n$ 所组成使 $SF_n \subset F_{n+1}$.

注　ϵ_n 也可以减弱为一般的胞腔映射, 因为可以构造谱 $E' = \{E'_n\}$ 和同伦等价 $r_n: E'_n \to E_n$ 使下图可换:

$$\begin{array}{ccc} SE'_n & \subset & E'_{n+1} \\ \downarrow sr_n & & \downarrow r_{n+1} \\ SE_n & \xrightarrow{\epsilon_n} & E_{n+1} \end{array}$$

例 3.1.3　若 X 是 CW 复形, 可以定义谱 $E(X)$ 使

$$E(X)_n = \begin{cases} *, & \text{当 } n < 0 \\ S^n X, & \text{当 } n \geqslant 0 \end{cases}$$

定义 3.1.4　子谱 $F \subset E$ 使对所有 $n \in \mathbf{Z}$ 有 $F_n = *$, 称这个子谱 F 为 E 的 $-\infty$ 维胞腔. 设 e_n^d 是 E_n 的 d 维胞腔 (当 $d=0$ 不同于基点 *), 而且 e_n^d 不是 E_{n-1} 中任一胞腔的双角锥, 则子谱 $\{e_n^d, Se_n^d, \cdots, S^r e_n^d, \cdots\}$ 称为 E 的 $d-n$ 维胞腔 (这里 $S^r e_n^d$ 是 E_{n+r} 的胞腔). 谱 E 称为有限的, 若 E 只有有限个胞腔.

定义 3.1.5　谱 E 的 n 维架 $E^{(n)}$ 是 E 的所有维数 $\leqslant n$ 的胞腔的并集, 因此有滤子

$$\cdots \subset E^{(n)} \subset E^{(n+1)} \subset \cdots$$

而且 $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}} E^{(n)} = E$.

定义 3.1.6 谱之间次数 r 的函数 $f: E \to F$ 是一序列映射 $f_n: E_n \to F_{n-r}$ 使以下图形

$$\begin{array}{ccc} SE_n & \xrightarrow{sf_n} & SF_{n-r} \\ \downarrow \epsilon_n & & \downarrow \epsilon'_{n-r} \\ E_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & F_{n+1-r} \end{array}$$

可交换. 下面首先讨论次数 0(即 $r=0$) 的情况.

定义 3.1.7 $F \subset E$ 称为 E 中共尾 (cofinal) 子谱, 若对任意胞腔 $e_n \subset E_n$ 存在 m 使 $S^m e_n \subset F_{n+m}$. 显然, 对有限子复形 $K_n \subset E_n$, 也存在 m 使 $S^m K_n \subset F_{n+m}$.

引理 3.1.8 (1) 两个共尾子谱的交仍是共尾的.

(2)$E'' \subset E' \subset E$ 使 E' 在 E 中共尾而 E'' 在 E' 中共尾, 则 E'' 在 E 中共尾.

(3) 共尾子谱的任意个并集仍是共尾的.

证明是显然的.

定义 3.1.9 设 E, F 为谱. S 为所有 (E', f') 的集合, 其中 $E' \subset E$ 是共尾子谱, $f': E' \to F$ 为函数. 在 S 中定义如下关系: $(E', f') \sim (E'', f'')$ 当且仅当存在 S 中的 (E''', f''') 使 $E''' \subset E' \cap E''$ 是共尾的且 $f'|_{E'''} = f''|_{E'''} = f'''$. 由引理 3.1.8, 容易证明这是等价关系. 定义谱 E 到 F 的映射 $f: E \to F$ 为一个等价类 $\{(E', f')\}$.

为了定义两个映射的合成, 先证明以下引理.

引理 3.1.10 设 $f: E \to F$ 为谱之间的函数, 若 $F' \subset F$ 是共尾子谱, 则有共尾子谱 $E' \subset E$ 使 $f(E') \subset F'$.

证 设 R 是所有使 $f(G) \subset F'$ 的 E 的子谱 G 所组成的族, 令 $E' = \cup_{G\in R} G$, 则 E' 是 E 的子谱使 $f(E') \subset F'$. 只要证明 E' 在 E 中共尾. 设 $e = \{e_n, Se_n, \cdots\}$ 为 E 的任一胞腔, 而 $L \subset E_n$ 是含 e_n 的有限子复形, 因此 $f(L) \subset K$, K 为 F_n 的有限子复形. 由 F' 在 F 中共尾, 存在 m 使 $S^m K \subset F'_{n+m}$, 从而 $f(S^m L) \subset F'_{n+m}$. 因此 $G = \{S^m L, S^{m+1} L, \cdots\}$ 是 E 的子谱, 使 $f(G) \subset F'$, 即 $G \in R$, 因此 $\{S^m e_n, \cdots\} \subset E'$, 证明了 E' 在 E 中共尾. 证毕.

定义 3.1.11 若映射 $f: E \to F$ 是等价类 $\{(E', f')\}$, 映射 $g: F \to G$ 是等价类 $\{(F', g')\}$. 由引理 3.1.10, 存在 E'' 使 $f'(E'') \subset F'$, 则合成 $gf: E \to G$ 定义为等价类 $\{(E'', g'f'|_{E''})\}$

定义 3.1.12 若 $E = \{E_n\}$ 是谱, (X, x_0) 是 CW 复形, 定义谱 $E \wedge X = \{E_n \wedge X\}$, 其中 $\wedge$ 表示压挤乘积 (smash product). 这是因为 $S(E_n \wedge X) = S^1 \wedge (E_n \wedge X) \cong (S^1 \wedge E_n) \wedge X \subset E_{n+1} \wedge X$. 已给谱映射 $f: E \to F$ 和 CW 复形的映射 $g: X \to Y$, 令 $f \wedge g: E \wedge X \to F \wedge Y$ 是以 $(E' \wedge X, f' \wedge g)$ 为代表的映射 (因为由 E' 在 E 中共尾, 容易得出 $E' \wedge X$ 在 $E \wedge X$ 中共尾).

定义 3.1.13 谱映射 $f_0, f_1: E \to F$ 叫做同伦的, 若存在同伦 $h: E \wedge I^+ \to F$ 使 $h \circ i_0 = f_0, h \circ i_1 = f_1$, 其中 $i_0, i_1: E \to E \wedge I^+$ 为到 I^+ 中的 0, 1 的内射, I^+ 表示闭区间 $[0,1]$ 和一个不相交基点 $*$ 的并集.

注 若 $f_0, f_1: E \to F$ 以 $(E'_0, f'_0), (E'_1, f'_1)$ 为代表, 则 $f_0 \simeq f_1$ 当且仅当存在共尾子谱 $E'' \subset E'_0 \cap E'_1$ 和函数 $h'': E'' \wedge I^+ \to F$, 使 $h''_0 = f'_0|_{E''}, h''_1 = f'_1|_{E''}$. 同伦是等价关系, 用 $[E;F]_r$ 表示由 E 到 F 的次数是 r 的谱映射的同伦类的集合. 对象 (object) 是 CW 谱, 映照 (morphism) 是次数 r 的映射的同伦类, 则构成一个范畴 (category), 我们称之为谱的同伦范畴, 或稳定同伦范畴, 记为 $\mathcal{SP}$.

注 任意谱 E 和它的共尾子谱 E' 是同伦等价的. 因为内射函数 $i': E' \to E$ 决定一个内射映射 i, 而恒等 $1: E' \to E'$ 决定映射 $f: E \to E'$ 使合成 $f \circ i = 1_{E'}, i \circ f = 1_E$.

定义 3.1.14 谱映射 $f: E \to F$ 的映射锥 $F \cup_f CE$ 是一个谱 $\{(F \cup_f CE)_n\}$ 使 $(F \cup_f CE)_n = F_n \cup_{f'_n} (E'_n \wedge I)$, 其中 (E', f') 是映射 f 的代表. 若 (E'', f'') 是 f 的另一个代表, 则 $\{F_n \cup_{f'_n} (E'_n \wedge I)\}$ 和 $\{F_n \cup_{f''_n} (E''_n \wedge I)\}$ 有公共的共尾子谱 $\{F_n \cup_{f'''_n} (E'''_n \wedge I)\}$, 因此是同伦等价的.

定义 3.1.15 一族谱 $\{E^\alpha\}_{\alpha \in A}$ 的一点和 $\bigvee_\alpha E_\alpha$ 定义为

$$\left(\bigvee_\alpha E_\alpha\right)_n = \bigvee_\alpha E^\alpha_n$$

因为 $S\left(\bigvee_\alpha E^\alpha_n\right) = \bigvee_\alpha SE^\alpha_n \subset \bigvee_\alpha E^\alpha_{n+1}$.

定义 3.1.16 对任意谱 $E = \{E_n\}$, 定义谱 ΣE 为 $(\Sigma E)_n = E_{n+1}$, 谱 $\Sigma^{-1}E$ 为 $(\Sigma^{-1}E)_n = E_{n-1}$, 而 $\Sigma^r E = \Sigma(\Sigma^{r-1}E), \Sigma^{-r}E = \Sigma^{-1}(\Sigma^{-r+1}E)$. 若 $f: E \to F$ 为函数, 定义 $\Sigma^{\pm 1} f: \Sigma^{\pm 1}E \to \Sigma^{\pm 1}F$ 使 $(\Sigma^{\pm 1} f)_n = f_{n\pm 1}$. 因此若 $f: E \to F$ 为映射, 可定义映射 $\Sigma^{\pm 1} f: \Sigma^{\pm 1}E \to \Sigma^{\pm 1}F$ 使若 $f_0 \simeq f_1$, 则 $\Sigma^{\pm 1} f_0 \simeq \Sigma^{\pm 1} f_1$. 同样定义 $\Sigma^r f = \Sigma(\Sigma^{r-1}f), \Sigma^{-r}f = \Sigma^{-1}(\Sigma^{-r+1}f)$. 因此 $\Sigma^r: \mathcal{SP} \to \mathcal{SP}$ 为函子, 而且 $\Sigma^r \circ \Sigma^{r'} = \Sigma^{r+r'}$ 对任意 $r, r' \in Z$. 另外, 次数 0 的映射 $f: \Sigma^r E \to F$ 就是次数 r 的映射 $f: E \to F$.

定义 3.1.17 设谱 $E(S^0)$ 为

$$E(S^0)_n = \begin{cases} *, & 当\ n < 0 \\ S^n, & 当\ n \geqslant 0 \end{cases}$$

则 $E(S^0)$ 称为球谱, 有时简记成球谱 S^0, 定义任意谱 E 的 n 维同伦群 $\pi_n(E) = [\Sigma^n S^0; E] = [S^0; E]_n$, 对 $n \in \mathbf{Z}$. 这个同伦类的集合是一个群, 因为有以下命题.

命题 3.1.18 $[\Sigma^n S^0; E]$ 和群的正向极限

$$\operatorname{dirlim}_k \pi_{n+k}(E_k, *)$$

一一对应. 因此前者的群结构可由后者决定.

证 首先, $\Sigma^n S^0$ 有共尾子谱 $\Sigma^{n-r}E(S^r)$ $(r \geqslant 0)$, 函数 $f: \Sigma^{n-r}E(S^r) \to E$ 恰好是 CW 复形的映射 $f: S^r \to E_{r-n}$ 和它的双角锥 $S^s f: S^{r+s} \to S^s E_{r-n} \subset E_{r+s-n}$. 群 $\pi_{n+k}(E_k, *)(k \geqslant \min(2, 2-n))$ 和同态

$$\pi_{n+k}(E_k, *) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{n+k+1}(SE_k, *) \xrightarrow{\epsilon_{k*}} \pi_{n+k+1}(E_{k+1}, *)$$

定义了 Abel 群的正向极限群系, 因此可定义

$$\alpha: [\Sigma^n S^0; E] \to \operatorname{dirlim}_k \pi_{n+k}(E_k, *)$$

为 $\alpha\{\Sigma^{n-r}E(S^r), f\} = \{[f]\}$. α 显然是满的. 若 $\{[f]\} = 0$, 由正向极限的定义, 存在 $S^s f$ 的零伦 (某个 s) $H: S^{r+s} \wedge I^+ \to E_{r+s-n}$. 因此, $\{\Sigma^{n-r-s}S^{r+s} \wedge I^+, H\}$ 决定一个谱映射 $\Sigma^n S^0 \wedge I^+ \to E$ 是 $\{\Sigma^{n-r}E(S^r), f\}$ 的零伦, 因此 α 是单的. 证毕.

定义 3.1.19 谱映射 $f: E \to F$ 叫做弱同伦等价, 如果 f 导出同构 $f_*: \pi_n(E) \to \pi_n(F)$ (所有 $n \in \mathbf{Z}$).

引理 3.1.20 设有谱和函数的同伦可换图形

$$\begin{array}{ccccc} & E & \xrightarrow{f} & F \\ & g\uparrow & \nwarrow k & \uparrow h \\ \Sigma^d S^0 = & \partial e & \overset{i}{\hookrightarrow} & e \end{array}$$

即 $fg \overset{H}{\simeq} h|_{\partial e}$, 且 f 是弱同伦等价, 则存在函数 k 使 $fk \overset{K}{\simeq} h$. 这里 e 是一个谱胞腔, $\partial e \overset{i}{\hookrightarrow} e$ 为内射.

证 因为 $e = \{e^{d+1}, Se^{d+1}, S^2 e^{d+1}, \cdots\}$ 是谱胞腔, 而 $\Sigma^d S^0 = \partial e = \{S^d, S^{d+1}, S^{d+2}, \cdots\}$ 是球谱. 因此存在 N 使 $g_k = S^{k+N} g_{-N}, h_k = S^{k+N} h_{-N}$. 设 M_{f_k} 表示 CW 复形映射 $f_k: E_k \to F_k$ 的映射柱, 从而 E_k 是 M_{f_k} 的子复形. 因此映射偶

$$(S^{k+N} h_{-N}, S^{k+N} g_{-N}): (e^{d+k+1}, \partial e^{d+k+1}) \to (M_{f_k}, E_k)$$

决定群 $\operatorname{dirlim}_k \pi_{d+k+1}(M_{f_k}, E_k)$ 的一个元素. 但是序列

$$\cdots \to \operatorname*{dirlim}_k \pi_{k+d}(E_k) \xrightarrow{\operatorname{dirlim} f_k} \operatorname*{dirlim}_k \pi_{d+k}(F_k) \to \operatorname*{dirlim}_k \pi_{d+k}(M_{f_k}, E_k) \to \cdots$$

是恰当的, 且设 $\operatorname{dirlim}_k f_k$ 是同构, 因此

$$\operatorname{dirlim}_k \pi_{d+k+1}(M_{f_k}, E_k) = 0$$

从而 $\{(h_k, g_k)\}$ 为 0, 因此存在 $h'_r: e^{d+r+1} \to E_r$ 使 $h'_r|_{\partial e^{d+r+1}} = S^{r+N} g_{-N}$ 且有 $S^{r+N} h_{-N}$ 到 $f_r h'_r$ 的同伦 $k'_r: e^{d+r+1} \wedge I^+ \to F_r$. 取

$$e'_m = \begin{cases} S^{m+d}, & \text{当 } -N \leqslant m < r, \\ e^{m+d+1}, & \text{当 } m \geqslant r, \end{cases} \qquad h'_m = \begin{cases} g_m, & \text{当 } -N \leqslant m < r \\ S^{m-r} h'_r, & \text{当 } m \geqslant r \end{cases}$$

以及

$$k_m(x,t)=\begin{cases} f_m g_m(x), & \text{当 } -N\leqslant m<r \\ S^{m-r}k'_r(x,t), & \text{当 } m\geqslant r \end{cases}$$

则 e' 在 e 中共尾, 且 k_m 决定了所求的 k. 证毕.

引理 3.1.21 设有谱和映射的同伦可换图形

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ g\uparrow & \nwarrow k & \uparrow h \\ A & \subset & X \end{array}$$

即 $fg\overset{H}{\simeq}h|_A$, 且 f 为弱同伦等价, 则存在映射 $k{:}\,X\to E$ 使 $fk\overset{K}{\simeq}h$, 且 K 是 H 的扩张.

证 设 h 的代表为 (X',h'), 同伦 H 的代表为 $\{A'\wedge I^+,H'\}$ 而且 $A'\subset X'$.f 的代表为 (E',f').

令

$$\mathcal{S}=\left\{(V,K')\,\middle|\,\begin{array}{l} A'\subset V\subset X' \\ K'{:}\,V\wedge I^+\to F\text{将}h'|_V \\ \text{变形为合成}V\xrightarrow{k'}E'\xrightarrow{f'}F \end{array}\right\}$$

则 $\mathcal{S}$ 非空, 由 Zorn 引理, $\mathcal{S}$ 有最大元 (V,K'). 若 V 在 X' 中不是共尾的, 则有胞腔 $e^d_n\subset X'_n$ 使对某 m, $S^m e_n\not\subset V_{n+m}$. 令 X' 的胞腔

$$e=\{e^d_n,Se^d_n,S^2e^d_n,\cdots\}$$

而且 $V'=V\cup e$, 则 $V\subset V'\subset X'$. 因为

$$\partial e=\{S^{d-1},S^d,S^{d+1},\cdots\}=\Sigma^{d-1}S^0$$

且 $f_*{:}\,\pi_{d-1}(E)\to\pi_{d-1}(F)$ 为同构, 因此存在同伦 $\phi{:}\,\partial e\wedge I^+\to F$ 使 $\phi_0=h|_{\partial e}$, ϕ_1 为合成 $\partial e\to E'\xrightarrow{f'}F$, 则 ϕ 可扩张为 $\overline{\phi}{:}\,e\wedge I^+\to F$ 使 $\overline{\phi}_\partial=h|_e$, $\overline{\phi}_1$ 为合成 $e\xrightarrow{k'}E'\xrightarrow{f'}F$(见引理 3.1.20). 因此, $\overline{\phi}$ 和 K' 合在一起为

$$K''{:}\,V'\wedge I^+\to F$$

是h 和 $f'k''$ 的同伦, 其中 $k''{:}\,V'\to E'$. 因此与 (V,K') 是 $\mathcal{S}$ 最大元矛盾, 从而 V 是 X' 的共尾子谱. 令 $K=\{(V\wedge I^+,K')\}$, 则 K 是 h 和合成 $X\xrightarrow{k}E\xrightarrow{f}F$ 的同伦. 证毕.

定理 3.1.22 若 $f{:}\,E\to F$ 为弱同伦等价, 则对任意谱 X, $f_*{:}\,[X;E]\to[X;F]$ 一一对应.

证 由命题 3.1.21, 取 $A=*\subset X$, 得出 f_* 是满的. 若 $fk_0\simeq fk_1$, 有映射 $H{:}\,X\wedge I^+\to F$ 使 $H_0=fk_0$, $H_1=fk_1$. 令 $X'=X\wedge I^+$, $A'=X\wedge\dot{I}^+\cup(*\wedge I^+)$,

$G: A' \to E$, 由 k_0, k_1 定义, 则有同伦可换图形

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ G\uparrow & \nwarrow K & \uparrow H \\ A' & \subset & X' \end{array}$$

从而由引理 3.1.21, 存在 $K: X' \to E$ 使 $K|_{A'} = G$, 因此 K 是 k_0, k_1 的同伦, f_* 是一一的. 证毕.

定理 3.1.23(J.H.C.Whitehead) $f: E \to F$ 是弱同伦等价当且仅当 f 是同伦等价.

证 若 f 是弱同伦等价, 则 $f_*: [F; E] \to [F; F]$ 是一一对应, 有映射 $g: F \to E$ 使 $fg \simeq 1_F$. 又 $f_*[gf] = [fgf] = [1_F \cdot f] = [f] = [f \cdot 1_E] = f_*[1_E]$, 因此 $gf \simeq 1_E$, f 是同伦等价. 证毕.

3.2 上纤维序列

定义 3.2.1 对任意谱映射 $f: E \to F$, 以下序列

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{j} F \cup_f CE$$

叫特殊上纤维序列.(一般) 上纤维序列是序列 $G \to H \to K$ 使下图

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & H & \longrightarrow & K \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma \\ E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{j} & F \cup_f CE \end{array}$$

同伦可换, 且 α, β, γ 为同伦等价.

命题 3.2.2 存在映射 k 使以下序列

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{j} F \cup_f CE \xrightarrow{k} E \wedge S^1 \xrightarrow{f \wedge 1} F \wedge S^1$$

每相邻两个映射形成上纤维序列.

证 可由 CW 复形情况下的上纤维序列 (或者称为 Puppe 序列, 见 [2]238 页定理 6.4.7) 再过渡到 CW 谱而得到. 证毕.

定理 3.2.3 存在同伦等价 $f: E \wedge S^1 \to \Sigma E$ 使对于 E 的映射是自然的.

证 令 $E'_n = E_n \wedge \{n\}^+ \bigcup\limits_{k<n} S^{n-k}E_k \wedge [k, k+1]^+$ $(n \in \mathbf{Z})$, 令 $r_n: E'_n \to E_n$ 为投射, 这定义了一个函数从而决定谱映射 $r: E' \to E$. $i_n: E_n \to E'_n$ 是 r_n 的同伦逆, 因此 $r_{n*}: \pi_*(E'_n) \to \pi_*(E_n)$ 为同构, $r_*: \pi_*(E') \cong \pi_*(E)$. 由定理 3.1.23, r 是同伦等价.

将点 $(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \in S^1$ 用 x 表示 $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. 作同伦 $H: (S^1 \wedge S^1) \times I \to S^1 \wedge S^1$ 为

$$H([x,y],t) = [x + t(1-x-y), y + t(x-y)] \qquad (0 \leqslant x, y \leqslant 1)$$

因此 $H([x,y],0) = [x,y]$, $H([x,y],1) = [\nu(y), x]$, 其中 $\nu(y) = 1-y$. 定义 $f_n: E'_n \wedge S^1 \to E_{n+1}$ 为

$$f_n[\xi, n, y] = [\nu^n(y), \xi] \in S^1 \wedge E_n \subset E_{n+1}$$

$$f_n[s, x, \xi, m+t, y] = [s, H([x, \nu^m(y)], t), \xi] \in S^{n-m+1}E_m$$

因此 f_n 连续且 $Sf_n = f_{n+1}|_{S(E'_n \wedge S^1)}$, 从而得出函数 $f: E' \wedge S^1 \to \Sigma E$.

作 $g_n: SE_n \to E'_n \wedge S^1$ 使 $g_n[x,\xi] = [\xi, n, \nu^n(x)]$ 满足 $g_n|_{S^2 E_{n-1}} \simeq Sg_{n-1}$, $f_n g_n = 1$, $g_n f_n \simeq 1$. 因此 $f_*: \pi_*(E' \wedge S^1) \to \pi_*(\Sigma E)$ 为同构, 由定理 3.1.23, f 是同伦等价. 显然 f 对 E 的映射是自然的. 证毕.

推论 3.2.4　$f: E \to F$ 导出上纤维序列

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{j} F \cup_f CE \to \Sigma E \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma F$$

推论 3.2.5　可给集合 $[E;F]$ 以 Abel 群结构使合成是双线性的.

证　因为函子 Σ 是可逆的, 因此 $\Sigma: [E;F] \to [\Sigma E; \Sigma F]$ 是一一对应. 由定理 3.2.3, $[\Sigma E; \Sigma F] \to [E \wedge S^1; F \wedge S^1]$ 也是一一对应. 因此 $\sigma: [E;F]: \to [E \wedge S^2; F \wedge S^2]$ 也是一一对应. 但 S^2 是可交换 H 上群 (见文献 [1]29 页 2.43), 有可换上乘法 $u: S^2 \to S^2 \vee S^2$ 导出 $E \wedge S^2$ 的可换上乘法

$$u': E \wedge S^2 \to E \wedge (S^2 \vee S^2) \cong (E \wedge S^2) \vee (E \wedge S^2)$$

因此 u' 导出 $[E \wedge S^2; F \wedge S^2]$ 的 Abel 群结构 (见文献 [1]29 页 2.44), 再按以上一一对应关系给出 $[E;F]$ 以 Abel 群结构. 证毕.

引理 3.2.6　已给如下谱和映射的同伦可换图形

$$\begin{array}{ccccccccc}
G & \xrightarrow{g} & H & \xrightarrow{h} & K & \xrightarrow{k} & G \wedge S^1 & \xrightarrow{g \wedge 1} & H \wedge S^1 \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \alpha \wedge 1 & & \downarrow \beta \wedge 1 \\
G' & \xrightarrow{g'} & H' & \xrightarrow{h'} & K' & \xrightarrow{k'} & G' \wedge S^1 & \xrightarrow{g' \wedge 1} & H' \wedge S^1
\end{array}$$

使上下横行为上纤维序列, 而且第一和第四方块同伦可换, 则存在映射 γ 使所有方块同伦可换.

证　不妨设 $K = H \cup_g CG$, $K' = H' \cup_{g'} CG'$. 因为 H 和映射柱 M_g 同伦等价, 因此不妨设 g 是内射. 选择 β 的代表 (B, β'), g' 的代表 (A', f') 和 α 的代表 (A, α') 使 $g(A) \subset B$, 且 $\alpha'(A) \subset A'$, 则有同伦可换图形

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \xrightarrow{g} & B \to & & B \cup_g CA \to & & A \wedge S^1 & \xrightarrow{g \wedge 1} & B \wedge S^1 \\
\downarrow \alpha' & & \downarrow \beta' & & \downarrow \gamma' & & \downarrow \alpha' \wedge 1 & & \downarrow \beta' \wedge 1 \\
A' & \xrightarrow{f'} & H' \to & & H' \cup_{f'} CA' \to & & A' \wedge S^1 & \xrightarrow{f' \wedge 1} & H' \wedge S^1
\end{array}$$

使 $g: A \hookrightarrow B$ 为内射而 $f'\alpha' \simeq \beta' g$. 因为 α', β', f', g 都是函数, 容易看出 CW 复形的同伦扩张性质可以推广到 CW 谱和它们之间的函数. 因此存在函数 $\beta'': B \to H'$ 使 $f'\alpha' = \beta'' g$ 而 $\beta'' \simeq \beta'$. 定义 γ' 为 $\gamma'|_B = \beta''$, $\gamma'|_{CA} = C\alpha': CA \to CA'$. 因此若 β' 换成 β'', 图形严格可换, 而对 β' 则同伦可换. 证毕.

命题 3.2.7 若 $G \xrightarrow{g} H \xrightarrow{h} K$ 为上纤维序列, 则对任意谱 E, 以下序列恰当:

$$[E;G] \xrightarrow{g_*} [E;H] \xrightarrow{h_*} [E;K]$$

$$[G;E] \xleftarrow{g^*} [H;E] \xleftarrow{h^*} [K;E]$$

证 (1) 由 $hg \simeq 0$ 得出 $h_* g_* = 0$, 因此 $\operatorname{im} g_* \subset \ker h_*$. 若 $f: E \to H$ 使 $hf \simeq 0$. 将引理 3.2.6 应用到如下图形:

$$\begin{array}{cccccccc} E & \xrightarrow{i_0} & E \wedge I^+ & \to & E \wedge S^1 & \xrightarrow{1} & E \wedge S^1 \\ \downarrow f & & \downarrow \bar{h} & & \downarrow k & & \downarrow f \wedge 1 \\ H & \xrightarrow{h} & K & \to & G \wedge S^1 & \xrightarrow{g \wedge 1} & H \wedge S^1 \end{array}$$

其中 $\bar{h}: E \wedge I \to K$ 为 $hf \simeq 0$ 的同伦, 则存在 k 使 $(g \wedge 1)k \simeq f \wedge 1$, 由自然等价 $\sigma: [E;G] \to [E \wedge S^1; G \wedge S^1]$(见推论 3.2.5 的证明), 存在 $k': E \to G$ 使 $k' \wedge 1 \simeq k$. 因此 $(gk') \wedge 1 = (g \wedge 1)(k' \wedge 1) \simeq (g \wedge 1)k \simeq f \wedge 1$. 再由自然等价 $\sigma: [E;H] \to [E \wedge S^1; H \wedge S^1]$, 则 $gk' \simeq f$, 即 $g_*[k'] = [f]$, $\ker h_* \subset \operatorname{im} g_*$.

(2) 容易得出 $\operatorname{im} h^* \subset \ker g^*$. 若 $f: H \to E$ 使 $fg \simeq 0$, 将引理 3.2.6 应用到如下图形:

$$\begin{array}{ccccccc} G & \xrightarrow{g} & H & \xrightarrow{h} & K & \to & G \wedge S^1 \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & E & \xrightarrow{1} & E & \to & * \end{array}$$

则存在 $f': K \to E$ 使 $f'h \simeq f$, 即 $h^*[f'] = [f]$, $\ker g^* \subset \operatorname{im} h^*$. 证毕.

下面说明常用的一种所谓回拖 (pullback) 的概念. 设有映射 $f: X \to W$ 和 $g: V \to W$,

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{hf} & X & \xleftarrow{k} & Y \\ \| & & \downarrow f & & \downarrow l \\ U & \xleftarrow{h} & W & \xleftarrow{g} & V \end{array}$$

若令 $V \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} U$ 为上纤维序列且使以上图形同伦可换. 因此有如下命题.

命题 3.2.8 已给映射 $f: X \to W$, $g: V \to W$ 则存在谱 Y(称为回拖) 和映射 k, l, 使 k 和 g 有相同的上纤维 U.

3.3　广义同调论和 Ω 谱

定义 3.3.1　设 (X,x_0) 是 x_0 为基点的 CW 复形, n 是整数, E 为任意谱, 我们将

$$E_n(X)=\pi_n(E\wedge X)=[\Sigma^n S^0;E\wedge X]$$
$$E^n(X)=[E(X);\Sigma^n E]=[\Sigma^{-n}S^0\wedge X;E]$$

分别叫做相应于谱 E 的 (约简) 广义同调群和 (约简) 广义上同调群. 若 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 是保持基点的 CW 复形之间的映射, 则 f 导出 E 同调群和 E 上同调群之间的同态

$$E_n(f)=(1\wedge f)_*:E_n(X)\to E_n(Y)$$
$$E^n(f)=E(f)^*:E^n(Y)\to E^n(X)$$

因此 $E_n(-)$, $E^n(-)$ 分别是 CW 复形范畴 $\mathcal{PW}$ 到 Abel 群范畴 $\mathcal{A}b$ 的正函子和反函子.

定义 3.3.2　双角锥同构

$$\sigma_n:E_n(X)\to E_{n+1}(SX),\qquad \sigma^n:E^{n+1}(SX)\to E^n(X)$$

定义为如下合成:

$$\sigma_n:E_n(X)=[\Sigma^n S^0;E\wedge X]\xrightarrow{\Sigma}[\Sigma^{n+1}S^0;\Sigma E\wedge X]$$
$$\xrightarrow{\cong}[\Sigma^{n+1}S^0;E\wedge S^1\wedge X]=E_{n+1}(SX)$$
$$\sigma^n:E^{n+1}(SX)=[E(SX);\Sigma^{n+1}E]\xleftarrow{i^*}[\Sigma E(X);\Sigma^{n+1}E]$$
$$\xrightarrow{\Sigma^{-1}}[E(X);\Sigma^n E]=E^n(X)$$

引理 3.3.3　设 E 为有限谱, $\{F^\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 F 的一族子谱使指标集 A 为有向集, 而 $\{F^\alpha\}$ 按包含关系也成为有向集, 且 $F=\bigcup\limits_\alpha F^\alpha$, 则内射 $i_\alpha:F^\alpha\to F$ 导出同构

$$\{i_{\alpha*}\}:\mathrm{dirlim}_\alpha[E;F^\alpha]\to[E;F]$$

证　因为 $E=\{E_n\}$ 是有限谱, 存在整数 N 使 E_N 为有限 CW 复形而 $E_m=S^{m-N}E_N$ $(m\geqslant N)$. 若 $f:E\to F$ 为以 (E',f') 为代表的谱映射, 我们可假定 $E'_N=E_N$(必要的话可增加 N), 则存在有限子复形 $K\subset F_N$ 使 $f'(E_N)\subset K$, 因为 A 是有向的且 $\cup_\alpha F^\alpha=F$, 存在 α_0 使 $K\subset F_N^{\alpha_0}$, 令 E'' 为 E 的共尾子谱使

$$E''_m=\begin{cases}*, & \text{当 } m<N\\ S^{m-N}E_N, & \text{当 } m\geqslant N\end{cases}$$

而 $f'':E''\to F^{\alpha_0}$ 为函数使 $f''=f'|_{E''}$, 则 (E'',f'') 决定谱映射 $g:E\to F^{\alpha_0}$ 使 $i_{\alpha_0*}[g]=[f]$, 因此 $\{i_{\alpha*}\}$ 为满同态.

若 $g: E \to F^\beta$ 使 $\{i_{\alpha*}\}\{[g]\}=0$, 令 $h: E\wedge I^+ \to F$ 为 $i_\beta g$ 的零伦.$E\wedge I^+$ 仍是有限谱, 可重复以上证法, 找到 $\gamma \geqslant \beta$ 和 $j_\beta^\gamma g$ 的零伦, 其中 $j_\beta^\gamma: F^\beta \to F^\gamma$ 为内射. 因此由正向极限的定义, $\{[g]\}=0$, 即 $\{i_{\alpha*}\}$ 单. 证毕.

推论 3.3.4 对任意谱 E 和 CW 复形 Y 的一族子复形 $\{Y^\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使成为有向集, 且 $Y=\bigcup\limits_\alpha Y^\alpha$, 则内射 $i_\alpha: Y^\alpha \to Y$ 导出同构, 即

$$\{i_{\alpha*}\}: \mathrm{dirlim}_\alpha\, E_n(Y^\alpha) \to E_n(Y), \quad n\in Z$$

证 这恰好是以上引理 3.3.3, 如果令 $F^\alpha = E\wedge Y^\alpha$. 因为 $\Sigma^n S^0$ 是有限谱. 证毕.

定理 3.3.5 广义同调函子$E_n(-): \mathcal{PW} \to \mathcal{A}b$ 满足以下公理:

(a) 恰当公理: 对有基点的 CW 复形偶 (X, A, x_0) 存在自然变换 $\partial_*: E_n(-) \to E_{n-1}(-)$ 和恰当序列如下:

$$\to E_n(A) \xrightarrow{i_*} E_n(X) \xrightarrow{j_*} E_n(X\cup_i CA) \xrightarrow{\partial_*} E_{n-1}(A) \to \cdots$$

(b) 一点和公理: 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族有基点的 CW 复形, $i_\alpha: X_\alpha \to \bigvee\limits_\alpha X_\alpha$ 为内射, 则

$$\{i_{\alpha*}\}: \bigoplus_\alpha E_n(X_\alpha) \xrightarrow{\cong} E_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$$

(c) 同伦公理: 若 $f\simeq g: (X,x_0)\to(Y,y_0)$ 则 $f_* = g_*: E_n(X) \to E_n(Y)$.

证 (a) 设谱 $E=\{E_n\}$, 因为 $E_n\wedge(X\cup_i CA) \cong E_n\wedge X \cup C(E_n\wedge A)$ $(n\in \mathbf{Z})$, 因此

$$E\wedge A \xrightarrow{1\wedge i} E\wedge X \xrightarrow{1\wedge j} E\wedge(X\cup CA) \xrightarrow{k} \Sigma(E\wedge A)$$

是上纤维序列, 由命题 3.2.7, 以下序列恰当:

$$\cdots \to [\Sigma^n S^0; E\wedge A] \xrightarrow{(1\wedge i)_*} [\Sigma^n S^0; E\wedge X] \xrightarrow{(1\wedge j)_*}$$
$$[\Sigma^n S^0; E\wedge (X\cup CA)] \xrightarrow{k_*} [\Sigma^n S^0; \Sigma E\wedge A] \to \cdots$$

这就是所求的 E 同调群恰当序列.

(b) 首先证明

$$(i_{X*}, i_{Y*}): E_n(X)\oplus E_n(Y) \xrightarrow{\cong} E_n(X\vee Y)$$

设 $f: \Sigma^{-1}(E\wedge Y) \to E\wedge X$ 为常值映射, 则以下为上纤维序列

$$\Sigma^{-1}(E\wedge Y) \xrightarrow{f} E\wedge X \xrightarrow{i_X} (E\wedge X)\cup_f C(\Sigma^{-1}E\wedge Y) \xrightarrow{k} E\wedge Y \to \Sigma E\wedge X$$

其中 $(E\wedge X)\cup_f C(\Sigma^{-1}E\wedge Y) \simeq (E\wedge X)\vee(E\wedge Y) \simeq E\wedge(X\vee Y)$, 而且存在映射 $l: E\wedge(X\vee Y) \to E\wedge X$ 使 $li_X \simeq 1$. 因此有短恰当序列

$$0 \to E_n(X) \xrightarrow{i_{X*}} E_n(X\vee Y) \xrightarrow{k_*} E_n(Y) \to 0$$

而且 $l_* i_{X*} = 1$, 从而序列可裂:

$$(i_{X*}, i_{Y*}): E_n(X)\oplus E_n(Y) \xrightarrow{\cong} E_n(X\vee Y)$$

由归纳法, 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 中 A 有限, 则有同构

$$\{i_{\alpha*}\}: \bigoplus_\alpha E_n(X_\alpha) \xrightarrow{\cong} E_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$$

一般地, 设 $\mathcal{B}$ 表示 A 的所有有限子集的集合, $\mathcal{B}$ 中按包含关系给以序使 $\mathcal{B}$ 成为有向集. 对每个 $B\in\mathcal{B}$, 令 $Y^B=\bigvee_{\alpha\in B}X_\alpha\subset\bigvee_{\alpha\in A}X_\alpha$, 则有可换图形

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{dirlim} E_n(Y^B) & \overset{\{i_{B*}\}}{\underset{\cong}{\longrightarrow}} & E_n(\bigvee_{\alpha\in A} X_\alpha) \\
\cong \uparrow \mathrm{dirlim}\{i_{\alpha*}\} & & \uparrow \{i_{\alpha*}\} \\
\mathrm{dirlim} \bigoplus_{\alpha\in B} E_n(X_\alpha) & \overset{\{j_{B*}\}}{\underset{\cong}{\longrightarrow}} & \oplus_{\alpha\in A}E_n(X_\alpha)
\end{array}$$

其中 $j_B: \bigoplus_{\alpha\in B} E_n(X_\alpha) \to \bigoplus_{\alpha\in A} E_n(X_\alpha)$ 为内射 $(B\in\mathcal{B})$. 左列由以上结论为同构, 上横行由推论 3.3.4 为同构, 而下横行用简单的代数推导可知是同构, 因此得出右列为同构.

(c) 是显然的. 证毕.

注 众所周知, 普通非约简同调群 $H_n(X)$ 满足 Eilenberg-Steenrod 的 7 个公理. 公理 1~2 是指 $H_n(-)$ 是一个函子, 公理 3 是存在自然变换 ∂_*, 公理 6 和 7 是切除公理和维数公理. 但是非约简情况下的切除公理等价于约简情况下的一点和公理, 因此广义同调群满足除维数公理外的 6 个公理. 一般地, 若 S^0 是零维球面, n 为整数, $E_n(S^0)\neq 0$(即非约简情况下一点空间的 E 同调群非零), 这是广义同调群和普通同调群的区别. $E_n(S^0)$(所有 $n\in\mathbf{Z}$) 叫做广义 E 同调理论 $E_n(-)$ 的系数群.

下面不加证明的叙述广义上同调函子的类似结果.

定理 3.3.6 广义上同调反函子 $E^n(-):\mathcal{PW}\to\mathcal{A}b$ 满足以下公理:

(a) 恰当公理: 对每个有基点 CW 复形偶 (X,A,x_0), 存在自然变换 $\delta^*: E^n(-)\to E^{n+1}(-)$ 和恰当序列如下:

$$\to E^{n-1}(A)\xrightarrow{\delta^*}E^n(X\cup_i CA)\xrightarrow{j^*}E^n(X)\xrightarrow{i^*}E^n(A)\to\cdots$$

(b) 一点和公理: 任意 CW 复形族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $i_\alpha: X_\alpha\to\bigvee_\alpha X_\alpha$ 为内射, 则存在同构

$$\{i_\alpha^*\}: E^n(\bigvee_\alpha X_\alpha)\longrightarrow\prod_\alpha E^n(X_\alpha)$$

(c) 同伦公理: 若 $f\simeq g:(X,x_0)\to(Y,y_0)$, 则 $f^*=g^*:E^n(Y)\to E^n(X)$.

注 广义 E 同调群的系数群为 $E_n(S^0)=\pi_n(E\wedge S^0)=\pi_n(E)$ $(n\in Z)$. 广义上同调群的系数群为 $E^n(S^0)=[E(S^0);\Sigma^n E]=\pi_{-n}(E)$ $(n\in Z)$, 其中 S^0 是零维球面而不是球谱.$\pi_n(E)$ 可按命题 3.1.18 中的同构

$$\pi_n(E) \cong \text{dirlim}_k\, \pi_{n+k}(E_k)$$

来计算, 其中正向极限按照如下定向:

$$\pi_{n+m}(E_m) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{n+m+1}(SE_m) \xrightarrow{(\epsilon_m)_*} \pi_{n+m+1}(E_{m+1})$$

定理 3.3.7 设 $T_*(-): k_*(-) \to k'_*(-)$ 为满足定理 3.3.5 的两个广义同调函子之间的自然变换, 使得 $T_q(S^0): k_q(S^0) \to k'_q(S^0)$ 对所有 $q < N$ 为同构而对 $q = N$ 满, 则对 $(n-1)$ 连通的 CW 复形 X, $T_q(X): k_q(X) \to k'_q(X)$ 当 $q < n + N$ 为同构而当 $q = n + N$ 满.

定理 3.3.8 设 $T^*(-): k^*(-) \to k'^*(-)$ 为满足定理 3.3.6 的两个广义上同调函子之间的自然变换使得 $T^q(S^0): k^q(S^0) \to k'^q(S^0)$ 对 $q > N$ 为同构而当 $q = N$ 满, 则对任意 n 维 CW 复形 X, $T^q(X): k^q(X) \to k'^q(X)$ 当 $q > n + N$ 为同构而当 $q = n + N$ 满.

定义 3.3.9 设 $E = \{E_n\}$ 为 CW 谱, 若 $\epsilon_n: SE_n \to E_{n+1}$ 在一一对应 $[SE_n; E_{n+1}] \xrightarrow{A} [E_n, \Omega E_{n+1}]$(见文献 [1]13 页 3.2.8) 之下的伴随 $\epsilon'_n: E_n \to \Omega E_{n+1}$ 是弱同伦等价 (对所有 $n \in \mathbf{Z}$), 称 E 为 Ω 谱.

定理 3.3.10 若 E 为 Ω 谱, 则对任意 CW 复形 (X, x_0), $E^n(X) \cong [X, x_0; E_n, *]$ 是自然同构.

证 记 $k^n(X) = [X, x_0; E_n, *]$, 令 $\sigma: k^{n+1}(SX) \to k^n(X)$ 为如下自然同构:

$$[SX, *; E_{n+1}, *] \xrightarrow{\cong} [X, x_0; \Omega E_{n+1}, w_0] \xleftarrow{(\epsilon'_n)_*} [X, x_0; E_n, *]$$

其中 ϵ'_{n*} 由定理 3.1.22 为同构. 由 Puppe 恰当序列 (见文献 [1]27~28 页),

$$Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{j} X \cup_f CY \to SY$$

导出恰当序列

$$\cdots \to k^{n-1}(Y) \to k^n(X \cup_f CY) \to k^n(X) \to k^n(Y) \to \cdots$$

容易证明以下的同构:

$$\{i^*_\alpha\}: [\bigvee_\alpha X_\alpha, *; E_n, *] \cong \Pi_\alpha [X_\alpha, *; E_n, *]$$

即 $k^n(X)$ 满足一点和公理. 定义

$$T^n(X): k^n(X) \to E^n(X)$$

如下:

设 $f: (X, x_0) \to (E_n, *)$, 令

$$E'(X)_m = \begin{cases} *, & \text{当 } m < n \\ S^{m-n}X, & \text{当 } m \geqslant n \end{cases}$$

这是 $\Sigma^{-n}E(X)$ 的共尾子谱. 令 $f': E'(X) \to E$, $f'_m = S^{m-n}f$(当 $m \geqslant n$), f'_m 为常值

(当 $m < n$), 则 $(E'(X), f')$ 决定谱映射 $\bar{f}: \Sigma^{-n}E(X) \to E$, 令 $T^n(X)[f] = [\bar{f}]$. 由以下图形可换：

$$\begin{array}{ccccc} & & [S^{m+1}, s_0; SE_{n+m}, *] & & \\ & \Sigma \nearrow & & \searrow (\epsilon_{n+m})_* & \\ [S^m, s_0; E_{n+m}, *] & & & & [S^{m+1}, s_0; E_{n+m+1}, *] \\ & \cong\searrow (\epsilon'_{n+m})_* & & \cong\nearrow A & \\ & & [S^m, s_0; \Omega E_{n+m+1}, *] & & \end{array}$$

可得 $(\epsilon_{n+m})_* \cdot \Sigma: \pi_m(E_{n+m}) \to \pi_{m+1}(E_{n+m+1})$ 为同构, 从而 $k^n(S^0) \overset{\sigma}{\cong} k^{n+m}(S^m) = [S^m, s_0; E_{n+m}, *] \xrightarrow{\cong} \mathrm{dirlim}_m\, \pi_m(E_{n+m}) = \pi_{-n}(E) = E^n(S^0)$, 即 $T^n(S^0): k^n(S^0) \to E^n(S^0)$ 为同构. 因此, 由定理 3.3.8, T^* 是自然等价. 证毕.

3.4 谱的压挤乘积

若 E 为谱, X 为 CW 复形. 前面已提到, 压挤乘积 $E \wedge X$ 是一个谱使 $(E \wedge X)_n = E_n \wedge X$. 但是, 如果 X 也是谱 (即两个谱 E, X), 那么很不幸, 压挤乘积 $E \wedge X$ 的构造比较复杂. 这里省略 $E \wedge X$ 的构造 (有兴趣的读者可参见文献 [1]P.255~270), 而只给出构造出来的 $E \wedge X$ 所满足的 (类似于 X 是 CW 复形情况下的) 以下性质 (命题 3.4.1~3.4.7):

命题 3.4.1　存在自然同伦等价：

$$\begin{array}{rrcl} a: & (E \wedge F) \wedge G & \simeq & E \wedge (F \wedge G) \\ \tau: & (E \wedge F) & \simeq & F \wedge E \\ l: & S^0 \wedge E & \simeq & E \\ r: & E \wedge S^0 & \simeq & E \end{array}$$

命题 3.4.2　对所有谱 X, 存在自然同伦等价

$$\Sigma E \wedge X \simeq \Sigma(E \wedge X) \simeq E \wedge \Sigma X$$

命题 3.4.3　若 $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} K$ 是上纤维序列, E 为任意谱, 则

$$E \wedge G \xrightarrow{1 \wedge f} E \wedge H \xrightarrow{1 \wedge g} E \wedge K$$

仍是上纤维序列.

命题 3.4.4　对谱 E 和一族谱 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, 有自然同伦等价 $E \wedge (\bigvee_\alpha X_\alpha) \simeq \bigvee_\alpha (E \wedge X_\alpha)$.

定义 3.4.5　对谱 E 和 X, X 的 E 同调群定义为 $E_n(X) = [\Sigma^n S^0; E \wedge X]$, X 的 E 上同调群定义为 $E^n(X) = [X, \Sigma^n E] (n \in \mathbf{Z})$.

命题 3.4.6　对谱 E 和 X, 有自然同构

$$E_n(X) \cong \mathrm{dirlim}_q\, E_{n+q}(X_q)$$

其中正向极限的定向为

$$E_{n+q}(X_q) \overset{\sigma}{\cong} E_{n+q+1}(SX_q) \xrightarrow{\epsilon_{q*}} E_{n+q+1}(X_{q+1})$$

而 $\epsilon_q: SX_q \to X_{q+1}$ 为谱 $X = \{X_q\}$ 中的内射, σ 为双角锥同构, $E_{n+q}(X_q) = [\Sigma^{n+q}S^0; E \wedge X_q]$.

命题 3.4.7 若 $E = \{E_n\}$ 为谱, 且存在一序列 CW 复形之间的映射 $\tau_n: S^n \to E_n$, $\bar{\mu}_{n,m}: E_n \wedge E_m \to E_{n+m}$ 使以下图形同伦可换:

$$\textbf{(3.4.8)}\qquad \begin{array}{ccccc} S^n \wedge E_m & \xrightarrow{\tau_n \wedge 1} & E_n \wedge E_m & \xleftarrow{1\wedge\tau_m} & E_n \wedge S^m \\ & \searrow \epsilon_{nm} & \downarrow \bar{\mu}_{n,m} & & \uparrow \tau' \\ & & E_{n+m} & \xleftarrow{\epsilon_{mn}} & S^m \wedge E_n \end{array}$$

$$\tau'[t,x] = [x, \nu'^{nm}(t)]$$

$$\textbf{(3.4.9)}\qquad \begin{array}{ccc} S^1 \wedge S^n & \xrightarrow{1\wedge\tau_n} & S^1 \wedge E_n \\ \downarrow\simeq & & \downarrow \epsilon_{1,n} \\ S^{n+1} & \xrightarrow{\tau_{n+1}} & E_{n+1} \end{array}$$

$$\textbf{(3.4.10)}\qquad \begin{array}{ccc} E_n \wedge E_m \wedge E_p & \xrightarrow{1\wedge\bar{\mu}_{n,p}} & E_n \wedge E_{m+p} \\ \downarrow \bar{\mu}_{n,m} \wedge 1 & & \downarrow \bar{\mu}_{n,m+p} \\ E_{n+m} \wedge E_p & \xrightarrow{\bar{\mu}_{n+m,p}} & E_{n+m+p} \end{array}$$

则函数 τ_n 决定谱映射 $\iota: S^0 \to E$, 而 $\bar{\mu}_{n,m}$(不是函数) 导出谱映射 $\mu: E\wedge E \to E$(叫做 E 的乘法) 使下图同伦可换 (左图为乘法 μ 的结合性, 右图为 ι 是乘法单位):

$$\begin{array}{ccc} E\wedge E\wedge E & \xrightarrow{\mu\wedge 1} & E\wedge E \\ \downarrow 1\wedge\mu & & \downarrow \mu \\ E\wedge E & \xrightarrow{\mu} & E \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} S^0\wedge E & \xrightarrow{\iota\wedge 1} & E\wedge E & \xleftarrow{1\wedge\iota} & E\wedge S^0 \\ & l\searrow & \downarrow \mu & \swarrow r & \\ & & E & & \end{array}$$

其中 l 和 r 是命题 3.4.1 中的自然同伦等价. 这时称 E 为具有乘法 μ 和单位 ι 的环谱.

更进一步若有同伦可换图形 (所有 $n, m \in \mathbf{Z}$)

$$\textbf{(3.4.11)}\qquad \begin{array}{ccc} E_{4n}\wedge E_{4m} & \xrightarrow{\tau} & E_{4m}\wedge E_{4n} \\ \bar{\mu}_{4n,4m}\searrow & & \swarrow \bar{\mu}_{4m,4n} \\ & E_{4n+4m} & \end{array}$$

则导出谱映射的同伦可换图形

$$\begin{array}{ccc} E\wedge E & \xrightarrow{\tau} & E\wedge E \\ \mu\searrow & & \swarrow \mu \\ & E & \end{array}$$

这时称环谱 E 的乘法 μ 是交换的, 其中 $\tau: E\wedge E\to E\wedge E$ 为交换谱映射.

3.5 Eilenberg-Maclane 谱

由定理 1.2.2 和推论 1.2.3, 对 $n\geqslant 0$ 和 Abel 群 G, 存在 CW 复形 $K(G,n)$ 使

$$\pi_r(K(G,n))=\begin{cases} G, & \text{当 } r=n \\ 0, & \text{当 } r\neq n \end{cases}$$

称之为 Eilenberg-Maclane 空间, 并且存在弱同伦等价 $\epsilon'_n: K(G,n)\to \Omega K(G, n+1)$. 下面我们作出一个叫做 E-M 谱的 Ω 谱KG.

定义 3.5.1　Eilenberg-Maclane 谱 KG 是定义 3.1.2 意义下的 CW 谱, 使

$$(KG)_n=\begin{cases} K(G,n), & \text{当 } n\geqslant 0 \\ *, & \text{当 } n<0 \end{cases}$$

其中 $\epsilon_n: S(KG)_n\to (KG)_{n+1}$ 是弱同伦等价

$$\epsilon'_n: (KG)_n\to \Omega(KG)_{n+1}$$

的伴随. 因此 KG 是一个 Ω 谱.

命题 3.5.2

$$\pi_n(KG)\cong\begin{cases} G, & \text{当 } n=0 \\ 0, & \text{当 } n\neq 0 \end{cases}$$

证　由命题 3.1.18, $\pi_n(KG)\cong \mathrm{dirlim}_m\pi_{n+m}(K(G,m))$. 显然当 $n\neq 0$ 有 $\pi_n(KG)=0$. 由于

$$G=\pi_m(K(G,m))\xrightarrow{\Sigma}\pi_{m+1}(SK(G,m))\xrightarrow{\epsilon_{m*}}\pi_{m+1}(K(G,m+1))$$

对所有 $m\geqslant 1$ 为同构, 因此 $\pi_0(KG)\cong G$. 证毕.

注　由于 $\pi_n(KG)=(KG)_n(S^0)$ 有上述结果, 因此 E-M 谱 KG 的同调群 $KG_*(X)$ 就是以 G 为系数群的普通同调群 $\widetilde{H}_*(X,G)$(因为满足 Eilenberg-Steenrod 7 个公理的 CW 复形范畴中的同调理论是唯一的). 同样地, 上同调群 $KG^*(X)$ 就是普通上同调群 $\widetilde{H}^*(X,G)$.

引理 3.5.3　$KG^q(KG)\cong [K(G,n);K(G,n+q)]$ $(n>q+1)$.

证　因为 KG 是 Ω 谱, 由定理 3.3.10,

$$[K(G,n);K(G,n+q)]\cong KG^{n+q}(K(G,n))=\widetilde{H}^{n+q}(K(G,n),G)$$

简记 $K(G,n)=K$, 考虑道路纤维映射 $\Omega K\xrightarrow{i}PK\xrightarrow{p}K$, 因为 PK 可缩, 以下合成

$$\sigma': \widetilde{H}^{n+q}(K) \xrightarrow{p^*} \widetilde{H}^{n+q}(PK, \Omega K) \underset{\cong}{\xleftarrow{\delta^*}} \widetilde{H}^{n+q-1}(\Omega K)$$

是例 1.4.2 中的上同调双角锥同态, 且 σ' 当 $n > q+1$ 为同构, 因此 (见文献 [1]15.39, 15.42)

$$\widetilde{H}^{n+q}(K) \cong \widetilde{H}^{n+q-1}(\Omega K) \underset{\cong}{\xrightarrow{(\epsilon'_{n-1})^*}} \widetilde{H}^{n+q-1}(K(G, n-1))$$

即

$$[K(G, n-1); K(G, n+q-1)] \cong [K(G, n); K(G, n+q)]$$

当 $n > q+1$ 成立. 定义如下对应 ϕ:

$$\phi: [K(G, n); K(G, n+q)] \to KG^q KG$$

对 $f: K(G,n) \to K(G, n+q)$, 由以上同构, 有一序列 $f_m: K(G, n+m) \to K(G, n+q+m)$, 从而使 f_m 成为谱 KG 到 $\Sigma^q KG$ 之间的函数, 并决定谱映射 $\bar{f}: KG \to \Sigma^q KG$. 令 $\phi[f] = [\bar{f}]$. 显然 ϕ 有逆对应 $\psi: KG^q KG \to [K(G,n); K(G, n+q)]$, 因此 ϕ 是同构. 证毕.

定理 3.5.4 $KZ_p^* KZ_p \cong A$, 其中 A 表示 mod p Steenrod 代数, $p \geqslant 2$.

证 只对 $p = 2$ 证明. 由引理 3.5.3, 当 $n > q+1$, $KZ_2^q(KZ_2) \cong \widetilde{H}^{n+q}(K(Z_2, n), Z_2)$, 而由定理 1.4.7, $\widetilde{H}^{n+q}(K(Z_2,n), Z_2)$ 具有 Z_2 基 $Sq^I u_n$, 其中 I 取遍可许序列使 $d(I) = q$ 和 $e(I) < n$. 现在 $d(I) = q < n$, 有 $e(I) < n$. 因此 $\widetilde{H}^{n+q}(K(Z_2,n), Z_2)$ 有 Z_2 基 $\{Sq^I u_n | I\text{可许}, d(I) = q\}$, 显然和 Steenrod 代数 A^q 的 Z_2 可许基 (见定理 2.1.8) $\{Sq^I | I\text{可许}, d(I) = q\}$ 是一一对应的. 证毕.

推论 3.5.5 若 V 为分次 Z_p 向量空间, 而 KV 为 E-M 谱, 则 $H^*(KV, Z_p) \cong A \otimes V$ 为 A 自由模.

推论 3.5.6 $KZ_{p*}KZ_p \cong A^*$, A^* 为 mod p Steenrod 代数 A 的对偶.

证 由 Serre $\mathcal{C}$ 理论可知 $H_*(KZ_p, Z_p)$是有限型的, 从而由泛系数定理, $H_*(KZ_p, Z_p)$ 是 $H^*(KZ_p, Z_p)$ 的对偶向量空间 $\mathrm{Hom}_{Z_p}(H^*(KZ_p, Z_p), Z_p)$. 证毕.

定理 3.5.7 设 V 为有限型 Z_p 分次向量空间, X 为任意谱, 则有同构 $B: [\Sigma^t X; KV] \to \mathrm{Hom}_A^t(A \otimes V, H^*(X, Z_p))$, 后者是下降次数 t 的所有 A 同态所成的 Abel 群, 而 $B[f] = f^*$.

证 当 $V = Z_p$, 则 $[\Sigma^t X; KZ_p] = H^{-t}(X, Z_p) \cong \mathrm{Hom}_A^t(A, H^*(X, Z_p))$ 显然成立. 再由 $KV \simeq \bigvee_\alpha (\Sigma^{m_\alpha} KZ_p)$, 则 $[\Sigma^t X; KV] \cong \bigoplus_\alpha [\Sigma^t X; \Sigma^{m_\alpha} KZ_p] \cong \bigoplus_\alpha \mathrm{Hom}_A^{t-m_\alpha}(A, H^*(X, Z_p)) \cong \mathrm{Hom}_A^t(A \otimes V, H^*(X, Z_p))$. 证毕.

注 这个定理说明, 任一 A 自由模 $A \otimes V$ 到 $H^*(X, Z_p)$ 的 A 同态 ϕ, 总是可以实现的, 即存在映射 $f: \Sigma^t X \to KV$, 使 $f^* = \phi$, 而且 f 在同伦意义下是唯一的.

前面已经证明 $KZ_p^* KZ_p$ 同构于 mod p Steenrod 代数 A, 而 $KZ_{p*}KZ_p$ 同构于 A 的对偶代数 A^*. 很自然地可以想到, 对任意谱 E, 存在代数 $E^*(E)$ 和它的对偶代

数 $E_*(E)$ 使它们表示 (广义的)E 上同调运算和 (广义的)E 同调上运算.

定义 3.5.8 设 E 为任意谱, (q,r) 型的 E 上同调运算是指自然变换 $T(X)$: $E^q(X)\to E^r(X)$, X 所在的范畴可以是 CW 复形范畴, 也可以是 CW 谱范畴. 若对任意 $y_1,y_2\in E^q(X)$ 有 $T(y_1+y_2)=T(y_1)+T(y_2)$, 称 T 为可加 E 上同调运算. 次数 q 的稳定 E 上同调运算 T 是一序列自然变换 $T^n\colon E^n(X)\to E^{n+q}(X)$(所有 $n\in\mathbf{Z}$) 使 $T^n\sigma=\sigma T^{n+1}$, 其中 $\sigma: E^n(X)\to E^{n+1}(SX)$ 为双角锥同构.

定义 3.5.9 设 $A(E)^q$ 表示所有次数 q 的稳定 E 上同调运算的集合, 对 $T,T'\in A(E)^q$, 令 $(T+T')(x)=T(x)+T'(x)$, $x\in E^*(X)$, 则 $A(E)^q$ 成为 Abel 群, $A(E)^*$ 是分次 Abel 群. 定义乘积

$$\phi\colon A(E)^p\otimes A(E)^q\to A(E)^{p+q}$$

使 $\phi(T\otimes T')=T\cdot T'$, 则 $A(E)^*$ 成为分次环, 实际上它是 $E^*(S^0)$ 上分次代数, 因为对 $r\in E^*(S^0)$, $T\in A(E)^*$, 可令 rT 为稳定运算使 $(rT)(x)=T(x)\cdot r$(所有 $x\in E^*(X)$).

定理 3.5.10 存在同构 $\theta\colon A(E)^*\to E^*(E)$ 使 $\theta(T)=T[1_E]$, 其中 $1_E\in E^0(E)$.$E^*(E)$ 的乘法由合成给出:$[f][g]=[\Sigma^m f\cdot g]$, 若 $f\colon E\to\Sigma^n E$, $g\colon E\to\Sigma^m E$.

证 令 $\theta'\colon E^*(E)\to A(E)^*$ 为 $(\theta'[f])[g]=[\Sigma^m f\cdot g]$, 对任意 $f\colon E\to\Sigma^n E$, $g\colon E\to\Sigma^m E$, 则 $\theta\theta'[f]=(\theta'[f])[1_E]=[f\cdot 1_E]=[f]$, 而 $(\theta'\theta(T))[g]=[\Sigma^m\theta(T)\cdot g]=[\Sigma^m T(1_E)\cdot g]=g^*T[1_E]=Tg^*[1_E]=T[g]$. 因此 $\theta\theta'=1$ 且 $\theta'\theta=1$, 从而 θ 为同构. 证毕.

注 当谱 $E=KZ_p$, 则 $E^*(E)=KZ_p^*KZ_p\cong A$, A 为 $\bmod p$ Steenrod 代数, 而 $E_*(E)=KZ_{p*}KZ_p\cong A^*$ 为 A 的对偶. 他们都是 Hopf 代数. 实际上, 对任意交换环谱 E 使 $E_*(E)$ 是平坦的 $E_*(S^0)$ 模, 则 $E_*(E)$ 可给出 Hopf 代数的结构. 同样地, $E^*(E)$ 也可给出 Hopf 代数的结构. 我们不详细叙述这方面的结果.

3.6 谱的 p 局部化

定义 3.6.1 设 p 为素数, 整数加群 $\mathbf{Z}$ 的 p 局部化是有理数域 $\mathbf{Q}$ 的子环 $Z_{(p)}$, 它由所有使 $(b,p)=1$(即 b 与 p 互素) 的有理数 $\frac{a}{b}$ 组成.

定义 3.6.2 Abel 群 G 的 p 局部化$G_{(p)}=G\otimes Z_{(p)}$.Abel 群 H 称为 p 局部的, 若存在同构 $e\colon H\to H\otimes Z_{(p)}$ 使 $e(h)=h\otimes 1$.

命题 3.6.3 若 T 是 q 挠群 (即其任意元素的阶为 q^s, 某个 s), q 为素数, 则

$$T_{(p)}=\begin{cases} T, & 当\ q=p\\ 0, & 当\ q\neq p\end{cases}$$

证 当 $q\neq p$, 任意 $t\otimes\frac{a}{b}\in T\otimes Z_{(p)}$, 设 t 的阶为 q^s, 则 $t\otimes\frac{a}{b}=t\otimes\frac{q^s a}{q^s b}=q^s t\otimes\frac{a}{q^s b}=0$. 当 $q=p$, 令 $e\colon T\to T\otimes Z_{(p)}$ 定义为 $e(t)=t\otimes 1$, 则可证 e 为单同

态. 任意 $t\otimes\frac{a}{b}$, 设 t 的阶数为 p^s, 由 $(b,p^s)=1$, 存在整数 m,n 使 $mp^s+nb=1$, 则 $t=bnt$, $t\otimes\frac{a}{b}=ant\otimes 1$, 因此 e 是满同态. 证毕.

命题 3.6.4 (a) 若 $G\xrightarrow{\phi}G'\xrightarrow{\phi'}G''$ 恰当, 则 $G_{(p)}\xrightarrow{\phi_{(p)}}G'_{(p)}\xrightarrow{\phi'_{(p)}}G''_{(p)}$ 也恰当, 其中 $\phi_{(p)}=\phi\otimes 1: G\otimes Z_{(p)}\to G'\otimes Z_{(p)}$.

(b) 若 $G\cong G'\oplus G''$, 则 $G_{(p)}\cong G'_{(p)}\oplus G''_{(p)}$

证明是显然的.

推论 3.6.5 若 G 是有限生成 Abel 群, 则 $G_{(p)}$ 同构于若干个 $Z_{(p)}$ 和 p 挠群 T 的直和.

命题 3.6.6 Abel 群 A 是 p 局部的当且仅当对所有素数 $q\neq p$, 有 $A\otimes Z_q=0$, $\mathrm{Tor}\,(A,Z_q)=0$.

证 设 A 是 p 局部的, 则 $A\cong A\otimes Z_{(p)}$. 显然有 $A\otimes Z_q\cong A\otimes Z_{(p)}\otimes Z_q=0$. 令

$$0\to Z\xrightarrow{q}Z\to Z_q\to 0$$

为 Z_q 的自由分解, 则 $\mathrm{Tor}\,(A,Z_q)=\mathrm{Tor}\,(A\otimes Z_{(p)},Z_q)=\ker\phi$, 其中 $\phi: A\otimes Z_{(p)}\to A\otimes Z_{(p)}$ 为 $\phi(a\otimes x)=a\otimes qx$ $(x\in Z_{(p)})$. 令 $\psi: A\otimes Z_{(p)}\to A\otimes Z_{(p)}$ 为 $\psi(a\otimes x)=a\otimes\frac{1}{q}x$, 则 $\psi\phi=1$. 因此 $\ker\phi=0$, $\mathrm{Tor}\,(A,Z_q)=0$.

反之, 设 $0\to Z\xrightarrow{i}Z_{(p)}\to C\to 0$ 为短恰当序列, 其中 i 为内射, $C=\mathrm{cok}i$, 则导出恰当序列

$$0\to\ker e\to A\xrightarrow{e}A\otimes Z_{(p)}\to A\otimes C\to 0$$

由 $A\otimes Z_q=0=\mathrm{Tor}\,(A,Z_q)$(所有 $q\neq p$), 容易得出 $A\otimes C=0$ 及 $\ker e=0$, 因此 e 为同构. 证毕.

定义 3.6.7 设 $\mathcal{C}$ 表示所有其元素的阶与 p 互素的 Abel 群的范畴. 同态 $f: A\to B$ 叫做 p 单的, 若 $\ker f\in\mathcal{C}$; f 叫做 p 满的, 若 $\mathrm{cok}f\in\mathcal{C}.f$ 叫做 p 同构, 若 f 是 p 单的且是 p 满的.

推论 3.6.8 若 Y 为连通空间, 则 $H_n(Y)$ 对所有 $n\geqslant 1$ 是 p 局部的当且仅当 $H_n(Y)\otimes Z_q=0=\mathrm{Tor}\,(H_n(Y),Z_q)$, 即当且仅当 $H_n(Y,Z_q)=0(q\neq p,\ n\geqslant 1)$. 证毕.

命题 3.6.9 若 X,Y 为单连通 CW 复形, $f: X\to Y$ 为映射, 则同态 $\pi_n f: \pi_n(X)\to\pi_n(Y)$ 是 p 同构 (对所有 $n\geqslant 0$) 当且仅当 $H_n f: H_n(X)\to H_n(Y)$ 是 p 同构 (对所有 $n\geqslant 0$).

证 根据 Serre$\mathcal{C}$ 理论中的 Whitehead 定理 (见文献 [3]P.307 定理 10.1). 证毕.

命题 3.6.10 同态 $f: A\to B$ 是 p 同构当且仅当 $f_{(p)}: A_{(p)}\to B_{(p)}$ 为同构.

证 如命题 3.6.6 的证明中, 若 $C=\mathrm{cok}\,i$, $i: Z\to Z_{(p)}$ 为内射, 则 $\ker e$, $\mathrm{cok}\,e\in\mathcal{C}$, 其中 $e: A\to A\otimes Z_{(p)}=A_{(p)}$ 为命题 3.6.6 中同态, 因此 e 是 p 同构而且有以下可

换图形：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & A_{(p)} \\ \downarrow f & & \downarrow f_{(p)} \\ B & \xrightarrow{e} & B_{(p)} \end{array}$$

因此 f 为 p 同构当且仅当 $f_{(p)}$ 为 p 同构, 从而当且仅当 $f_{(p)}$ 为同构. 证毕.

下面我们讨论的空间都属于单连通有限型 CW 复形范畴 $\mathcal{H}$.

定义 3.6.11 $\mathcal{H}$ 中的 X 叫 p 局部的, 若它的同伦群 $\pi_n(X)$ 是 p 局部的 $(n \geqslant 1)$.

定义 3.6.12 称映射 $e: X \to X_{(p)}$ 将 X p 局部化, 若 $X_{(p)}$ 是 p 局部的, 且对任一映射 $f: X \to Y$ 使 Y 是 p 局部的, 总存在映射 $g: X_{(p)} \to Y$(在同伦意义下唯一) 使 $ge = f$. 显然, 若映射 $e: X \to X_{(p)}$ 存在, 则 $X_{(p)}$ 在同伦等价意义下唯一, 这时也称 X 的 p 局部化 $X_{(p)}$ 存在.

下面我们交叉证明以下两个定理:

定理 3.6.13 在 $\mathcal{H}$ 中, X 的 p 局部化 $X_{(p)}$ 存在.

定理 3.6.14 在 $\mathcal{H}$ 中, 以下判断等价:

(1) 映射 $e: X \to X_{(p)}$ 将 X p 局部化.

(2) $\pi_n(X_{(p)})$ 是 p 局部的, 且 $\pi_n e: \pi_n(X) \to \pi_n(X_{(p)})$ 是 p 同构 $(n \geqslant 1)$.

(3)$H_n(X_{(p)})$ 是 p 局部的, 且 $H_n e: H_n(X) \to H_n(X_{(p)})$ 是 p 同构 $(n \geqslant 1)$.

证 (2) $\Leftrightarrow$ (3). 记 $X_{(p)} = Y$, 由推论 3.6.8 和 Serre$\mathcal{C}$ 理论, $H_n(Y)$ 是 p 局部的当且仅当 $H_n(Y, Z_q) = 0$ $(q \neq p, n \geqslant 1)$, 当且仅当 $\pi_n(Y)$ 是 p 局部的 $(n \geqslant 1)$. 再由命题 3.6.9 得出 (2) 和 (3) 是等价的.

第二步我们证明在 $\mathcal{H}$ 中存在映射 $e: X \to Y$ 满足 (3). 对 X 的 n 维架 X^n 作归纳法. 因为 X 单连通, 可设 $X^1 = *$, 且 $X^2 = \bigvee S^2$. 对 n 维球面 S^n $(n \geqslant 2)$, 只要令 $S^n_{(p)}$ 为 Moore 空间 $M(Z_{(p)}, n)$(M 只有 n 维同调群非零, 同构于 $Z_{(p)}$), 则 $e: \bigvee S^n \to \bigvee S^n_{(p)}$ 满足 (3). 因此命题对 X^2 成立. 设命题对 X^n 已成立. 设 $g: \bigvee\limits_{\alpha} S^n \to X^n$ 使 $g|_{S^n}$ 为 X^{n+1} 中 $n+1$ 维胞腔 e^{n+1}_α 的特征映射 (e^{n+1}_α 取遍所有 $n+1$ 维胞腔), 而 $e_n: X^n \to Y_n$, 由归纳假设满足 (3), 考虑以下图形:

$$\begin{array}{ccccc} \bigvee S^n & \xrightarrow{g} & X^n & \xrightarrow{j} & X^{n+1} \\ \downarrow e' & & \downarrow e_n & & \downarrow e_{n+1} \\ \bigvee S^n_{(p)} & \xrightarrow{h} & Y_n & \longrightarrow & Y_{n+1} \end{array}$$

其中 j 为内射. 容易证明存在 h 使图形可换. 令 $Y_{n+1} = Y_n \cup_h C(\bigvee S^n_{(p)})$, 则由引理 3.2.6 存在映射 e_{n+1} 使图形可换. 由上下横行所导出的同调群恰当序列的可换图形以及命题 3.6.4(a) 可知 e_{n+1} 满足 (3), 完成了归纳法. 令 $Y = \cup_{n \geqslant 1} Y_n$,

$$e: \bigcup_{n \geqslant 1} X^n \to \bigcup_{n \geqslant 1} Y_n$$

则 e 满足 (3).

下面证明 (3) $\Rightarrow$ (1). 由存在映射 $e: X\to X_{(p)}$ 满足 (3), 则 e 满足 (2), 因此 $X_{(p)}$ 是 p 局部. 若映射 $f: X\to Y$ 使 Y 是 p 局部的, 则可用 $X_{(p)}$ 的如上构造, 按维数作归纳的方法, 作出映射 $g: X_{(p)}\to Y$ 使 $ge=f$. 因此 e 满足 (1). 由 (1) 导出 (2) 就比较容易证明. 因此证明了定理 3.6.14, 同时也证明了定理 3.6.13. 证毕.

以上结论很容易推广到连通有限型 CW 谱的范畴中 (谱 E 称为连通的, 若 $\pi_n(E)=0$, 当 $n<r$, 某个整数 r).

定理 3.6.15 若 E 为连通有限型谱, 则 E 的 p 局部化 $E_{(p)}$ 存在.

定理 3.6.16 在连通有限型谱范畴中, 以下判断等价:

(1) 存在映射 $e: E\to E_{(p)}$, 将 E 的 p 局部化.

(2) $\pi_n(E_{(p)})$ 是 p 局部的, 且 $\pi_n(e): \pi_n(E)\to\pi(E_{(p)})$ 为 p 同构 (所有 $n\geqslant r$).

(3) $H_n(E_{(p)})$ 是 p 局部的, 且 $H_n e: H_n(E)\to H_n(E_{(p)})$ 是 p 同构 (所有 $n\geqslant r$).

定理 3.6.17 在连通有限型谱范畴中, $f: X\to Y$ 是同伦等价当且仅当 $f_{(p)}: X_{(p)}\to Y_{(p)}$ 为同伦等价 (所有素数 p).

推论 3.6.18 若 $f: X\to Y$ 为映射使 X, Y 都是 p 局部的, 则 f 为同伦等价当且仅当 $f^*: H^n(Y, Z_p)\to H^n(X, Z_p)$ 对所有 n 同构.

3.7 稳定同伦范畴中的 3×3 引理

在本节, 我们不证明稳定同伦范畴中的 3×3 引理, 这是关于两个映射的合成的上纤维和原来的两个映射各自的上纤维之间的关系的一个结果 (参见 [6] p. 292~293). 这个结果只在稳定同伦范畴, 即谱和谱映射的范畴中成立, 在非稳定同伦范畴 (即拓扑空间和映射的范畴) 中则不再成立.

3×3 引理 已给谱 A, B 和 C 以及谱映射 $A\xrightarrow{\beta}B\xrightarrow{\alpha}C$ 使得合成 $\alpha\cdot\beta=\gamma$. 设谱 $C(\alpha)$, $C(\beta)$ 和 $C(\gamma)$ 分别表示映射 α,β 和 γ 的上纤维, 则存在上纤维序列

$$C(\beta)\xrightarrow{\phi}C(\gamma)\xrightarrow{j}C(\alpha)\xrightarrow{\delta}\Sigma C(\beta)$$

和以下同伦交换 (相差正负号) 的图形:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & A & \xrightarrow{\gamma} & C & \longrightarrow & C(\alpha) & \xrightarrow{\delta} & \Sigma C(\beta) & & & \\
 & \beta\searrow & & \alpha\nearrow\quad\searrow & & \nearrow j\quad\searrow & & \nearrow & & & \\
 & & B & & C(\gamma) & & \Sigma B & & & & \\
 & \nearrow & & \searrow\quad\nearrow\phi & & \searrow\quad\nearrow\beta & & \searrow\alpha & & & \\
\Sigma^{-1}C(\alpha) & \xrightarrow{\delta} & C(\beta) & \longrightarrow & \Sigma A & \xrightarrow{\gamma} & \Sigma C & & & &
\end{array}$$

注意到在上面的同伦交换图中一共包含了 4 个上纤维序列, 它们分别是:

$$A \xrightarrow{\beta} B \to C(\beta) \to \Sigma A$$

$$B \xrightarrow{\alpha} C \to C(\alpha) \to \Sigma B$$

$$A \xrightarrow{\gamma} C \to C(\gamma) \to \Sigma A$$

$$C(\beta) \xrightarrow{\phi} C(\gamma) \xrightarrow{j} C(\alpha) \xrightarrow{\delta} \Sigma C(\beta)$$

参 考 文 献

[1] Switzer R M. 1980. Algebraic Topology——Homotopy and Homology. Springer-Verlag

[2] Maunder , Algebraic Topology. 1980. Camb. Univ. Press

[3] Hu Sze-tsen. 1959. Homotopy theory, Pure and applied Math. VIII. New York: Academic Press

[4] Adams J F. 1971. Stable homotopy and generalized homology. Chicago:Univ of Chicago Math. Lecture Notes

[5] Hilton P. Localization in Topology

[6] Thomas E, Zahler R. 1976. Generalized higher order cohomology operations and stable homotopy groups of spheres. Advances in Math., v. 20, 287~328

第 4 章　Adams 谱序列

4.1　Ext 群

设 B 为域 R 上分次代数. 分次 R 模 M 叫做 B 上的模, 若存在模作用

$$\alpha: B \otimes M \to M$$

使以下图形可换:

$$\begin{array}{ccc} B\otimes B\otimes M & \xrightarrow{1\otimes\alpha} & B\otimes M \\ \downarrow \phi\otimes 1 & & \downarrow \alpha \\ B\otimes M & \xrightarrow{\alpha} & M \end{array}$$

其中 $\phi: B\otimes B \to B$ 为代数 B 的乘法. 模作用 $\alpha(b\otimes m)$ 经常写作 $b\cdot m$ ($b\in B$, $m\in M$). 例如, 空间 X 的 Z_p 上同调群 $H^*(X)$ 是 Steenrod 代数 A 上的模, 模作用为 $\alpha(P^i\otimes x) = P^i x$.

若 M, N 为 B 模, 同态 $f: M\to N$ 叫做 B 同态, 若 $f(b\cdot m) = b\cdot f(m)$ ($b\in B$, $m\in M$). 所有的 B 同态的集合记为 $\mathrm{Hom}_B(M,N)$, 显然可以给予 B 模的结构.B 同态 f 叫做具有次数 t, 若 f 将 M_j 映到 N_{j-t}(即降低次数 t). 具有次数 t 的所有同态的集合记为 $\mathrm{Hom}_B^t(M,N)$.

定义 4.1.1　B 模 M 叫做投射的, 若对任一满 B 同态 γ 和 B 同态 π, 存在 B 同态 $\pi': M\to N_1$ 使下图可换:

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ \pi' \swarrow & & \downarrow \pi & & \\ N_1 & \xrightarrow{\gamma} & N_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

命题 4.1.2　任意自由 B 模 M 是投射的.

证　设 M 具有 B 基 $\{m_\alpha\}$, 因为 γ 满, 则有 $n_\alpha\in N_1$ 使 $\gamma(n_\alpha) = \pi(m_\alpha)$, 令 $\pi'(m_\alpha) = n_\alpha$ 再线性扩张, 则 π' 为 B 同态且 $\gamma\pi' = \pi$.

定义 4.1.3　取 B 模 M 的任一投射分解, 即恰当序列

$$\cdots \xrightarrow{d_2} X_2 \xrightarrow{d_1} X_1 \xrightarrow{d_0} X_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

使每个 X_i 为 (分次) 投射的 B 模. 因此得出一个上链复形

$$\mathrm{Hom}_B^t(X_0,N) \xrightarrow{d_0^\#} \mathrm{Hom}_B^t(X_1,N) \xrightarrow{d_1^\#} \mathrm{Hom}_B^t(X_2,N) \to \cdots$$

定义 $\mathrm{Ext}_B^{s,t}(M,N)$ 为上述上链复形的上同调群 $H^s(\mathrm{Hom}_B^t(X_*,N)), s\geqslant 0$, t 任意

整数.

这个定义不依赖投射分解的选择, 即对 M 的不同的投射分解, 定义的 $\mathrm{Ext}_B^{s,t}(M, N)$ 彼此同构, 我们省略它的证明.

命题 4.1.4　$f: M \to M'$ 为 B 模同态, 则 f 导出同态 $\mathrm{Ext}(f,1): \mathrm{Ext}_B^{s,t}(M',N) \to \mathrm{Ext}_B^{s,t}(M,N)$ 使若 $g: M' \to M''$ 为另一 B 模同态, 有

$$\mathrm{Ext}(gf,1) = \mathrm{Ext}(f,1) \cdot \mathrm{Ext}(g,1)$$

证　对 M 和 M' 的投射分解, 容易找出一个链映射 $\{f_i: X_i \to X_i'\}$ 使 $\epsilon' f_0 = f\epsilon$, 而且使下图可换:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \xrightarrow{d_2} & X_2 & \xrightarrow{d_1} & X_1 & \xrightarrow{d_0} & X_0 & \xrightarrow{\epsilon} & M & \to 0 \\
& \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f & \\
\cdots \xrightarrow{d_2'} & X_2' & \xrightarrow{d_1'} & X_1' & \xrightarrow{d_0'} & X_0' & \xrightarrow{\epsilon'} & M' & \to 0
\end{array}$$

因此导出上链复形的链映射

$$\{\mathrm{Hom}(f_i,1): \mathrm{Hom}_B^t(X_i',N) \to \mathrm{Hom}_B^t(X_i,N)\}$$

和上同调群的同态 $\mathrm{Ext}(f,1): \mathrm{Ext}_B^{s,t}(M',N) \to \mathrm{Ext}_B^{s,t}(M,N)$. 合成性质易证. 证毕.

容易证明 $\mathrm{Ext}(1,1) = 1$, 因此 $\mathrm{Ext}_B^{s,t}(-,-)$ 是第一个变量的上函子. 容易看出, 对第二个变量是函子.

命题 4.1.5　函子 $\mathrm{Ext}_B^{s,t}(-,-)$ 有以下性质:

(a) $\mathrm{Ext}_B^{0,t}(M,N) = \mathrm{Hom}_B^t(M,N)$.

(b) 若 M 投射, 则 $\mathrm{Ext}_B^{s,t}(M,N) = 0$ $(s > 0)$.

(c) 若 $0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$ 为 B 模恰当序列, 则导出长恰当序列

$$\begin{aligned}
&0 \to \mathrm{Hom}_B^t(M,N_1) \to \mathrm{Hom}_B^t(M,N_2) \to \mathrm{Hom}_B^t(M,N_3) \\
&\to \mathrm{Ext}_B^{1,t}(M,N_1) \to \mathrm{Ext}_B^{1,t}(M,N_2) \to \mathrm{Ext}_B^{1,t}(M,N_3) \to \cdots \\
&\to \mathrm{Ext}_B^{s,t}(M,N_1) \to \mathrm{Ext}_B^{s,t}(M,N_2) \to \mathrm{Ext}_B^{s,t}(M,N_3) \to \cdots
\end{aligned}$$

证　(a) $\mathrm{Hom}_R^t(M,N) = \ker d_0^* = H^0(\mathrm{Hom}_B^t(X_t,N)) = \mathrm{Ext}_B^{0,t}(M,N)$.

(b) 若 M 投射, 取投射分解 $0 \to M \xrightarrow{1} M \to 0$, 则 $\mathrm{Ext}_B^{s,t}(M,N) = 0$ $(s > 0)$.

(c) 因为每个 X_i 是投射的, 因此得到上链复形的短恰当序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_B^t(X_*,N_1) \to \mathrm{Hom}_B^t(X_*,N_2) \to \mathrm{Hom}_B^t(X_*,N_3) \to 0$$

从而由导出的上同调群长恰当序列, 即可得出. 证毕.

定义 4.1.6　设 C 是 B 的子代数使 B 成为右 C 模, 用 B 的乘法 $\phi: B \otimes B \to B$ 可给出 $B \otimes_C V$ 的 B 模结构如下 (其中 V 为 C 模):

$$B \otimes (B \otimes_C V) \cong (B \otimes B) \otimes_C V \xrightarrow{\phi \otimes 1} B \otimes_C V$$

B 模 $B\otimes_C V$ 称为 V 的扩充模.

定义 4.1.7 左 R 模 M 叫做平坦的, 若对任一右 R 模的短恰当序列 $0\to N_1\to N_2\to N_3\to 0$, 以下序列恰当:

$$0\to N_1\otimes_R M\to N_2\otimes_R M\to N_3\otimes_R M\to 0$$

以下是关于 Ext 的环的改变的重要结论.

定理 4.1.8 (a) $\mathrm{Hom}_B^t(B\otimes_C V,N)\cong\mathrm{Hom}_C^t(V,N)$.

(b) 若 B 是 C 上平坦的, 则

$$\mathrm{Ext}_B^{s,t}(B\otimes_C V,N)\cong\mathrm{Ext}_C^{s,t}(V,N)\qquad(s\geqslant 0,t\in\mathbf{Z})$$

其中 C 是 B 的子代数如定义 4.1.6.

证 (a) 定义 Φ: $\mathrm{Hom}_B^t(B\otimes_C V,N)\to\mathrm{Hom}_C^t(V,N)$ 及 Ψ: $\mathrm{Hom}_C^t(V,N)\to\mathrm{Hom}_B^t(B\otimes_C V,N)$ 使 $\Phi(f)(v)=f(1\otimes v)$, $f\in\mathrm{Hom}_B^t(B\otimes_C V,N)$, $v\in V$, 而 $\Psi(g)(a\otimes v)=ag(v)$, $g\in\mathrm{Hom}_C^t(V,N)$, $a\in B$, $v\in V$. 容易证明 Φ 和 Ψ 互逆, 从而是同构.

(b) 设

$$\cdots\to U_2\to U_1\to U_0\to V\to 0$$

为 V 的投射分解, 由 B 是 C 平坦的, 则以下序列仍是恰当的:

$$\cdots\to B\otimes_C U_2\to B\otimes_C U_1\to B\otimes_C U_0\to B\otimes_C V\to 0$$

容易证明 $B\otimes_C U_i$ 是投射的 B 模, 因此以上是 $B\otimes_C V$ 的投射分解, 因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_B^{s,t}(B\otimes_C V,N)&=H^s(\mathrm{Hom}_B^t(B\otimes_C U_*,N))\\&\cong H^s(\mathrm{Hom}_C^t(U_*,N))=\mathrm{Ext}_C^{s,t}(V,N)\end{aligned}$$

证毕.

设 B 为 R 分次代数, R 也可看作分次 R 模, 使 R 的正次数元都是 0. 对任一正次数 $b\in B$, $r\in R$, 规定 B 对 R 的模作用为 $b\cdot r=0$, 则 R 也成为分次 B 模, 下面我们说明对任一 B 模 M, 可对 $\mathrm{Ext}_B^{**}(R,M)$ 给予 $\mathrm{Ext}_B^{**}(R,R)$ 模结构.

设 $\alpha\in\mathrm{Ext}_B^{n,m}(R,R)$, $\beta\in\mathrm{Ext}_B^{s,t}(R,M)$. 设

$$\begin{array}{ccccc}\cdots\to & X_2\to & X_1\to & X_0\to & R\to 0\\ \cdots\to & Y_2\to & Y_1\to & Y_0\to & R\to 0\end{array}$$

为 B 模 R 的两个投射分解. $\alpha=\{f\}$, $\beta=\{g\}$, 其中 $f\in\mathrm{Hom}_B^m(X_n,R)$ 而 $g\in\mathrm{Hom}_B^t(Y_s,N)$ 都是上循环. 因为 X_n 是投射的, 因此 f 可提升到 f_0: $X_n\to Y_0$, 从而可提升到链映射 f_i: $X_{n+i}\to Y_i$ $(i\geqslant 0)$

$$\begin{array}{ccccc}\cdots\to & X_{n+i}\cdots\to & X_{n+2}\to & X_{n+1}\to & X_n\\ & \downarrow f_i & \downarrow f_2 & \downarrow f_1 & \downarrow f_0\searrow f\\ \cdots\to & Y_i\cdots\longrightarrow & Y_2\longrightarrow & Y_1\longrightarrow & Y_0\to R\to 0\end{array}$$

容易证明合成

$$X_{n+s} \xrightarrow{f_s} Y_s \xrightarrow{g} N$$

$g \cdot f_s \in \mathrm{Hom}_B^{t+m}(X_{n+s}, N)$ 是一个上循环. 我们将它的上同调类 $[g \cdot f_s]$ 记作 $\alpha \cup \beta \in \mathrm{Ext}_B^{s+n,t+m}(R, N)$. 容易证明 $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \cup \beta$ 是模作用.

因此 $\mathrm{Ext}_B^{**}(R, N)$ 在上述模作用下是一个 $\mathrm{Ext}_B^{**}(R, R)$ 模. 特别地, 当 $N = R$, 上述模作用变成 $\mathrm{Ext}_B^{**}(R, R)$ 内部的乘法 (叫 Cup 积) 使得 $\mathrm{Ext}_B^{**}(R, R)$ 成为双分次的代数.

定义 4.1.9 $H^{*,*}(A) = \mathrm{Ext}_A^{*,*}(Z_p, Z_p)$ 叫做模 p Steenrod 代数 A 的上同调 $(p \geqslant 2)$. 它在 Cup 积下是一个分次代数.

下面我们不加证明地叙述两个关于消失线的结论.

定理 4.1.10(Liulevicius[1]) 设 M 为 A 模使 M 是 $E(Q_0)$ 自由的, 其中 $E(Q_0)$ 表示由 Milnor 基元 Q_0 生成的外代数. 另外 $M_i = 0$ $(i < 0)$, 则有

$$\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M; Z_p) = 0, \qquad 当 t < (2p-1)s - 1 \qquad (s \geqslant 1,\ p > 2)$$

推论 4.1.11 $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_p, Z_p) = 0$, 当 $t < (2p-1)s - 2$, $s \geqslant 1$, $p > 2$.

4.2 谱 序 列

本节中, 我们讨论谱序列的一般概念, 采用由恰当偶 (exact couple) 来导出谱序列的方式.

定义 4.2.1 设 $D = \sum\limits_{s,t} D^{s,t}$, $E = \sum\limits_{s,t} E^{s,t}$ 是双分次群, 一个恰当偶 $\{D, E; \alpha, \beta, \gamma\}$ 指的是以下恰当三角形:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha^{(-1,-1)}} & D \\ (0,0)\gamma \nwarrow & & \swarrow \beta(1,0) \\ & E & \end{array}$$

其中 α 有次数 $(-1,-1)$, β 有次数 $(1,0)$, γ 有次数 $(0,0)$.

我们令 $d_1 \colon E \to E$ 为 $d_1 = \beta\gamma$, 更准确地说

$$d_1^{s,t} \colon E^{s,t} \xrightarrow{\gamma} D^{s,t} \xrightarrow{\beta} E^{s+1,t}$$

因为 $\gamma\beta = 0$, 因此 $d_1 d_1 = \beta\gamma\beta\gamma = 0$, d_1 可看作微分算子. 令 $E_2 = H(E_1, d_1)$ 即

$$E_2^{s,t} = \ker d_1^{s,t} / \mathrm{im}\, d_1^{s-1,t}$$

令 $D_2 = \mathrm{im}\,\alpha$, 即 $D_2^{s,t} = \alpha(D^{s+1,t+1}) \subset D^{s,t}$.

再定义 α_2, β_2, γ_2 如下:

$$\begin{array}{ccc} D_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & D_2 \\ \gamma_2 \nwarrow & & \swarrow \beta_2 \\ & E_2 & \end{array}$$

其中 α_2 为 α 在 $D_2 = \operatorname{im}\alpha$ 上的限制. 因为内射 $i: D_2 = \operatorname{im}\alpha \hookrightarrow D$ 次数为 $(0,0)$, 因此 $\alpha_2 = \alpha \cdot i$ 和 α 有相同次数, $\beta_2: D_2 \to E_2$ 定义为

$$\beta_2(y) = [\beta\alpha^{-1}(y)]$$

其中 $[\,]$ 表示同调类.$\gamma_2: E_2 \to D_2$ 定义为

$$\gamma_2[z^{s,t}] = \gamma(z^{s,t}) \in D_2^{s,t}$$

γ_2 和 γ 有相同次数. 若 $y = \alpha(x) \in D_2^{s,t}$, 则

$$\beta_2(y) = [\beta(x)]$$

而 $x \in D_2^{s+1,t+1}$, 因此 $[\beta(x)] \in E_2^{s+2,t+1}$, 从而 β_2 有次数 $(2,1)$.

定理 4.2.2

$$\begin{array}{ccc} D_2 & \xrightarrow[\alpha_2]{(-1,-1)} & D_2 \\ (0,0)\gamma_2 \nwarrow & & \swarrow \beta_2(2,1) \\ & E_2 & \end{array}$$

是一个恰当偶, α_2 有次数 $(-1,-1)$, β_2 有次数 $(2,1)$, γ_2 有次数 $(0,0)$.

证 简单的追图法. 因为相邻的合成为 0, 因此 $\operatorname{im} \subset \ker$, 下面只要证明相反的包含.

设 $x \in D_2 = \operatorname{im}\alpha$ 而 $\alpha_2 x = \alpha x = 0$, 则 $x \in \ker\alpha = \operatorname{im}\gamma$, 即 $x = \gamma y$ 某个 $y \in E$. 但 $x \in \operatorname{im}\alpha = \ker\beta$, $0 = \beta x = \beta\gamma y = d_1 y$, 从而 y 是循环而 $x = \gamma_2[y]$.

设 $x \in D_2 = \operatorname{im}\alpha$ 而 $\beta_2 x = 0$, 则 $x = \alpha y$ 而 $\beta y = d_1 w = \beta\gamma w$, 从而 $y - \gamma w \in \ker\beta = \operatorname{im}\alpha = D_2$. 而 $\alpha_2(y - \gamma w) = \alpha(y - \gamma w) = \alpha y = x$.

设 $x \in E_2$ 而 $\gamma_2 x = 0$, 令 $x = [y] \in E_2$ 而 $\gamma_2 x = \gamma y = 0$, $y \in \ker\gamma = \operatorname{im}\beta$, $y = \beta w$ 某个 $w \in D$, 则 $\beta_2(\alpha w) = [\beta w] = [y] = x$.

定义 4.2.3 恰当偶 $(D_2, E_2; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 叫做 $(D, E; \alpha, \beta, \gamma)$ 的导出偶 (derived couple).

因此, 可以重复这种构造而得到一序列恰当偶

$$\begin{array}{ccc} D_r & \xrightarrow{\alpha_r} & D_r \\ \gamma_r \nwarrow & & \swarrow \beta_r \\ & E_r & \end{array}$$

我们称之为第 r 恰当偶, 它是第 $r-1$ 个恰当偶的导出偶.

定理 4.2.4 设 $(D, E; \alpha, \beta, \gamma)$ 是恰当偶使 α, β, γ 有次数 $(-1,-1), (1,0), (0,0)$,

则第 r 个导出偶 $(D_r, E_r; \alpha_r, \beta_r, \gamma_r)$ 有

(1) $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ 具有次数 $(-1,-1), (r, r-1), (0,0)$.

(2) $d_r = \beta_r\gamma_r \colon E_r^{s,t} \to E_r^{s+r,t+r-1}$ 由 $\beta\alpha^{-r+1}\gamma$ 导出.

(3) $E_{r+1}^{s,t} = \ker d_r^{s,t}/\operatorname{im} d_r^{s-r,t-r+1}$.

证 对 r 的简单归纳法.

定义 4.2.5 谱序列是一序列双次数的模 E_r 和同态 $d_r : \{E_r, d_r\}_{r\geqslant 1}$ 使 $d_r d_r = 0$ 且作为双次数模

$$E_{r+1} = H(E_r, d_r)$$

定义 4.2.6 模 M 的子商模是形如 M'/M'' 的模, 其中 $M'' \subset M'$ 都是 M 的子模.

命题 4.2.7 (1) 若 C 是 B 的子商, B 是 A 的子商, 则 C 也是 A 的子商.

(2) Abel 群 G 若具有如下性质之一, 则它的子商也有这个性质:(a) G 有限; (b) G 有限生成; (c) G 挠; (d) G 是 p 支的; (e) $mG=0$ 对某个 m.

证 略.

回到谱序列 $\{E_r, d_r\}$, 我们发现 E_r 是 E_1 的也是 E_2 的子商, 实际上是 $E_s\,(s<r)$ 的子商. 记 $E_2^{s,t} = Z_2^{s,t}/B_2^{s,t}$ ($Z_2^{s,t} = \ker d_1$, 叫 d_1 循环群, $B_2^{s,t} = \operatorname{im} d_1$ 叫 d_1 边缘群). 因为 $E_3^{s,t} = Z_3^{s,t}/B_3^{s,t}$, 第三同构定理允许我们假设

$$0 \subset B_2 \subset B_3 \subset Z_3 \subset Z_2 \subset E_2$$

重复以上步骤

$$0 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_r \subset B_{r+1} \subset \cdots \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset \cdots \subset Z_2 \subset E_2$$

定义 4.2.8 设 $Z_\infty^{s,t} = \bigcap\limits_r Z_r^{s,t}$, $B_\infty^{s,t} = \bigcup\limits_r B_r^{s,t}$ 而 $E_\infty^{s,t} = Z_\infty^{s,t}/B_\infty^{s,t}$ 叫做谱序列 $\{E_r^{s,t}, d_r^{s,t}\}$ 的极限项 (或无穷项).

命题 4.2.9 (1) 若 $d_r^{s,t}=0$ 对所有 s,t, 则 $E_r = E_{r+1}$.

(2) 若 $d_r^{s,t}=0$ 对所有 s,t 和 $r \geqslant q$, 则 $E_\infty^{s,t} = E_q^{s,t}$.

证 显然.

设 $x \in E_r^{s,t}$ 使 $d_r x = 0$, 即 $x \in Z_{r+1}^{s,t}$, $Z_{r+1}^{s,t} \xrightarrow{\sigma_{r+1}} E_{r+1}^{s,t}$ 是投射. 若 $\sigma_{r+1}(x)$ 仍有 $d_{r+1}\sigma_{r+1}(x) = 0$. 则 $\sigma_{r+1}(x) \in Z_{r+2}^{s,t}$. 若这个步骤可重复实行下去, 则

$$\cdots\sigma_{r+k}\cdots\sigma_{r+2}\sigma_{r+1}(x) \in E_\infty^{s,t}$$

这时 x 就留存到无穷.

因此, $E_\infty^{s,t} = \lim\limits_{r\to\infty} E_r^{s,t}$.

定义 4.2.10 若 $0 \neq x \in E_r^{s,t}$, x 称为留存到无穷 (survives to infinity) , 若对所有 $q \geqslant r$, x 是 d_q 循环而对所有 $q \geqslant r$, 它不是 d_q 边缘.$E_\infty^{s,t}$ 作为集合由 0 和那些

留存到无穷的元的等价类所组成.

定义 4.2.11 设 $\mathcal{C}$ 为范畴, 而 C 为 $\mathcal{C}$ 中对象. C 的一个滤子 (filtration) 是一族 C 的子对象 $\{F^sC|s\in\mathbf{Z}\}$:

$$\cdots\subset F^{s-1}C\subset F^sC\subset F^{s+1}C\subset\cdots$$

下面将主要涉及 $\mathcal{C}$ 是链复形范畴或分次模范畴. 这里的链复形 C 和分次模 H 是单分次的. 对每个 n $F^{s-1}C\subset F^sC$ 意味着 $F^{s-1}C_n\subset F^sC_n$.

定理 4.2.12 链复形 C 的每一个滤子 $\{F^sC\}$ 决定一个恰当偶

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha} & D \\ \gamma\nwarrow & & \swarrow\beta \\ & E & \end{array}$$

使 α,β,γ 有次数 $(1,-1),(0,0),(-1,0)$.

证 F^sC 简记为 F^s, 则有链复形短恰当序列

$$0\to F^{s-1}\to F^s\to F^s/F^{s-1}\to 0$$

导出同调群的长恰当序列

$$\cdots\to H_{s+t}(F^{s-1})\xrightarrow{\alpha}H_{s+t}(F^s)\xrightarrow{\beta}H_{s+t}(F^s/F^{s-1})\xrightarrow{\gamma}H_{s+t-1}(F^{s-1})\to\cdots$$

则

$$\begin{array}{ccc} D=\sum\limits_{s,t}H_{s+t}(F^{s-1}) & \xrightarrow{\alpha} & \sum\limits_{s,t}H_{s+t}(F^s)=D \\ \gamma\nwarrow & & \swarrow\beta \\ & \sum\limits_{s,t}H_{s+t}(F^s/F^{s-1})=E & \end{array}$$

是一个恰当偶. 证毕.

推论 4.2.13 链复形 C 的任一个滤子决定一个谱序列.

定义 4.2.14 分次模 H 的滤子 $\{F^sH\}$ 叫做有界的, 若存在 $s=s(n)$ 和 $t=t(n)$ 使 $(s<t)$

$$F^sH_n=0,\qquad F^tH_n=H_n$$

这时 $0=F^sH_n\subset F^{s+1}H_n\subset\cdots\subset F^tH_n=H_n$(这个条件等价于 $\bigcap\limits_s F^sH_n=0$).

定义 4.2.15 设 H 为分次模, 谱序列 $\{E_r,d_r\}$ 称为收敛于 H, 记为 $E_2^{s,t}\overset{s}{\Longrightarrow}H_n$, 若存在一个有界滤子 $\{F^pH\}$, 使

$$E_\infty^{s,t}\cong F^sH_n/F^{s-1}H_n$$

对所有 $s,t,n=t+s$.

如果存在收敛于 H 的谱序列 $E_2^{s,t}\overset{s}{\Longrightarrow}H_n$, 通过计算 $E_2^{s,t}$, 以及微分算子 $d_r(r\geqslant 2)$,

则可以确定分次模 H 的构造.

定理 4.2.16　链复形 C 的一个滤子 $\{F^sC\}$ 所决定的谱序列 $\{E_r^{s,t}, d_r\}$ 有

(1) $E_\infty^{s,t} = E_r^{s,t}$, 对所有 s, t 和充分大 r(依赖于 s, t).

(2) $E_2^{s,t} \stackrel{s}{\Longrightarrow} H_n(C)$.

证　见 [2]P.318.

下面我们不加证明地叙述 Lyndon 在 1948 年证明的一个谱序列, 它现在的形式是由 Hochschild 和 Serre 给出的. 这个谱序列是 Grothendick 谱序列的直接推论. 详见 [2]P.355.

定理 4.2.17(Lyndon-Hochschild-Serre)　设 H 为群 G 的正规子群, M 为 G 模, 则存在收敛谱序列 $\{E_r^{s,t}, d_r^{s,t}\}$ 使

$$E_2^{s,t} = H^s(G/H, H^t(H, M)) \stackrel{s}{\Longrightarrow} H^{s+t}(G, M)$$

这里 $H^t(H, M)$ 是群 H 对模 M 的上同调群等.

如果令 G 为域 R 上 Hopf 代数, H 为 G 的正规 Hopf 子代数, 则 $H^t(H, M) = \mathrm{Ext}_H^{t,*}(M, R)$, 而以上的商群 G/H 改为商 Hopf 代数 $G//H = G/I(H)\cdot G$, 则结论仍成立. 因此

$$H^s(G//H, H^t(H, M)) = \mathrm{Ext}_{G//H}^{s,*}(H^t(H, M), R)$$

$G//H$ 对 $H^t(H, M) = \mathrm{Ext}_H^{t,*}(M, R)$ 的模作用如下：设 $\cdots \to M_2 \xrightarrow{d_2} M_1 \xrightarrow{d_1} M_0 \to M \to 0$ 为 M 的自由分解, 则 $\mathrm{Ext}_H^{t,*}(M, R)$ 是链复形

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Hom}_H^*(M_{t+1}, R) \xleftarrow{d_{t+1}^*} \mathrm{Hom}_H^*(M_t, R) \xleftarrow{d_t^*} \mathrm{Hom}_H^*(M_{t-1}, R) \leftarrow \cdots$$

的上同调群.

$\mathrm{Hom}_H^*(M_t, R)$ 在如下模作用下成为 $G//H$ 模：

$$p(x)\cdot f(m) = f(x\cdot m)$$

其中 $x \in G$, $m \in M_t$, $f \in \mathrm{Hom}_H^*(M_t, R)$, 而 $p\colon G \to G//H$ 为投射. 这是因为若 $p(x) = p(x')$, 则 $x' - x = hx''$ $(h \in I(H),\ x'' \in G)$, 则 $f((x'-x)m) = 0$, 从而 $f(xm) = f(x'm)$. 这样 $\mathrm{Ext}_H^{t,*}(M, R)$ 也成为 $G//H$ 模.

4.3　Adams 谱序列

设 A 表示 $\bmod p$ Steenrod 代数 $(p \geqslant 2)$, X 为谱, $H^*(X)$ 为 X 的 Z_p 上同调群, 设

$$\cdots \to C_s \xrightarrow{d_s} C_{s-1} \to \cdots \to C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} H^*(X) \to 0$$

为 $H^*(X)$ 的 A 自由分解.

定义 4.3.1 以下谱和映射的图形

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \to \Sigma^{-s}E_s & \xrightarrow{f_s} \Sigma^{-s+1}E_{s-1} & \cdots \to \Sigma^{-1}E_1 & \xrightarrow{f_1} E_0 = X \\ \downarrow g_s & \downarrow g_{s-1} & \downarrow g_1 & \downarrow g_0 \\ \Sigma^{-s}K_s & \Sigma^{-s+1}K_{s-1} & \Sigma^{-1}K_1 & K_0 \end{array}$$

叫做谱 X 的 Adams 分解, 如果 K_s 是 Eilenberg-Maclane 谱使 $H^*(K_s) \cong C_s$(作为 A 模), 且

$$E_{s-1} \xrightarrow{g_{s-1}} K_{s-1} \xrightarrow{\rho_s} E_s \xrightarrow{f_s} \Sigma E_{s-1}$$

为上纤维序列, 导出的上同调群长恰当序列化为短恰当序列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \leftarrow & H^*(E_{s-1}) & \xleftarrow{g_{s-1}^*} & H^*(K_{s-1}) & \xleftarrow{\rho_s^*} & H^*(E_s) & \leftarrow 0 \\ & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & \\ 0 \leftarrow & \operatorname{im} d_{s-1} & \xleftarrow{d_{s-1}} & C_{s-1} & \longleftarrow & \ker d_{s-1} & \leftarrow 0 \\ & \| & & & & \| & \\ & \ker d_{s-2} & & & & \operatorname{im} d_s & \end{array}$$

(因此有 $\rho_s^* g_s^* = d_s\colon C_s \to C_{s-1}$).

命题 4.3.2 给定任意谱 X 的 A 自由分解, 相应的 Adams 分解存在.

证 设 K_0 为 E-M 谱使 $H^*(K_0) \cong C_0$, 由定理 3.5.7 存在映射 $g_0\colon X = E_0 \to K_0$ 使 $g_0^* = \epsilon\colon C_0 \to H^*(X)$. 令

$$E_0 \xrightarrow{g_0} K_0 \xrightarrow{\rho_1} E_1 \xrightarrow{f_1} \Sigma E_0$$

为上纤维序列, 由 $g_0^* = \epsilon$ 满, 则它的上同调恰当序列为

$$0 \leftarrow H^*(X) \xleftarrow{\epsilon} C_0 \leftarrow \ker \epsilon \leftarrow 0$$

令 K_1 为 E-M 谱使 $H^*(K_1) \cong C_1$, $g_1\colon E_1 \to K_1$ 为映射使 $g_1^* = d_1\colon C_1 \to \ker \epsilon = \operatorname{im} d_1$. 令

$$E_1 \xrightarrow{g_1} K_1 \xrightarrow{\rho_2} E_2 \xrightarrow{f_2} \Sigma E_1$$

为上纤维序列, 则它的上同调恰当序列为

$$0 \leftarrow \operatorname{im} d_1 \xleftarrow{d_1} C_1 \leftarrow \ker d_1 \leftarrow 0$$

归纳假设已有上纤维序列

$$E_{s-1} \xrightarrow{g_{s-1}} K_{s-1} \xrightarrow{\rho_s} E_s \xrightarrow{f_s} \Sigma E_{s-1}$$

使它的上同调恰当序列为

$$0 \leftarrow \operatorname{im} d_{s-1} \overset{d_{s-1}}{\longleftarrow} C_{s-1} \leftarrow \ker d_{s-1} \leftarrow 0$$

令 K_s 为 E-M 谱使 $H^*(K_s) \cong C_s$, 而 $g_s: E_s \to K_s$ 为映射使 $g_s^* = d_s: C_s \to \operatorname{im} d_s$. 令

$$E_s \xrightarrow{g_s} K_s \xrightarrow{\rho_{s+1}} E_{s+1} \xrightarrow{f_{s+1}} \Sigma E_s$$

为上纤维序列, 导出

$$0 \leftarrow \operatorname{im} d_s \overset{d_s}{\longleftarrow} C_s \leftarrow \ker d_s \leftarrow 0$$

完成了归纳法. 证毕.

定理 4.3.3(Adams)　对连通有限型谱 X, Y, 存在具有滤子 $\cdots \subset F^{s,n+s} \subset \cdots \subset F^{2,n+2} \subset F^{1,n+1} \subset F^{0,n} = [\Sigma^n Y, X]_p$ 的谱序列 $\{E_r^{s,t}, d_r\}$ 使 $(n = t - s)$

(1) $d_r: E_r^{s,t} \to E_r^{s+r,t+r-1}$.

(2) $E_2^{s,t} \cong \operatorname{Ext}_A^{s,t}(H^*(X), H^*(Y))$.

(3) $E_{r+1}^{s,t} \subset E_r^{s,t}$, 当 $r > s+1$, 而 $\bigcap\limits_{r>s+1} E_r^{s,t} = E_\infty^{s,t}$.

(4) $F^{s,t}/F^{s+1,t+1} \cong E_\infty^{s,t}$.

(5) 边缘同态 $[\Sigma^n Y, X]_p \to E_\infty^{0,n} \to E_2^{0,n} \cong \operatorname{Hom}_A^n(H^*(X), H^*(Y))$ 为 Boardman 同态 $[f] \mapsto f^*$.

注　按照定义 4.2.15, 条件 (4) 相当于 Adams 谱序列是收敛于 $[\Sigma^n Y, X]_p$ 的收敛谱序列:

$$E_2^{s,t} \cong \operatorname{Ext}_A^{s,t}(H^*(X), H^*(Y)) \overset{s}{\Longrightarrow} [\Sigma^{t-s} Y, X]_p$$

其中 $[\Sigma^n Y, X]_p$ 表示 $[\Sigma^n Y, X]$ 的 p 局部化. 当 $Y = S^0$, 则变成

$$E_2^{s,t} \cong \operatorname{Ext}_A^{s,t}(H^*(X), Z_p) \overset{s}{\Longrightarrow} \pi_{t-s}(X)_p$$

收敛于 $\pi_*(X)$ 的 p 分量群 (p-primary).

证　在谱 X 的 Adams 分解中, 因为

$$E_s \xrightarrow{g_s} K_s \xrightarrow{\rho_{s+1}} E_{s+1} \xrightarrow{f_{s+1}} \Sigma E_s$$

为上纤维序列, 导出恰当序列

$$[\Sigma^t Y, E_s] \xrightarrow{g_{s*}} [\Sigma^t Y, K_s] \xrightarrow{\rho_{s+1*}} [\Sigma^t Y, E_{s+1}] \xrightarrow{f_{s+1*}} [\Sigma^{t-1} Y, E_s]$$

因此

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{s,t}[\Sigma^t Y, E_{s+1}] & \xrightarrow{\Sigma f_{s+1*}} & \sum\limits_{s,t}[\Sigma^t Y, E_s] \\ \sum \rho_{s+1*} \nwarrow & & \swarrow \sum g_{s*} \\ & \sum\limits_{s,t}[\Sigma^t Y, K_s] & \end{array}$$

是一个恰当偶. 其中 $\alpha = \Sigma f_{s+1*}$, $\beta = \Sigma g_{s*}$, $\gamma = \Sigma \rho_{s+1*}$ 分别有次数 $(-1, -1)$,

$(0,0),(1,0)$. 根据定理 4.2.2 有 r 阶恰当偶:

$$\begin{array}{rl}
\operatorname{im}\alpha^{r-1}: & [\Sigma^{t+r-1}Y, E_{s+r}] \to [\Sigma^t Y, E_{s+1}] \\
& \quad\uparrow \gamma_r \\
E_r^{s,t}: & [\Sigma^t Y, K_s]\text{的子商} \\
& \quad\uparrow \beta_r \\
\operatorname{im}\alpha^{r-1}: & [\Sigma^t Y, E_s] \to [\Sigma^{t-r+1}Y, E_{s-r+1}] \\
& \quad\uparrow \alpha_r \\
\operatorname{im}\alpha^{r-1}: & [\Sigma^{t+1}Y, E_{s+1}] \to [\Sigma^{t-r+2}Y, E_{s-r+2}]
\end{array}$$

其中 α^{r-1} 表示 α 的 $r-1$ 次累次合成. 因此 α_r 有次数 $(-1,-1)$, β_r 有次数 $(r-1,r-1)$, γ_r 有次数 $(1,0)$. 由定理 4.2.2, 这个恰当偶导出谱序列 $\{E_r^{s,t}, d_r^{s,t}\}$ 使微分算子为 $d_r^{s,t}: E_r^{s,t} \to E_r^{s+r,t+r-1}$.

因为 $d_1^{s,t} = \beta\gamma: [\Sigma^t Y, K_s] \to [\Sigma^t Y, K_{s+1}]$ 的导出同态等于

$$d_{s+1}^*: \operatorname{Hom}_A^t(C_s, H^*(Y)) \to \operatorname{Hom}_A^t(C_{s+1}, H^*(Y))$$

(这里 $d_{s+1}: C_{s+1} \to C_s$ 为 $H^*(X)$ 自由分解的微分), 因此

$$E_2^{s,t} = H(E_1^{s,t}, d_1^{s,t}) \cong \operatorname{Ext}_A^{s,t}(H^*(X), H^*(Y))$$

下面为简便起见, 将 X 的 Adams 分解拓广为 $E_s = X$, $K_s = *$(当 $s<0$). 因此

$$[\Sigma^t Y, K_s] = 0, \qquad [\Sigma^t Y, E_s] \overset{f_{s*}}{\cong} [\Sigma^t Y, E_{s-1}] \qquad (\text{当} s<0)$$

于是当 $r > s+1$, 根据第 r 阶恰当偶中 α_r 的定义域和像都可以看作 $[\Sigma^{t-s}Y, X]$ 的子群, 给出滤子 $(n = t-s)$

$$\cdots \subset F^{s,n+s} \subset \cdots \subset F^{1,n+1} \subset F^{0,n} = [\Sigma^n Y, X]$$

其中

$$\begin{aligned}
F^{s,n+s} &= \operatorname{im}\alpha^{r-1}: [\Sigma^t Y, E_s] \to [\Sigma^{t-r+1}Y, E_{s-r+1}] \\
&= \operatorname{im} f_{s*}f_{s-1*}\cdots f_{2*}f_{1*}: [\Sigma^t Y, E_s] \to [\Sigma^{t-s}Y, X]
\end{aligned}$$

$(r = s+1)$. 另外, 当 $r \geqslant s+1$, $E_r^{s-r,t-r+1} = 0$, 则 $E_{r+1}^{s,t} \subset E_r^{s,t}$, 从而 $\bigcap\limits_{r\geqslant s+1} E_r^{s,t} = E_\infty^{s,t}$.

为了证明收敛性, 需要证明

(1) $D = \bigcap\limits_{s\geqslant 0} F^{s,n+s}$ 的元的阶与 p 互素.

(2) $F^{s,t}/F^{s+1,t+1} \cong E_\infty^{s,t}$.

如果有这两个结论, 则可以给出新的滤子 $(n=t-s)$:

$$\cdots \subset \bar{F}^{1,n+1} \subset \bar{F}^{0,n} = [\Sigma^n Y, X]_p = [\Sigma^n Y, X]/D$$

其中 $\bar{F}^{s,n+s}=F^{s,n+s}/D$, 因此 $\bar{F}^{s,t}/\bar{F}^{s+1,t+1}\cong F^{s,t}/F^{s+1,t+1}\cong E_\infty^{s,t}$, 而 $\bigcap\limits_{s\geqslant 0}\bar{F}^{s,n+s}=0$. 定理将全部证完. 剩下的 (1)(2) 两个结论将由以下的命题 4.3.5, 4.3.6 来完成.

命题 4.3.4 设 $H^*(X)$ 是 $E(Q_0)$ 自由的, 则存在 $H^*(X)$ 的 A 自由分解

$$\cdots\to C_2^*\xrightarrow{d_2}C_1^*\xrightarrow{d_1}C_0^*\xrightarrow{\epsilon}H^*(X)\to 0$$

使 $(\ker d_s)^t=0$, 当 $t<2s+2$.

证 首先, 在短恰当序列 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 中若有两个 (例如 M', M'') 是 $E(Q_0)$ 自由的, 则 $\mathrm{Ext}^s_{E(Q_0)}(M'',Z_p)=\mathrm{Ext}^s_{E(Q_0)}(M',Z_p)=0$(当 $s>0$). 由导出的 Ext 的长恰当序列可知 $\mathrm{Ext}^s_{E(Q_0)}(M,Z_p)=0$(当 $s>0$), 因此第三个也是 $E(Q_0)$ 自由的. 因此, $E(Q_0)$ 自由的 $H^*(X)$ 的任一自由分解都使 $\ker d_s$ $(s\geqslant 1)$ 是 $E(Q_0)$ 自由的.

假设 $C_0^*,C_1^*,\cdots,C_{s-1}^*$ 已经选出, 使 $(\ker d_{s-1})^t=0$, $t<2s$. 选择 $(\ker d_{s-1})^{2s}$ 的 $E(Q_0)$ 自由生成元 $q_1,q_2,\cdots,q_n$. 由以下短恰当序列

$$0\to(\ker d_s)^{2s}\to C_s^{2s}\xrightarrow{d_s}(\mathrm{im}\, d_s)^{2s}=(\ker d_{s-1})^{2s}\to 0$$

存在 $k_1,\cdots,k_n\in C_s^{2s}$ 使 $d_s(k_i)=q_i$, 则 $k_1,\cdots,k_n$ 是 C_s^{2s} 的 $E(Q_0)$ 自由生成元, $C_s^{2s}\cong(\mathrm{im}\, d_s)^{2s}$, 从而 $(\ker d_s)^{2s}=0$. 因为 C_s^{2s+1} 中的 $Q_0k_1,Q_0k_2,\cdots,Q_0k_n$ 是线性无关的, 因此 C_s^{2s+1} 没有 d_s 循环, 即 $(\ker d_s)^{2s+1}=0$. 因此 $(\ker d_s)^t=0$, 当 $t<2s+2$. 证毕.

命题 4.3.5 $D=\bigcap\limits_{s\geqslant 0}F^{s,n+s}$ 的元的阶与 p 互素.

证 由于 $H^*(X)$ 的自由分解可使 $(\ker d_s)^t=0$, $t<2s+2$, 则 $H^t(E_s,Z_p)\cong(\ker d_s)^t=0$. 从而 $H_t(E_s,Z_p)=0$, $t<2s+2$. 由 Serre $\mathrm{mod}\, C$ 理论可知 $[\Sigma^t(\bigvee\limits_i S^0),E_s]$ 的元素与 p 互素 (当 $t<2s+2$), 其中 $\bigvee\limits_i S^0$ 是 S^0 的若干个一点和.

因此若 Y 是有限型的谱, 则由恰当序列的方法可推出 $[\Sigma^tY,E_s]$ 的元的阶与 p 互素当 $t<2s+2-k$, k 是与 Y 有关的常数. 因此 $[\Sigma^{t+r}Y,E_{s+r}]$ 有相同的结论当 $t+r<2s+2r+2-k$. 若 s,t 给定, 则取充分大的 r 有 $[\Sigma^{t+r}Y,E_{s+r}]$ 的元的阶与 p 互素, 因此对 $\bigcap\limits_{r\geqslant 0}F^{r,n+r}=\bigcap\limits_{r\geqslant 0}\mathrm{im}\,\alpha^r\colon[\Sigma^{t+r}Y,E_{s+r}]\to[\Sigma^tY,E_s]$ 也成立. 证毕.

命题 4.3.6 对所有 s,t, $F^{s,t}/F^{s+1,t+1}\cong E_\infty^{s,t}$.

证 在定理 4.3.3 证明中的第 r 阶恰当偶

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{im}\,\alpha^{r-1} & \xrightarrow{\alpha_r} & \mathrm{im}\,\alpha^{r-1} \\ & \gamma_r\nwarrow \quad \swarrow\beta_r & \\ & E_r^{s,t} & \end{array}$$

中, $\gamma_r\colon E_r^{s,t}=[\Sigma^tY,K_s]$的子商 $\to\mathrm{im}\,\alpha^{r-1}\colon[\Sigma^{t+r-1}Y,E_{s+r}]\to[\Sigma^tY,E_{s+1}]$, 在命题 4.3.5 的证明中已知当 r 充分大右边的每个元的阶与 p 互素, 但 $[\Sigma^tY,K_s]\cong$

$\mathrm{Hom}_A^t(C_s, H^*(Y))$, C_s 是 A 自由模, 因此 $E_r^{s,t}$ 的每个元是 p 阶的, 因此 $\mathrm{im}\,\gamma_r = 0$, 从而 β_r 是满的 (r 充分大). 由恰当性立即得出当 $r \geqslant s+1$,

$$E_r^{s,t} \cong \mathrm{im}\,\alpha^s / \mathrm{im}\,\alpha^{s+1} = F^{s,t}/F^{s+1,t+1}$$

而当 $r \geqslant s+1$, $E_r^{s,t} = E_\infty^{s,t}$. 证毕.

命题 4.3.7 在 Adams 谱序列中, $E_r^{s,t} = Z_r^{s,t}/B_r^{s,t}$, 其中 $Z_r^{s,t} = \ker d_{r-1}^{s,t} \subset [\Sigma^t Y, K_s]$ 是那些使合成 $\Sigma^t Y \xrightarrow{h} K_s \xrightarrow{\rho_{s+1}} E_{s+1}$ 有到 $\Sigma^{-r+1}E_{s+r}$ 的提升的映射 h 所组成.

$$B_r^{s,t} = \mathrm{im}\, d_{r-1}^{s-r+1,t-r+2} \subset [\Sigma^t Y, K_s]$$

由 $g_s h: \Sigma^t Y \xrightarrow{h} E_s \xrightarrow{g_s} K_s$ 所组成, 其中 h 使合成 $\Sigma^t Y \xrightarrow{h} E_s \to \Sigma^{r-1}E_{s-r+1}$ 为 0 $(r \geqslant 2)$.

证 对 r 归纳. 当 $r=2$, 因为 $d_1^{s,t}$ 是合成

$$d_1^{s,t}: [\Sigma^t Y, K_s] \xrightarrow{\rho_{s+1*}} [\Sigma^t Y, E_{s+1}] \xrightarrow{g_{s+1*}} [\Sigma^t Y, K_{s+1}]$$

因此 $d_1^{s,t}[h] = 0$ 当且仅当 $\rho_{s+1}h$ 有到 $\Sigma^{-1}E_{s+2}$ 的提升 (由恰当性), 因此 $Z_2^{s,t} = \ker d_1^{s,t}$. 同理可证 $B_2^{s,t} = \mathrm{im}\, d_1^{s-1,t}$. 归纳假设 $Z_{r-1}^{s,t} = \ker d_{r-2}^{s,t}$, $B_{r-1}^{s,t} = \mathrm{im}\, d_{r-2}^{s-r+2,t-r+3}$. 因为

$$d_{r-1}^{s,t}: \begin{array}{c} E_{r-1}^{s,t} \\ \| \\ [\Sigma^t Y, K_s] \\ \text{的子商} \end{array} \xrightarrow{\gamma_{r-1}} \begin{array}{c} \mathrm{im}\,\alpha^{r-2}: \\ [\Sigma^t Y, \Sigma^{-r+2}E_{s+r-1}] \\ \downarrow \\ [\Sigma^t Y, E_{s+1}] \end{array} \xrightarrow{\beta_{r-1}} \begin{array}{c} E_{r-1}^{s+r-1,t+r-2} \\ \| \\ [\Sigma^t Y, \Sigma^{-r+2}K_{s+r-1}] \\ \text{的子商} \end{array}$$

对 $[h] \in [\Sigma^t Y, K_s]$, 使 $[h] \in \ker d_{r-2}^{s,t}$, 它的类 $\{[h]\} \in E_{r-1}^{s,t}$, 由 4.2.1 及 4.2.3(2) 关于导出恰当偶的定义可知 (注意到 $\alpha = \sum f_{s*}$, $\beta = \sum g_{s*}$, $\gamma = \sum \rho_{s+1*}$ 而 α_r, β_r, γ_r 由 α, β, γ 导出)

$$d_{r-1}^{s,t}\{[h]\} = \beta_{r-1}\gamma_{r-1}\{[h]\} = \{\beta_{r-2}\alpha_{r-2}^{-1}\gamma_{r-2}[h]\}$$

故

$$d_{r-1}^{s,t}\{[h]\} \in E_{r-1}^{s+r-1,t+r-2}$$

因此 $d_{r-1}^{s,t}\{[h]\} = 0$ 当且仅当 $\rho_{s+1}h$ 有到 $\Sigma^{-r+2}E_{s+r-1}$ 的提升 $\bar{h}$ 而且 $g_{s+r-1}\bar{h} \in \mathrm{im}\, d_{r-2} = B_{r-1}^{s+r-1,t+r-2}$, 由归纳假设, 存在 $\bar{\bar{h}}: \Sigma^t Y \to \Sigma^{-r+2}E_{s+r-1}$ 使得 $g_{s+r-1}\bar{h} = g_{s+r-1}\bar{\bar{h}}$. 而且以下合成

$$\Sigma^t Y \xrightarrow{\bar{\bar{h}}} \Sigma^{-r+2}E_{s+r-1} \to E_{s+1}$$

为 0, 因此 $g_{s+r-1}(\bar{h} - \bar{\bar{h}}) = 0$. 由恰当性, $\bar{h} - \bar{\bar{h}}$ 有到 $\Sigma^{-r+1}E_{s+r}$ 的提升 h', 从而 h' 是 $\rho_{s+1}h$ 到 $\Sigma^{-r+1}E_{s+r}$ 的提升, 因此 $Z_r^{s,t} = \ker d_{r-1}^{s,t}$. 同理可证 $B_r^{s,t} = \mathrm{im}\, d_{r-1}^{s-r+1,t-r+2}$. 完成了归纳法. 证毕.

注 我们证明定理 4.3.3 时假定了 $H^*(X)$ 是 $E(Q_0)$ 自由的, 这样就不能包括

$X = S^0 = Y$ 的情况. 但是, 下面的论断可以使 Adams 谱序列对 $X = S^0 = Y$ 也是成立的. 设 KZ 是 E-M 谱, 使

$$\pi_r(KZ) = \begin{cases} Z, & r = 0 \\ 0, & r \neq 0 \end{cases}$$

$f: S^0 \to KZ$ 为 $\pi_0(KZ)$ 的生成元, 以下为上纤维序列

$$S^0 \xrightarrow{f} KZ \to W$$

则 $\pi_r(S^0) \cong \pi_{r+1}(W)$ $(r > 0)$, 而

$$\mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_p, Z_p) \cong \mathrm{Ext}_A^{s-1,t}(H^*(W), Z_p)$$

$t - s > 0$, $s > 0$, 并且 $H^*(W)$ 是 $E(Q_0)$ 自由的.

下面说明 Adams 谱序列的自然性. 若 $k: X \to \overline{X}$ 为映射, 则 $H^*(X)$ 和 $H^*(\overline{X})$ 的自由分解可以由以下可换图形联系:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to C_2 & \xrightarrow{d_2} & C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 & \xrightarrow{\epsilon} & H^*(X) & \to 0 \\ \uparrow \lambda_2 & & \uparrow \lambda_1 & & \uparrow \lambda_0 & & \uparrow k^* & \\ \cdots \to \overline{C}_2 & \xrightarrow{\bar{d}_2} & \overline{C}_1 & \xrightarrow{\bar{d}_1} & \overline{C}_0 & \xrightarrow{\bar{\epsilon}} & H^*(\overline{X}) & \to 0 \end{array}$$

命题 4.3.8 X 和 $\overline{X}$ 相当于上述自由分解的 Adams 分解中存在一个映射 $k_s: E_s \to \overline{E}_s$ 和 $m_s: K_s \to \overline{K}_s$ $(s \geqslant 0)$ 使

(1) $m_s^* = \lambda_s$.

(2) $k_0 = k: X \to \overline{X}$.

(3) 以下图形同伦可换:

$$\begin{array}{ccccccc} E_s & \xrightarrow{g_s} & K_s & \xrightarrow{\rho_{s+1}} & E_{s+1} & \xrightarrow{f_{s+1}} & \sum E_s \\ \downarrow k_s & & \downarrow m_s & & \downarrow k_{s+1} & & \downarrow \sum k_s \\ \overline{E}_s & \xrightarrow{\bar{g}_s} & \overline{K}_s & \xrightarrow{\bar{\rho}_{s+1}} & \overline{E}_{s+1} & \xrightarrow{\bar{f}_{s+1}} & \sum \overline{E}_s \end{array}$$

证 对 s 作归纳. 首先因为 K_s, $\overline{K}_s$ 是 E-M 谱, 则对任意 $s \geqslant 0$, 存在映射 $m_s: K_s \to \overline{K}_s$ 使 $m_s^* = \lambda_s$. 归纳假设 $k_s: E_s \to \overline{E}_s$ 已给 (当 $s = 0$ 取 $k_0 = k$). 因为 $\rho_s^* g_s^* = d_s$, $m_s^* = \lambda_s$ 而 $d_s \lambda_s = \lambda_{s-1} \overline{d}_s$, 因此 $\rho_s^* g_s^* m_s^* = m_{s-1}^* \overline{\rho}_s^* \overline{g}_s^* = \rho_s^* k_s^* \overline{g}_s^*$(后者由归纳假设 $\overline{\rho}_s m_{s-1} \simeq k_s \rho_s$). 但是 $\rho_s^*: H^*(E_s) \to H^*(K_{s-1})$ 是 $\ker d_{s-1}$ 到 C_{s-1} 的内射, 因此 $g_s^* \cdot m_s^* = k_s^* \cdot \overline{g}_s^*$. 因为 $\overline{K}_s$ 是 E-M 谱, 立即得出 $m_s g_s \simeq g_s k_s$, 由上纤维的性质, 存在 $k_{s+1}: E_{s+1} \to \overline{E}_{s+1}$ 使以上图形 (3) 同伦可换, 完成了归纳法. 证毕.

推论 4.3.9 Adams 谱序列在以下可换意义下是自然的:

$$\begin{array}{ccc} E_2^{s,t}(X) \cong \mathrm{Ext}_A^{s,t}(H^*(X), H^*(Y)) & \Longrightarrow & [\Sigma^n Y, X]_p \\ \downarrow k^* & & \downarrow k_* \\ E_2^{s,t}(\overline{X}) \cong \mathrm{Ext}_A^{s,t}(H^*(\overline{X}), H^*(Y)) & \Longrightarrow & [\Sigma^n Y, \overline{X}]_p \end{array}$$

下面我们进而讨论 Adams 谱序列中的乘法. 当 $X = Y = S^0$, 则 $E_2^{s,t} \cong \mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_p, Z_p)$ 是 Steenrod 代数 A 的上同调 $H^{s,t}(A)$. 由 4.1 节可知它有 Cup 积, 而 $\pi_n(S^0)_p = [\Sigma^n S^0, S^0]_p$ 也有合成乘积.

下面有一个定理可使 Adams 谱序列中都有乘法而使在 $E_2^{s,t}$ 项中的乘法和 $H^{s,t}(A)$ 的乘法一致, 在 $\pi_n(S^0)_p$ 中的乘法就是上述的合成乘积.

定理 4.3.10 当 $X = Y = S^0$, 可定义乘积

$$E_r^{s,t} \otimes E_r^{s',t'} \to E_r^{s+s',t+t'}$$

(1) 乘法是结合的, 对次数 $t-s$ 反交换.

(2) 乘积 $E_2^{s,t} \otimes E_2^{s',t'} \to E_2^{s+s',t+t'}$ 除了符号 $(-1)^{ts'}$ 外和 Cup 乘积

$$H^{s,t}(A) \otimes H^{s',t'}(A) \to H^{s+s',t+t'}(A)$$

重合.

(3) $d_r(u \cdot v) = (d_r u)v + (-1)^{t-s} u(d_r v)$.

(4) 乘积和同构 $E_{r+1}^{s,t} \cong H(E_r, d_r)$ 可交换, 且和 $E_R^{s,t} \hookrightarrow E_r^{s,t}$ $(s < r < R \leqslant \infty)$ 可交换.

(5) E_∞ 中的乘积可由合成乘积

$$\pi_m(S^0) \otimes \pi_{m'}(S^0) \to \pi_{m+m'}(S^0)$$

过渡到商而得到.

我们省略了这个定理的证明, 详见文献 [3] 定理 2.2.

4.4 高阶上同调运算

首先我们回顾一下第 1 章所讨论的原初 (第 1 阶) 上同调运算. X 是拓扑空间或谱, 则 Steenrod 循环缩减幂 $P^i: H^n(X; Z_p) \to H^{n+2i(p-1)}(X; Z_p)$ 是一个原初上同调运算. 因为 Z_p 上同调群 $H^*(X; Z_p) = KZ_p^*(X) = [X; \Sigma^* KZ_p]$, 其中 KZ_p 为 Eilenberg-Maclane 谱, 因此对循环缩减幂, 存在 $f: KZ_p \to KZ_p$ 为次数 $2i(p-1)$ 的映射 (即 $f: KZ_p \to \Sigma^{2i(p-1)} KZ_p$) 使 $P^i = f_*: [X; \Sigma^n KZ_p] \to [X, \Sigma^{n+2i(p-1)} KZ_p]$.

一般地, 若 A, X 是谱, 广义上同调群 $A^n(X) = [X, \Sigma^n A]$ $(n \in \mathbf{Z})$. 若 $\alpha: A \to B$ 为次数 r 的映射 (即 $\alpha: A \to \Sigma^r B$), 则

$$\alpha_*: A^n(X) \to B^{n+r}(X)$$

是一个原初 (第 1 阶) 上同调运算, 这是因为 α_* 对 X 的映射是自然的. 下面我们将讨论 n 阶上同调运算 $(n \geqslant 2)$.

定义 4.4.1 复形 $C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{d_1} C_0$(其中 C_i 为 A 自由模) 称为导出

一个 n 阶运算, 若存在以下谱和映射的图形 Γ^n:

$$\begin{array}{llll} E_n \xrightarrow{p_n} & E_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} \cdots \rightarrow & E_2 \xrightarrow{p_2} & E_1 = K_0 \\ \downarrow \psi_n & \downarrow \psi_{n-1} & \downarrow \psi_2 & \downarrow \psi_1 \\ \Sigma^{-n+1} K_n & \Sigma^{-n+2} K_{n-1} & \Sigma^{-1} K_2 & K_1 \end{array}$$

使 K_i 为 E-M 谱具有 $H^*(K_i) \cong C_i$ 且使

$$\Sigma^{-i+1} K_{i-1} \xrightarrow{j_i} E_i \xrightarrow{p_i} E_{i-1} \xrightarrow{\psi_{i-1}} \Sigma^{-i+2} K_{i-1}$$

为上纤维序列, 具有 $j_i^* \psi_i^* = d_i: \Sigma^{-i+1} C_i \rightarrow \Sigma^{-i+1} C_{i-1}$. 我们定义联系于上述图形 Γ^n 的 n 阶上同调运算 Ψ_n 如下. 设 X 是谱, $u \in E_1^s(X) = [X, E_1]^s = [X, \Sigma^s E_1]$, 称 Ψ_n 在 u 有定义, 若存在提升 $v \in E_n^s(X) = [X, E_n]^s$ 使 $\Pi_{n*}(v) = u$, 其中 $\Pi_r = p_2 \cdots p_r: E_r \rightarrow E_1$. 若 Ψ_n 在 u 有定义, 令

$$\Psi_n(u) = \bigcup_v \psi_{n*}(v) \subset [X, K_n]^s = K_n^s(X)$$

其中并是取遍所有的提升 v. 因此 Ψ_n 作为关系给出 (即 $[X, E_1]^s \times [X, K_n]^s$ 的子集). 有时, 记 $\Psi_n = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$.

不是所有的复形 $C_n \xrightarrow{d_n} \cdots \rightarrow C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0$ 都能导出 n 阶运算 Γ^n. 能导出 n 阶运算 Γ^n 的条件比较复杂, 这里不详细讨论. 当 $n = 1, 2$, 即复形 $C_1 \rightarrow C_0$ 或 $C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0$ 总是可以导出 1 阶或 2 阶运算 Γ^1 和 Γ^2. 但一般地, 归纳的步骤可按以下命题来做.

命题 4.4.2　复形 $C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \rightarrow C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0$ 导出 n 阶上同调运算, 当且仅当复形 $C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_0$ 导出 $n-1$ 阶上同调运算

$$\begin{array}{lll} E_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} \cdots \rightarrow & E_2 \rightarrow & E_1 \\ \downarrow \psi_{n-1} & \downarrow \psi_2 & \downarrow \psi_1 \\ \Sigma^{-n+2} K_{n-1} & \Sigma^{-1} K_2 & K_1 \end{array}$$

使 ψ_{n-1} 和映射 $f: K_{n-1} \rightarrow K_n$ $(f^* = d_n)$ 的合成 $f\psi_{n-1} \simeq 0$.

证　必要性　因为复形 $C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_0$ 导出 Γ^n:

$$\begin{array}{lll} E_n \xrightarrow{p_n} & E_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow & E_1 \\ \downarrow \psi_n & \downarrow \psi_{n-1} & \downarrow \psi_1 \\ \Sigma^{-n+1} K_n & \Sigma^{-n+2} K_{n-1} & K_1 \end{array}$$

则

$$\begin{array}{ll} E_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} \cdots \xrightarrow{p_2} & E_1 \\ \downarrow \psi_{n-1} & \downarrow \psi_1 \\ \Sigma^{-n+1} K_{n-1} & K_1 \end{array}$$

由 $C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_0$ 导出且

$$\Sigma^{-n+1}K_{n-1} \xrightarrow{j_n} E_n \xrightarrow{p_n} E_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} \Sigma^{-n+2}K_{n-1}$$

为上纤维序列, 而 $f\psi_{n-1} \simeq \psi_n j_n \psi_{n-1} \simeq 0$(因为 $f \simeq \psi_n j_n$ 及由恰当性 $j_n\psi_{n-1} \simeq 0$).

充分性. 若 $C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} C_0$ 导出

$$\begin{array}{ccc} E_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} \cdots \xrightarrow{p_2} & & E_1 \\ \downarrow \psi_{n-1} & & \downarrow \psi_1 \\ \Sigma^{-n+2}K_{n-1} & & K_1 \end{array}$$

使 $f\psi_{n-1} \simeq 0$. 令

$$\begin{array}{l} \Sigma^{-n+1}K_{n-1} \xrightarrow{r_n} E_n \xrightarrow{p_n} E_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} \Sigma^{-n+2}K_{n-1} \xrightarrow{j_n} \Sigma E_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad f \searrow \quad \downarrow \psi_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Sigma^{-n+2}K_n \end{array}$$

为上纤维序列, 由 $f\psi_{n-1} \simeq 0$, 则存在 ψ_n 使 $f \simeq \psi_n j_n$. 因此 $C_n \to \cdots \to C_0$ 导出 n 阶运算 Γ^n:

$$\begin{array}{ccc} E_n \xrightarrow{p_n} & E_{n-1} \to \cdots \to & E_1 \\ \downarrow \psi_n & \downarrow \psi_{n-1} & \downarrow \psi_1 \\ \Sigma^{-n+1}K_n & \Sigma^{-n+2}K_{n-1} & K_1 \end{array}$$

证毕.

命题 4.4.3 $\Psi_{n-1} = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{n-1})$ 是对应于 Γ^{n-1} 的 $n-1$ 阶上同调运算, $\Psi_n = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{n-1}, \psi_n)$ 是相应于 Γ^n 的 n 阶上同调运算, 则 $\Psi_n(u)$ 有定义当且仅当 $\Psi_{n-1}(u)$ 有定义且 $0 \in \Psi_{n-1}(u)$.

证 因为 $0 \in \Psi_{n-1}(u)$ 意味着 u 有提升 $v \in [X, E_{n-1}]^s$ 使 $\psi_{n-1}v \simeq 0$, 则由恰当性, 有 $v' \in [X, E_n]^s$ 使 $p_n v' \simeq v$, 即 u 有提升 v', 从而 $\Psi_n(u)$ 有定义. 必要性的证明留给读者. 证毕.

以上命题指出了, Ψ_n 的定义域是 $\ker \Psi_{n-1}$. 下面我们将得出, Ψ_n 的不定类 (indeterminacy) 将由另一个 $n-1$ 阶上同调运算 Ψ'_{n-1} 给出:

$$\begin{array}{llll} E'_{n-1} \xrightarrow{p'_{n-1}} \cdots \to & E'_2 \xrightarrow{p'_2} & E'_1 = \Sigma^{-1}K_1 & \\ \downarrow k_{n-1} & \downarrow k_2 & \downarrow k_1 = j_2 & \\ E_n \xrightarrow{p_n} \cdots \to & E_3 \xrightarrow{p_3} & E_2 \xrightarrow{p_2} & E_1 \\ \downarrow \psi_n & \downarrow \psi_3 & \downarrow \psi_2 & \downarrow \psi_1 \\ \Sigma^{-n+1}K_n & \Sigma^{-2}K_3 & \Sigma^{-1}K_2 & K_1 \end{array}$$

令 $E'_1 = \Sigma^{-1}K_1$, 则映射 $j_2: E'_1 \to E_2$ 和 $p_3: E_3 \to E_2$ 将导出回拖 (见命题 3.2.8)E'_2. 接着进行下去, 得到一系列回拖 $E'_3, \cdots, E'_{n-1}$ 如上面的图形. 由回拖的性质, 以下图形可换:

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^{-i}K_i & \xrightarrow{j_i'} & E_i' & \xrightarrow{p_i'} & E_{i-1}' & \xrightarrow{\psi_{i-1}'} & \Sigma^{-i+1}K_i \\ \| & & \downarrow k_i & & \downarrow k_{i-1} & & \| \\ \Sigma^{-i}K_i & \xrightarrow{j_i} & E_{i+i} & \xrightarrow{p_i} & E_i & \xrightarrow{\psi_i} & \Sigma^{-i+1}K_i \end{array}$$

因此得出复形 $\Sigma^{-1}C_n \to \cdots \to \Sigma^{-1}C_1$ 导出的 $n-1$ 阶运算

$$\begin{array}{ccc} E_{n-1}' \to & E_{n-2}' \to \cdots \to & E_1' \\ \downarrow \psi_{n-1}' & \downarrow \psi_{n-2}' & \downarrow \psi_1' \\ \Sigma^{-n+1}K_n & \Sigma^{-n+2}K_{n-1} & \Sigma^{-1}K_2 \end{array}$$

其中 ψ_{i-1}' 为合成:$E_{i-1}' \xrightarrow{k_{i-1}} E_i \to \Sigma^{-i+1}K_i$, 且将相应的 $n-1$ 阶上同调运算记为 $\Psi_{n-1}' = (\psi_1', \cdots, \psi_{n-1}')$.

设 Ψ_n 在 $u \in [X, E_1]^s$ 有定义, $v_1, v_2 \in [X, E_n]^s$ 为 u 的两个提升, 即 $p_2 \cdots p_n(v_1) = p_2 \cdots p_n(v_2) = u$, 因此 $p_2 \cdots p_n(v_1 - v_2) = 0$. 考虑以下图形:

$$\begin{array}{cccccc} X \xrightarrow{w} & E_{n-1}' & \xrightarrow{p_{n-1}'} \cdots \xrightarrow{p_2'} & E_1' = \Sigma^{-1}K_1 & \\ v_1 - v_2 \searrow & \downarrow k_{n-1} & & \downarrow k_1 & \\ & E_n & \xrightarrow{p_n} \cdots \xrightarrow{p_3} & E_2 & \xrightarrow{p_2} E_1 \\ & & & \downarrow \psi_2 & \downarrow \psi_1 \\ & & & \Sigma^{-1}K_2 & K_1 \end{array}$$

因为 $E_1' \to E_2 \to E_1 \to K_1$ 为上纤维序列, 由恰当性, $p_3 \cdots p_n(v_1 - v_2) = k_1(w_1)$, $w_1 \in [X, E_1']^s$. 又由于 $\psi_2 k_1(w_1) = 0$, 即 $\psi_1'(w_1) = 0$, 因此有 $w_2 \in [X, E_2']^s$, 使 $p_2'(w_2) = w_1$ 等. w_1 有提升 $w \in [X, E_{n-1}']^s$, 即 $p_2' \cdots p_{n-1}'(w) = w_1$. 因此有 $v_1 - v_2 = k_{n-1}(w)$, 从而

$$\psi_n(v_1) - \psi_n(v_2) = \psi_{n-1}'(w)$$

这是因为 $\psi_{n-1}' = \psi_n \cdot k_{n-1}$. 更进一步, 若 $v \in [X, E_n]^s$ 是 u 的提升, 则 $v + k_{n-1}w$ 对任何 $w \in [X, E_{n-1}']^s$ 也是 u 的提升, 因此 Ψ_n 的不定类是 $\mathrm{im}\,\Psi_{n-1}'$, 我们可以认为

$$\Psi_n\colon \ker \Psi_{n-1} \to [X, K_n]^s / \mathrm{im}\,\Psi_{n-1}'$$

例如, 由复形 $C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0$ 导出的二阶运算

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{p_2} & E_1 = K_0 \\ \downarrow \psi_2 & & \downarrow \psi_1 \\ \Sigma^{-1}K_2 & & K_1 \end{array}$$

我们有

$$\Psi_2\colon \ker d_1^* \to [X, K_2]^* / \mathrm{im}\, d_2^*$$

这里 $d_i^*\colon [X, K_{i-1}]^* \to [X, K_i]^*$ 是由 $C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1}$ 导出的同态.

命题 4.4.4(自然同态)　设 $\alpha\colon X' \to X$ 为映射, $u \in [X, E_1]^s$. 若 $\Psi_n(u)$ 有定义,

则 $\Psi_n(\alpha^*u)$ 也有定义, 且 $\alpha^*\Psi_n(u)=\Psi_n(\alpha^*u)$.

证明是显然的.

若将 n 阶运算 Γ^n 作用于双角锥函子 Σ^r, 则得到 n 阶运算 $\Sigma^r\Gamma^n$, 从而有 n 阶上同调运算 $\Sigma^r\Psi_n$, 叫做 Ψ_n 的 r 次双角锥.

命题 4.4.5(双角锥性质) 设 $u\in[X,E_1]^s$, 则 $\Psi_n(\Sigma^r u)$ 有定义当且仅当 $\Sigma^r\Psi_n(u)$ 有定义. 这时有 $\Sigma^r\Psi_n(u)=\Psi_n(\Sigma^r u)$ (其中 $\Sigma^r\colon[X,E_1]^s\to[X,E_1]^{s+r}$ 为双角锥函子).

下面我们指出, Adams 谱序列的微分算子 d_r 实际上是 r 阶上同调运算.

定理 4.4.6 设 $\cdots\to C_s\xrightarrow{d_s}\cdots\to C_1\xrightarrow{d_1}C_0\xrightarrow{\epsilon}H^*(X)\to 0$ 为 $H^*(X)$ 的自由分解, $\{E_r^{s,t},d_r^{s,t}\}$ 为 4.3 节中定义的相应于上述自由分解的 Adams 谱序列, 则存在由复形 $C_{s+r}\to\cdots\to C_s$ 导出的 r 阶上同调运算 Ψ_r^s $(s\geqslant 0,\ r\geqslant 2)$ 使以下图形可换:

$$\begin{array}{ccc}
Z_r^{s,t} & \xrightarrow{\Psi_r^s} & [Y,\Sigma^{-r+1}K_{s+r}]^{-t}/B_r^{s+r,t+r-1}\\
\downarrow & & \uparrow\\
E_r^{s,t} & \xrightarrow{d_r^{s,t}} & E_r^{s+r,t+r-1}
\end{array}$$

其中 $E_r^{s,t}=Z_r^{s,t}/B_r^{s,t}$, 即 $Z_r^{s,t}=\ker d_{r-1}^{s,t}$, 而 $B_r^{s,t}=\operatorname{im} d_{r-1}^{s-r,t-r+1}$.

证 考虑以下图形:

$$\begin{array}{ccccccc}
F'_{r-1} & \longrightarrow & F'_{r-2} & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & F'_1=\Sigma^{-1}K_{s+1} & & \\
\downarrow m & & \downarrow & & \downarrow & & \\
F_r & \longrightarrow & F_{r-1} & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & F_2 & \to & F_1=K_s\\
\downarrow n & & \downarrow & & \downarrow & & \searrow\\
\Sigma^{-r+1}E_{s+r} & \xrightarrow{f_{s+r}} & \Sigma^{-r+2}E_{s+r-1} & \xrightarrow{f_{s+r-1}}\cdots\longrightarrow & \Sigma^{-1}E_{s+2} & \to & E_{s+1}\\
\downarrow g_{s+r} & & \downarrow g_{s+r-1} & & \downarrow g_{s+2} & & \downarrow g_{s+1}\\
\Sigma^{-r+1}K_{s+r} & & \Sigma^{-r+2}K_{s+r-1} & & \Sigma^{-1}K_{s+2} & & K_{s+1}
\end{array}$$

其中第三行为 X 的 Adams 分解 (见定义 4.3.1), 第二行是第三行的一序列回拖, 第一行是第二行的一序列回拖. 因此第二行是复形 $C_{s+r}\to\cdots\to C_s$ 导出的 r 阶运算, 可定义 r 阶上同调运算 Ψ_r^s, 而第一行是复形 $\Sigma^{-1}C_{s+r}\to\cdots\to\Sigma^{-1}C_{s+1}$ 导出的 $(r-1)$ 阶运算, 可定义 $(r-1)$ 阶上同调运算 Ψ'_{r-1}. 因此

$$\Psi_r^s\colon\ker\Psi_{r-1}^s\to[Y,\Sigma^{-r+1}K_{s+r}]^{-t}/\operatorname{im}\Psi'_{r-1}$$

下面先证明 $\operatorname{im}\Psi'_{r-1}=B_r^{s+r,t+r-1}$, 再证明 $\ker\Psi_{r-1}=Z_r^{s,t}$.

首先指出, $Z_r^{s,t}\subset[Y,K_s]^{-t}$ 是由那些使 $\Sigma^tY\xrightarrow{h}K_s\xrightarrow{\rho_{s+1}}E_{s+1}$ 有到 $\Sigma^{-r+1}E_{s+r}$ 的提升的映射 $h\colon\Sigma^tY\to K_s$ 所组成. 而 $B_r^{s,t}\subset[Y,K_s]^{-t}$ 是由 $g_sh\colon\Sigma^tY\xrightarrow{h}E_s\xrightarrow{g_s}K_s$ 所组成, 其中 h 使合成

$$\Sigma^tY\xrightarrow{h}E_s\to\Sigma^{r-1}E_{s-r+1}$$

为 0(见命题 4.3.7).

但是 $\operatorname{im}\Psi'_{r-1}$ 是由合成映射 $g_{s+r}nmh'$ 所组成, 其中 $h'\in[Y,F'_{r-1}]^{-t}$, 显然合成 $\Sigma^tY\xrightarrow{nmh'}\Sigma^{-r-1}E_{s+r}\to E_{s+1}$ 是零 (由以上图形的可换性得出). 因此

$$\operatorname{im}\Psi'_{r-1}\subset B_r^{s+r,t+r-1}$$

另一方面, 任意 $g_{s+r}h:\Sigma^tY\xrightarrow{h}\Sigma^{-r+1}E_{s+r}\xrightarrow{g_{s+r}}\Sigma^{-r+1}K_{s+r}$ 属于 $B_r^{s+r,t+r-1}$, 因此合成

$$\Sigma^tY\xrightarrow{h}\Sigma^{-r+1}E_{s+r}\to E_{s+1}$$

为 0, 从而有 $\bar h$ 使下图可换, 再有 g 使下图可换, 因此有 $B_r^{s+r,t+r-1}\subset\operatorname{im}\Psi'_{r-1}$.

$$\begin{array}{l}\Sigma^tY\\ \bar h\swarrow g\downarrow\ \ h\searrow\\ F'_1\leftarrow F'_{r-1}\to\Sigma^{-r+1}E_{s+r}\to\Sigma^{-r+1}K_{s+r}\\ \quad\searrow\qquad\swarrow\\ \Sigma^{-1}E_{s+2}\to E_{s+1}\end{array}$$

另外, 容易证明 $\ker\Psi_{r-1}=Z_r^{s,t}$. 因为 $h:\Sigma^{-t}Y\to K_s$ 使合成 $\Sigma^tY\xrightarrow{h}K_s\xrightarrow{\rho_{s+1}}E_{s+1}$ 有到 $\Sigma^{-r+1}E_{s+r}$ 的提升当且仅当 h 可提升为 $l:\Sigma^tY\to F_r$, 即 h 为合成

$$\Sigma^tY\xrightarrow{l}F_r\to F_1=K_s$$

因此对这个提升 l, $g_{s+r}nl$ 同时代表了 $\Psi_r^s(h)$ 和 $d_r[h]$. 证毕.

参 考 文 献

[1] Liulevicius A. 1963. Zeroes of the cohomology of the Steenrod algebra. Proc. A. M. S. **14**, 972~976

[2] Joseph J R. 1979. An Introduction to Homological Algebra. New York: Academic Press

[3] Adams J F. 1957. On the structure and application of the Steenrod algebra. Comm. Math. Helv. **32**

[4] Bousfield A K, et al. 1966. The mod p lower central series and the Adams spectral sequence. Topology, Vol 5 No. 4, 331~342

[5] Kan D M, Whitehead G W. 1965. The reduced join of two spectra. Topology, Vol 3, 239~261

[6] Switzer R M. 1975. Algebra Topology—Homotopy and Homology. Springer-Verlag

[7] Adams J F. 1961. Stable homotopy theory. Lect. Notes in Math. Vol 3. Springer-Verlag

[8] Margalis H R. 1983. Spectra and the Steenrod algebra. North Holland Math. Library

第 5 章　Steenrod 代数的上同调

第 4 章中, 我们已叙述了收敛到球面稳定同伦群的 Adams 谱序列

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_p, Z_p) \Rightarrow \pi_{t-s}(S^0)_p$$

这是计算球面稳定同伦群的重要工具, 它的 E_2 项, 即 Steenrod 代数上同调

$$H^{s,t}(A) = \mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_p, Z_p)$$

是决定球面稳定同伦群的主要数据.

关于 $H^{s,t}(A)$ 的计算结果如下. $H^{0,*}(A) \cong Z_p$ 是显然的.$H^{1,*}(A)$ 实际上由 Steenrod[1] 确定.$H^{2,*}(A)$ 当 $p=2$ 由 Adams, J.F.[2] 确定, 并得出了 $H^{3,*}(A)$ 中的可分解元.$H^{2,*}(A)$ 当 $p>2$ 由 Liulevicius[3] 得出.$H^{3,*}(A)$ 当 $p=2$ 由 Wang[4] 得出, 当 $p>2$ 由 Aikawa, T.[5] 得出. 另外 Tangora[6] 得出 $H^{s,t}(A)$ 当 $t-s \leqslant 70$, $p=2$. Nakamara[7] 利用 May 谱序列 [8] 得出 $E^0H^{s,t}(A)$ 当 $t-s \leqslant 2(p-1)(3p^2+3p+4)-2$.

$H^{s,*}(A)$ 的计算是一个比较困难的问题. 本章介绍 $H^{s,*}(A)$ 当 $s=0,1,2$ 的计算, 对不同的 s 将用不同的方法. 本章材料 5.1~5.3 节参看文献 [3], 5.4 节参看文献 [8].

5.1　Bar 和 Cobar 分解、$H^{1,*}(A)$ 的计算

设 C 为连通 R 分次 Hopf 代数, $\epsilon\colon C \to R$ 为增广映射.Bar 分解是 R 的一个特殊的 C 自由分解, 其中 R 的 C 模结构由增广 ϵ 给出.

设 $I(C) = \ker\epsilon$ (或 $I(C) = \sum\limits_{i>0} C_i$), 令 $\overline{B}(C)$ 为分次 R 模, 使当 $q \geqslant 0$

$$\overline{B}(C)_q = \otimes^q I(C) = I(C) \otimes \cdots \otimes I(C)$$

它的生成元写作 "棒棰"(bar) 而不用张量积符号 $\otimes$, 例如 $[a_1|a_2|\cdots|a_q]$, 其中 $a_i \in I(C)$. 规定 $\overline{B}(C)_0$ 为 $[\,]$ 生成的 R 模.

设 $B(C)$ 为自由 C 模链复形, 使

$$B(C)_q = C \otimes_R \overline{B}(C)_q$$

它的元素形如 $a[a_1|a_2|\cdots|a_q]$, $a \in C$, $a_i \in I(C)$. $B(C)$ 在域 R 上的增广 $\epsilon'\colon B(C) \to R$ 定义为

$$\begin{aligned} \epsilon'(a[a_1|a_2|\cdots|a_q]) &= 0, & \text{当 } q>0 \\ \epsilon'(a[\,]) &= \epsilon(a), & \text{当 } q=0 \end{aligned}$$

设 $j\colon B(C) \to \overline{B}(C)$, $i\colon \overline{B}(C) \to B(C)$ 定义为

$$i[a_1|\cdots|a_q] = 1\cdot[a_1|\cdots|a_q]$$
$$j(a[a_1|\cdots|a_q]) = \epsilon(a)[a_1|\cdots|a_q]$$

下面我们在 $B(C)$ 上定义 R 线性 C 不变的微分 d 和 R 线性的链同伦 S, 从而使 $B(C)$ 成为零调的自由链复形. S 的定义为

$$S(a[a_1|\cdots|a_q]) = [a|a_1|\cdots|a_q]$$

d 定义为 (归纳的)

$$d[\,] = 0$$
$$dS + Sd = 1 - ij$$

令 $\bar{d} = jdi$, 则 $\bar{d}$ 定义在 $\overline{B}(C)$ 上显示如下:

$$\bar{d}[a_1|\cdots|a_q] = \sum_{i=1}^{q-1}(-1)^i[a_1|\cdots|a_ia_{i+1}|\cdots|a_q]$$

实际上, $\bar{d}$ 也可写成

$$\bar{d} = \sum_{i=1}^{q-1}(-1)^i 1\otimes 1\otimes\cdots\otimes\phi\otimes\cdots\otimes 1$$

其中 $\phi: C\otimes C\to C$ 为 C 的乘法.

因为 $B(C)$ 是 R 的 C 自由分解, 因此对任意 C 模 M, $\mathrm{Ext}_C^{s,t}(R,M) = H^s(\mathrm{Hom}_C^t(C\otimes_R\overline{B}(C),M)) \cong H^s(\mathrm{Hom}_R^t(\overline{B}(C),M))$. 因此只要计算 $\mathrm{Hom}_R^t(\overline{B}(C),M)$ 在微分 $\mathrm{Hom}(\bar{d},1)$ 之下的上同调群即可得到 $\mathrm{Ext}_C^{s,t}(R,M)$.

下面简略介绍 Cobar 分解. 设 C 为连通有限型 R 分次 Hopf 代数, $M=R$, C^* 为 C 的对偶代数. 设 $\phi: C\otimes C\to C$ 为 C 的乘法.$\phi^*: C^*\to C^*\otimes C^*$ 为 C^* 的对角映射, $\eta^*: C^*\to R$ 为 C^* 的增广 (其中 $\eta: R\to C$ 为 C 的单位). 令 $I(C^*) = \ker\eta^*$, $\overline{F}(C^*)$ 为分次 R 模上的链复形使

$$\overline{F}(C^*)_q = \otimes^q I(C^*)$$

而它的微分算子 δ 定义为

$$\delta = \sum_{i=1}^{q-1}(-1)^i 1\otimes\cdots\otimes\phi^*\otimes\cdots\otimes 1$$

则在 C 是有限型 Hopf 代数的情况下, 上链复形 $(\overline{F}(C^*),\delta)$ 和 $(\mathrm{Hom}_R(\overline{B}(C),R), \mathrm{Hom}(\bar{d},1))$ 是同构的. 因此它们的上同调群为 $\mathrm{Ext}_{C^*}^{*,*}(R,R)\cong\mathrm{Ext}_C^{*,*}(R,R)$.

下面我们用 bar 分解来计算 Steenrod 代数 A 的上同调

$$H^s(A) = \mathrm{Ext}_A^{s,*}(Z_p,Z_p),\qquad 当\ s=0,1$$

定理 5.1.1 (a) $H^{0,*}(A) = \mathrm{Ext}_A^{0,*}(Z_p,Z_p)\cong Z_p$, 生成元为 1, 有次数 0.

(b) $H^{1,*}(A) = \mathrm{Ext}_A^{1,*}(Z_p, Z_p)$ 以下述各元为基: a_0 具有次数 1, h_i 具有次数 $2p^i(p-1)$ $(i \geqslant 0)$, 其中 A 为 $\bmod p$ Steenrod 代数, $p > 2$.

证 (a) 注意 0 维上链 $f \in \mathrm{Hom}(\overline{B}(A)_0, Z_p)$ 使 $f[\,] = 1$ 是上循环, 因为 $\delta f[a] = f\bar{d}[a] = 0$. 因此它的上同调类 $\{f\}$ 决定 H^0 的唯一生成元 (这里 $\delta = \mathrm{Hom}(\bar{d}, 1)$).

(b) 任意 1 维上循环 $f \in \mathrm{Hom}(\overline{B}(A)_1, Z_p)$, 则 $\delta f[a_1|a_2] = 0(a_1, a_2 \in I(A))$, 即 $f\bar{d}[a_1|a_2] = -f[a_1a_2] = 0$. 因此对 A 的任一可分解元 a, 有 $f[a] = 0$. 定义 f_i 为 $f_i[P^{p^i}] = 1, f_i[P^{p^j}] = 0$, 当 $j \neq i; f_i[\beta] = 0$ 而对所有 A 的可分解元 a, $f_i(a) = 0$. 因此它的上同调类 $\{f_i\} = h_i$ 是 $H^{1,2p^i(p-1)}(A)$ 生成元, 令 g 为 $g[\beta] = 1$, 而其他 $a \in I(A)$ 为 $g[a] = 0$, 则 g 为上循环, 它的上同调类 $\{g\} = a_0$ 为 $H^{1,1}(A)$ 生成元. 因此 $\{a_0, h_i\}$ $(i \geqslant 0)$ 是 $H^{1,*}(A)$ 的 Z_p 基. 证毕.

5.2 循环缩减幂 P^i 对 $\mathrm{Ext}_A^{*,*}(Z_p, Z_p)$ 的作用

设 $\psi: A \to A \otimes A$ 为 $\bmod p$ Steenrod 代数 A 的对角映射, $\psi^{p-1}: A \to \otimes^p A$ 为 ψ 的 $p-1$ 次累次合成, $B(A)$ 为 A 的 bar 分解. 因为 $B(A)$ 是 A 模, 因此 $\otimes^p B(A)$ 是 $\otimes^p A$ 模, 通过 ψ^{p-1}, $\otimes^p B(A)$ 变成 A 模.

设 Π 为具有生成元 x 的 p 阶循环群. 设 $W = \sum_i W_i$, W_i 为群环 $Z_p(\Pi)$ 上的单个生成元 e_i 生成的自由模. 定义

$$d: W \to W$$

为

$$d(e_{2i+2}) = Ne_{2i+1}$$
$$d(e_{2i+1}) = De_{2i}$$

其中 $N = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$, $D = x - 1$, 则 (W, d) 成为自由零调链复形.

令 $W \otimes B(A)$ 为链复形, 具有微分

$$d = d \otimes 1 + \gamma \otimes d$$

其中 $\gamma = (-1)^{\deg a}$.Π 在 W 的作用如上, 而 Π 在 $B(A)$ 平凡的作用, 则 $W \otimes B(A)$ 成为 $Z_p(\Pi)$ 模.$W \otimes B(A)$ 也是 A 模, 使 A 平凡作用在 W 上, 而 A 通常的作用在 $B(A)$ 上.

定理 5.2.1 存在链映射 $\Phi: W \otimes B(A) \to \otimes^p B(A)$ 使 $\Phi(e_0 \otimes 1) = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ 且是 Π 与 A 不变的.

证 设 $S: B(A) \to B(A)$ 为 5.1 节定义的链同伦, 令 $T: \otimes^p B(A) \to \otimes^p B(A)$ 为

$$T = \sum_{i=1}^{p} \epsilon' \otimes \cdots \otimes \epsilon' \otimes_i S \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

其中 ϵ' 为 $B(A)$ 的增广. 因此有 $dT+Td=1-\otimes^p\epsilon'$. 今归纳的定义 Φ 如下:

$$\Phi(e_0\otimes 1)=1\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1$$
$$\Phi(e_i\otimes 1)=0,\qquad \text{当} i>0$$
$$\Phi(e_i\otimes a[a_1|\cdots|a_q])=a\Phi(e_i\otimes[a_1|\cdots|a_q])$$
$$\Phi(xe_i\otimes a[a_1|\cdots|a_q])=x\Phi(e_i\otimes a[a_1|\cdots|a_q])$$
$$\Phi(e_i\otimes Su)=T\Phi(de_i\otimes Su)+(-1)^iT\Phi(e_i\otimes u)$$

在低维情况需要验证 Φ 与增广的可交换性. 下面我们只验证在高维情况下有 $\Phi d=d\Phi$.

$$\begin{aligned}
d\Phi(e_i\otimes Su)=&\,dT\Phi(de_i\otimes Su)+(-1)^i dT\Phi(e_i\otimes u)\\
=&-Td\Phi(de_i\otimes Su)+\Phi(de_i\otimes Su)+(-1)^{i+1}Td\Phi(e_i\otimes u)\\
&+(-1)^i\Phi(e_i\otimes u)\qquad\qquad(\text{因为}dT+Td=1)\\
=&\,(-1)^iT\Phi(de_i\otimes dSu)+\Phi(de_i\otimes Su)+(-1)^{i+1}T\Phi(de_i\otimes u)\\
&+(-1)^{2i+1}T\Phi(e_i\otimes du)+(-1)^i\Phi(e_i\otimes u)\qquad(\text{由归纳假设})\\
=&\,(-1)^{i+1}T\Phi(de_i\otimes Sdu)+(-1)^iT\Phi(de_i\otimes u)+\Phi(de_i\otimes Su)\\
&+(-1)^{i+1}T\Phi(de_i\otimes u)+(-1)T\Phi(e_i\otimes du)\\
&+(-1)^i\Phi(e_i\otimes u)\qquad\qquad(\text{因为}Sd+dS=1)\\
=&\,(-1)^{i+1}\Phi(e_i\otimes Sdu)+\Phi(de_i\otimes Su)+(-1)^i\Phi(e_i\otimes u)
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
\Phi d(e_i\otimes Su)=&\,\Phi(de_i\otimes Su)+(-1)^i\Phi(e_i\otimes dSu)\\
=&\,\Phi(de_i\otimes Su)+(-1)^{i+1}\Phi(e_i\otimes Sdu)+(-1)^i\Phi(e_i\otimes u)
\end{aligned}$$

因此有 $\Phi d=d\Phi$. 证毕.

设 $\overline{F}(A^*)$ 为 A 的 Cobar 分解

$$\Phi^*: W\otimes\otimes^p\overline{F}(A^*)\to\overline{F}(A^*)$$

定义为

$$\langle\Phi^*(e_i\otimes[\alpha_1|\cdots|\alpha_p],[a_1|\cdots|a_p]\rangle=\langle[\alpha_1|\cdots|\alpha_p],\Phi(e_i\otimes[a_1|\cdots|a_p])\rangle$$

其中 $[a_1|\cdots|a_p]\in B(A)$, $[\alpha_1|\cdots|\alpha_p]\in\otimes^p\overline{F}(A^*)$.

定义 5.2.2 Cobar 分解 $\overline{F}(A^*)$ 中的斜积(slant product)$[\alpha_1|\cdots|\alpha_p]/e_i=\Phi^*(e_i\otimes[\alpha_1|\cdots|\alpha_p])$.

命题 5.2.3 设 $\alpha\in\overline{F}(A^*)$, $\alpha^p=[\alpha|\alpha|\cdots|\alpha]$.

(a) 若 α 是 $\overline{F}(A^*)$ 的上循环, 则 α^p/e_i 是不变上循环.

(b) 若 α 是 $\overline{F}(A^*)$ 的上边缘, 则 α^p/e_i 是不变上边缘.

证 (a) 由公式 $\delta(v/e_i)=v/de_i+(-1)^i\delta v/e_i$ 直接得出, 其中 v 为 $\otimes^p\overline{F}(A^*)$ 的上链.

(b) 是更广一些的结论的推论. 设 B 为 A 的 Hopf 子代数, $i\colon B\to A$ 为内射, i 导出链映射 $i\colon B(B)\to B(A)$ 和上链映射 $i^*\colon\overline{F}(A^*)\to\overline{F}(B^*)$. 设 u 为上链使 $i^*u=0$, 则存在 $0\neq m\in Z_p$(不依赖于 u) 使

$$\delta(u^p/e_{j-p+1}+\gamma)=m\cdot(\delta u)^p/e_j$$

其中 γ 是不变上链使 $i^*\gamma=0$(这个等式的证明和 E.Dyer 与 R.K.Lashof[9] P.13–16 的证法类似, 这里略去). 因此结论由这个等式得出. 证毕.

定义 5.2.4 设 $h\in\mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_p,Z_p)$, $h=\{\alpha\}$, 其中 α 是 $\overline{F}(A^*)$ 的上循环, 则 $h^p/e_i=\{\alpha^p/e_i\}\in\mathrm{Ext}_A^{ps-i,pt}(Z_p,Z_p)$ 叫做 h 的第 i 个循环缩减幂.

定义 5.2.5 设 B 为 A 的正规 Hopf 子代数, $i\colon B\to A$ 为内射.$x\in\mathrm{Ext}_B^{*,*}(Z_p,Z_p)$ 叫做可超度的 (transgressive), 若存在 $\overline{F}(A^*)$ 中的上链 u 使 $x=\{i^*u\}$ 而 $\delta u=\Pi^*v$, 其中 $v\in\overline{F}((A//B)^*)$, $\Pi\colon A\to A//B$ 为投射. 这时称 x 可超度到 $y=\{v\}$. 由 $x\mapsto y$ 的对应叫做超度 (transgression).

命题 5.2.6 若 x 可超度到 y, 则 x^p/e_i 可超度到 $m\cdot y^p/e_{p+i-1}$, 其中 $m\in Z_p$.

证 由 $\delta(u^p/e_{j-p+1}+\gamma)=m\cdot(\delta u)^p/e_j$ 得出. 证毕.

定义 5.2.7 当 $p>2$,

$$P^i\colon \mathrm{Ext}_A^{q,t}(Z_p,Z_p)\to\mathrm{Ext}_A^{q+2i(p-1),pt}(Z_p,Z_p)$$
$$\beta\colon \mathrm{Ext}_A^{q,t}(Z_p,Z_p)\to\mathrm{Ext}_A^{q+1,pt}(Z_p,Z_p)$$

定义为

$$P^iu_q=(-1)^{q+i+\frac{1}{2}mq(q+1)}(m!)^qu^p/e_{(q-2i)(p-1)}$$
$$\beta u_q=-(-1)^{q+\frac{1}{2}mq(q+1)}(m!)^qu^p/e_{q(p-1)-1}$$

其中 $m=\frac{1}{2}(p-1)$. P^i 叫做循环缩减幂而 β 叫做 Bockstein 运算.

这里定义 P^i 时的系数是为了使它和超度可交换. 因为 P^i, β 的定义和 P^i,β 在拓扑空间的 Z_p 上同调群中的定义 (见 Steenrod[1] p.112) 类似, 因此它将满足 Adem 关系, 并且具有许多类似的性质, 除了 $P^0\neq 1$ 以外. 因此叙述 Adem 关系时要谨慎.

命题 5.2.8 (a) $P^iu_q=0$, 当 $q<2i$.

(b) $P^iu_q=u_q^p$, 当 $q=2i$.

(c) $P^k(u\cdot v)=\sum\limits_{i=0}^{k}P^iu\cdot P^{k-i}v$.

(d) $P^0h_i=h_{i+1}$, 其中 $h_i\in\mathrm{Ext}_A^{1,2p^i(p-1)}(Z_p,Z_p)$.

(e) $\beta h_i=\left\{\sum\limits_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}/p\cdot[\xi_1^{p^i(p-j)}|\xi_1^{p^ij}]\right\}$.

证 只证明 (d), (e). 这只要证明

$$P^0\{[\xi_1^{p^i}]\} = \{[\xi_1^{p^{i+1}}]\}$$

$$\beta\{[\xi_1^{p^i}]\} = \left\{\sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j}/p \cdot [\xi_1^{p^i(p-j)}|\xi_1^{p^i j}]\right\}$$

设 $a, b \in A$, 因为

$$de_{p-1} = Ne_{p-2}$$
$$de_{p-2} = De_{p-3}$$
$$\cdots\cdots$$

再由定理 5.2.1 中 Φ 的定义可知

$$\Phi(e_{p-1} \otimes [a]) = T_1 N T_2 \cdots T_{p-1} D T_p a \psi^p(1)$$
$$\Phi(e_{p-1} \otimes [b|a]) = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i T_1 D T_2 \cdots T_i b T_{i+1} \cdots T_p a \psi^p(1)$$

其中 $T_i = T$ 如定理 5.2.1 所定义. 过渡到 Φ^* 并乘上 P^0, β 定义中的适当系数, 就得出结论. 证毕.

注 当 $p = 2$, 定义 $Sq^i\colon \mathrm{Ext}_A^{q,t} \to \mathrm{Ext}_A^{q+i,2t}$ 为 $Sq^i u_q = u^2/e_{q-i}$, 则有类似的性质, 而 $Sq^0 h_i = h_{i+1}$.

5.3 $H^{2,*}(A)$ 的计算

Liulevicius[3] 关于 $H^{2,*}(A)$ 的计算需要用到关于 Hopf 代数的 Adams 谱序列. 这个谱序列 (见定理 5.3.1) 实际上是定理 4.2.17 的 Lyndon 谱序列的推论.

设 C 是域 R 上分次增广 Hopf 代数, B 为 C 的 Hopf 子代数, 并设 B 在 C 中是中心的, 即以下图形可换:

$$\begin{array}{ccc} C \otimes B & \searrow \bar{\phi} & \\ \downarrow T & & C \\ B \otimes C & \nearrow \bar{\phi} & \end{array}$$

其中 $\bar{\phi}$ 是乘法而 T 是交换映射.

设 $J = C//B = C/I(B) \cdot C$, 定义 Cobar 分解 $\overline{F}(C^*)$ 的滤子 $\mathcal{F}\overline{F}(C^*)$ 使

$$[\alpha_1|\cdots|\alpha_q] \in \mathcal{F}^r\overline{F}(C^*)$$

当且仅当有 r 个 α_j 零化 $I(B)$. 这也可以有另一种叙述. 内射 $i\colon B \to C$ 导出 $i^*\colon C^* \to B^*$, 则 $[\alpha_1|\cdots|\alpha_q] \in \mathcal{F}^r\overline{F}(C^*)$ 当且仅当对 r 个 α_j 有 $i^*\alpha_j = 0$. 下面记 $H^{*,*}(C) = \mathrm{Ext}_C^{*,*}(R, R)$.

定理 5.3.1(Adams[10]§6 或定理 2.6.1[3]) 设 C, B, J 如上. 以上滤子恰好定义了一个具有 Cup 乘积的谱序列 $\{E_r^{s,t}, d_r\}$ 使

(a) $E_\infty^{s,t} = H^*(\mathcal{F}^{s-2}\overline{F}(C^*))/H^*(\mathcal{F}^{s-1}\overline{F}(C^*))$ 且

$$\cdots \subset H^*(\mathcal{F}^1\overline{F}(C^*)) \subset H^*(\mathcal{F}^0\overline{F}(C^*)) = H^*(C)$$

(b) $E_2^{s,t} = H^s(J) \otimes H^t(B)$ 它的环结构由

$$(x \otimes y)(z \otimes w) = (-1)^{st+ru} xz \otimes yw$$

给出, 其中 $z \in H^{s,r}(J)$, $y \in H^{t,u}(B)$.

(c) $E_2^{0,t} \underset{\cong}{\rightarrow} H^{t,*}(B)$ 由自然映射 $\overline{F}(C^*) \to \overline{F}(B^*)$ 导出, $E_2^{s,0} \underset{\cong}{\leftarrow} H^{s,*}(J)$ 由自然映射 $\overline{F}(J^*) \to \overline{F}(C^*)$ 导出.

(d) 微分算子 $d_r: E_r^{s,t} \to E_r^{s+r,t-r+1}$ 使 $E_{r+1} = H(E_r, d_r)$.

设 A_n^* 为 A^* 的由 $1, \xi_1, \cdots, \xi_n$ 和 $\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_{n-1}$ 生成的 Hopf 子代数. 令 $P_n = (A_n^*)^*$, P_n 可看作 A 的商 Hopf 代数.A_n^* 对 A_{n-1}^* 的商 Hopf 代数 $A_n^*//A_{n-1}^* = E(\tau_{n-1}) \otimes P(\xi_n)$, 对偶 $(A_n^*//A_{n-1}^*)^* = L_n$ 为 P_n 的 Hopf 子代数.L_n 的 Hopf 代数结构很简单, 实际上 $L_n = E(Q_{n-1}) \otimes P(P_n^0)/((P_n^0)^p)$, 其中 $P_n^0 = P^{(0,\cdots,0,1,0,\cdots)}$ 为 Milnor 基元, $1 = p^0$ 在序列的第 n 个位置.

L_n 在 P_n 中是中心的, 因为容易验证

$$\begin{array}{ccc} (A_n^*//A_{n-1}^*) \otimes A_n^* & \nwarrow \bar{\phi}^* & \\ \uparrow T & & A_n^* \\ A_n^* \otimes (A_n^*//A_{n-1}^*) & \swarrow \bar{\phi}^* & \end{array}$$

是可交换的, 因此过渡到对偶, 以下图形可换:

$$\begin{array}{ccc} L_n \otimes P_n & \searrow \bar{\phi} & \\ \downarrow T & & P_n \\ P_n \otimes L_n & \nearrow \bar{\phi} & \end{array}$$

即 L_n 在 P_n 是中心的.

因为 L_n 的 Hopf 代数结构很简单, $H^*(L_n)$ 容易计算, 而 L_n 在 P_n 是中心的而且 $P_n//L_n = P_{n-1}$, 因此根据定理 5.3.1, 存在联系 $H^*(P_n)$ 和 $H^*(P_{n-1})$ 的 Adams 谱序列

$$\begin{aligned} {}_nE_2^{s,t} &= H^s(P_{n-1}) \otimes H^t(L_n) \Rightarrow H^{t-s}(P_n) \\ {}_nE_2^{s,0} &= H^s(P_{n-1}) \\ {}_nE_2^{0,t} &= H^t(L_n) \end{aligned}$$

而且 $H^r(P_n)$ 有滤子

$$\begin{array}{ccccc} H^r(P_n) = {}_nF^{0,r} & \supset & {}_nF^{1,r-1} & \supset \cdots \supset {}_nF^{r-1,1} \supset {}_nF^{r,0} \supset 0 \\ \| & & \| & \\ H^r(\mathcal{F}^0\overline{F}(P_n^*)) & \supset & H^r(\mathcal{F}^1\overline{F}(P_n^*)) & \supset \cdots \end{array}$$

而且有 ${}_nF^{i,j}/{}_nF^{i+1,j-1} \cong {}_nE_\infty^{i,j}$.

下面我们通过计算上述可数个 $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 谱序列来得到 $H^{2,*}(A)$ 的以下

结果.

定理 5.3.2([3] 定理 3.0.1)　$H^{2,*}(A)=\mathrm{Ext}_A^{2,*}(Z_p,Z_p)$ 的以下元素组成它的 Z_p 基 $(p>2)$:

h_ih_j	$i<j-1$	次数	$2(p-1)(p^i+p^j)$
g_i	$i\geqslant 0$	次数	$2(p-1)(p^{i+1}+2p^i)$
k_i	$i\geqslant 0$	次数	$2(p-1)(2p^{i+1}+p^i)$
a_0h_j	$j\neq 0$	次数	$2(p-1)p^j+1$
b_i	$i\geqslant 0$	次数	$2(p-1)p^{i+1}$
a_0a_0		次数	2
$\widetilde{\alpha}_2$		次数	$4(p-1)+1$

而 $H^{2,*}(A)$ 中的可分解元的关系只有

$$h_ih_i=0$$
$$h_{i+1}h_i=0$$
$$h_0a_0=0$$

下面开始进行定理 5.3.2 的证明. 因为 P_n 是 A_n^* 的对偶, A_n^* 包含 A^* 的次数 $<2(p^n-1)$ 的所有元, 因此当 $t<2(p^n-1)$ 有

$$H^{s,t}(A)=H^{s,t}(P_n)$$

因此要计算 $H^{2,*}(A)$, 只要对充分大的 n 算出 $H^{2,*}(P_n)$. 下面用 Adams 谱序列来计算 $H^{2,*}(P_n)$, 思路是简单的, 但过程较长, 需要有几个引理.

引理 5.3.3　$H^*(L_n)=E(h_{n,i})\otimes P(a_{n-1},b_{n,i})$, 其中 $|h_{n,i}|=2p^i(p^n-1)$, $|b_{n,i}|=2p^{i+1}(p^n-1)$, $|a_{n-1}|=2p^{n-1}-1$ $(i\geqslant 0)$ 且 a_{n-1}, $h_{n,i}\in H^1(L_n)$ 而 $b_{n,i}\in H^2(L_n)$.

证　若 G 是 Z_p 上由单个原初生成元 ω 生成的外代数, 则 $H^*(G)$ 是 Cobar 分解中的 $\{[\omega^*]\}$ 生成的多项式代数. 若 G 是 Z_p 上由单个原初生成元 a 生成的斜截多项式代数, 则 G^* 是原初生成元 a^* 生成的多项式代数, 而 $H^*(G)$ 是 $\{[a^{*p^i}]\}$ 生成的外代数和

$$\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{j}}{p}[a^{*p^i(p-j)}|a^{*p^ij}]$$

生成的多项式代数的张量积 (见 [12]).

因为 $L_n=E(Q_{n-1})\otimes P(P_n^0)/((P_n^0)^p)$, L_n 的对偶 $A^*//A_{n-1}^*=E(\tau_{n-1})\otimes P(\xi_n)$, 因此 $H^*(L_n)=E(h_{n,i})\otimes P(a_{n-1},b_{n,i})$, 其中

$$h_{n,i}=\{[\xi_n^{p^i}]\}$$
$$a_{n-1}=\{[\tau_{n-1}]\}$$
$$b_{n,i}=\left\{\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{j}}{p}[\xi_n^{p^i}|\xi_n^{p^j}]\right\}$$

这里注意到 $h_{n,i} \cdot h_{n,j} = \{[\xi_n^{p^i}|\xi_n^{p^j}]\}$, $h_{n,i} \cdot a_{n-1} = \{[\xi_n^{p^i}|\tau_{n-1}]\}$ 等. 证毕.

因为 $P_1 = L_1$, 则 $H^*(P_1) = H^*(L_1)$. 将引理 5.3.3 中的 $h_{1,i}$, $b_{1,i}$ 简记为 h_i, b_i. 设 $\Pi_n: P_n \to P_{n-1}$ 为投射, 将 $H^*(P_n)$ 中的元 $\Pi_n^* \cdots \Pi_2^*(h_i)$ 和 $\Pi_n^* \cdots \Pi_2^*(b_i)$ 仍记为 h_i, b_i.

由于有滤子

$$H^1(P_n) = {}_nF^{0,1} \supset {}_nF^{1,0} \supset 0$$
$$H^2(P_n) = {}_nF^{0,2} \supset {}_nF^{1,1} \supset {}_nF^{2,0} \supset 0$$

使 ${}_nF^{0,1}/{}_nF^{1,0} = {}_nE_\infty^{0,1}$, ${}_nF^{1,0} = {}_nE_\infty^{1,0}$ 以及 ${}_nF^{0,2}/{}_nF^{1,1} = {}_nE_\infty^{0,2}$, ${}_nF^{1,1}/{}_nF^{2,0} = {}_nE_\infty^{1,1}$, ${}_nF^{2,0} = {}_nE_\infty^{2,0}$. 下面可着手计算谱序列的微分算子, 先从 $n=2$ 开始.

引理 5.3.4 微分算子 $d_2: {}_2E_2^{0,1} \to {}_2E_2^{2,0}$ 使 $d_2h_{2,i} = -h_{i+1}h_i, d_2a_1 = -h_0a_0$ 为 ${}_2E_2^{2,0}$ 的非零元.

证 由定理 5.3.1 和引理 5.3.3, ${}_2E_2^{0,1} = H^1(L_2)$, 以 $h_{2,i}$ 和 a_1 为 Z_p 基, 其中 $h_{2,i} = \{[\xi_2^{p^i}]\}$, $a_1 = \{[\tau_1]\}$.

因为 d_2 就是由 $L_2 \to P_2 \to P_2//L_2 = P_1$ 导出的长恰当序列

$$\cdots \to H^1(P_1) \to H^1(P_2) \to H^1(L_2) \xrightarrow{\delta^*} H^2(P_1) \to \cdots$$

的上边缘同态 δ^*(或定义 5.2.5 中的超度), δ 是 Cobar 分解 $\overline{F}(P_2^*)$ 中的上边缘, 而在 $\overline{F}(P_2^*)$ 中

$$\delta[\xi_2^{p^i}] = -[\xi_1^{p^{i+1}}|\xi_1^{p^i}]$$
$$\delta[\tau_1] = -[\xi_1|\tau_0]$$

因此 $d_2h_{2,i} = -h_{i+1}h_i$, $d_2a_1 = -h_0a_0$. 证毕.

引理 5.3.5 向量空间 ${}_2E_3^{0,2}$ 以 $\{b_{2,i}\}$ 为 Z_p 基 $(i \geqslant 0)$.

证 由命题 5.2.8(e), $\beta: H^{s,t}(L_2) \to H^{s+1,pt}(L_2)$ 有

$$\beta\{[\xi_2^{p^i}]\} = \left\{ \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} /p[\xi_2^{p^i(p-j)}|\xi_2^{p^ij}] \right\}$$

即 $\beta(h_{2,i}) = b_{2,i}$. 因为 $h_{2,i}$ 可超度到 $-h_{i+1}h_i$(由引理 5.3.4), 因此由命题 5.2.6, $\beta(h_{2,i})$ 可超度到 $m \cdot \beta(-h_{i+1}h_i)$, 其中 $m \in Z_p$, 而这里恰有 $m=0$, 因此 $d_2b_{2,i} = 0$.

今 $H^2(L_2)$ 以 a_1a_1, $a_1h_{2,i}$, $h_{2,i}h_{2,j}(i \neq j)$, $b_{2,i}$ 为 Z_p 基. 已知 $d_2(b_{2,i}) = 0$, 又根据引理 5.3.4,

$$d_2(a_1a_1) = -h_0a_0a_1 + a_1h_0a_0 = 2a_1h_0a_0 \neq 0$$
$$d_2(a_1h_{2,i}) = -h_0a_0h_{2,i} + a_1h_{i+1}h_i \neq 0$$
$$d_2(h_{2,i}h_{2,j}) = -h_{i+1}h_ih_{2,j} + h_{2,i}h_{j+1}h_j \neq 0$$

再由次数原因可知 $b_{2,i}$ 生成 $\ker d_2$. 由于 $b_{2,i}$ 彼此的次数不同, 因此线性无关, 从而 $b_{2,i}$ 组成 $\ker d_2$ 的 Z_p 基, 引理得证. 证毕.

引理 5.3.6 $d_3: {}_2E_3^{0,2} \to {}_2E_3^{3,0}$ 是单的, 从而 ${}_2E_4^{0,2} = 0$.

证 Bockstein 运算 β 满足 Cartan 公式

$$\beta(uv) = \beta(u) \cdot P^0(v) + (-1)^{\dim u} P^0(u) \cdot \beta(v)$$

再由 β 和超度可交换 (见命题 5.2.6), 则

$$\begin{aligned} d_3(\{b_{2,i}\}) &= d_3\{\beta h_{2,i}\} = \{\beta d_2 h_{2,i}\} \\ &= \{-\beta(h_{i+1}h_i)\} = \{-\beta(h_{i+1})P^0 h_i - P^0 h_{i+1} \beta h_i\} \\ &= \{-b_{i+1}h_{i+1} - h_{i+2}b_i\} \end{aligned}$$

这是 ${}_2E_3^{3,0}$ 中的非零元 (因为 $d_2: {}_2E_2^{1,1} \to {}_2E_2^{3,0}$ 的像不包含 $-b_{i+1}h_{i+1} - h_{i+2}b_i$, 因此 d_3 是单的). 证毕.

引理 5.3.7 ${}_2E_3^{1,1}$ 由以下类的陪集所生成:

$$\begin{aligned} &h_i h_{2,i} \\ &h_{i+1} h_{2,i} \\ &h_{i+2} h_{2,i} - h_i h_{2,i+1} \\ &h_1 a_1 - a_0 h_{2,0} \\ &h_0 a_1 \end{aligned}$$

证 因为 ${}_2E_2^{1,1} = H^1(P_1) \otimes H^1(L_2)$ 而 $H^1(P_1) = H^1(L_1)$ 有 Z_p 基 h_i, a_0, $H^1(L_2)$ 有 Z_p 基 $h_{2,i}$, a_1. 证毕.

推论 5.3.8 引理 5.3.7 中的五个类的陪集产生 g_i, k_i, $g_{2,i}, \kappa_2, \widetilde{\alpha}_2$ 属于 ${}_2F^{1,1}$ 而且它在 ${}_2E_\infty^{1,1}$ 中的像组成 Z_p 基.

证 因为 $d_r: {}_2E_r^{1,1} \to {}_2E_r^{1+r,1-r+1} = 0$, 当 $r \geqslant 3$. 从而 ${}_2E_\infty^{1,1} = {}_2E_3^{1,1}$. 证毕.

引理 5.3.9 $H^2(P_2)$ 中的 $h_i h_j$, $h_i a_0$, b_j 所满足的关系只有 $h_i h_i = 0$, $h_{i+1}h_i = 0$, $h_0 a_0 = 0$.

证 由引理 5.3.4, $d_2: {}_2E_2^{0,1} \to {}_2E_2^{2,0}$ 有 $d_2(h_{2,i}) = -h_{i+1}h_i$, $d_2(a_1) = -h_0 a_0$, 因此 ${}_2E_3^{2,0}$ 中有 $h_{i+1}h_i = 0$, $h_0 a_0 = 0$. 另外有 ${}_2E_3^{2,0} = \cdots = {}_2E_\infty^{2,0} = {}_2F^{2,0} \subset H^2(P_2)$. 证毕.

到现在为止, 可以完全确定 $H^2(P_2)$. 因为

$$H^2(P_2) = {}_2F^{0,2} \supset {}_2F^{1,1} \supset {}_2F^{2,0} \supset 0$$

由引理 5.3.6, ${}_2E_\infty^{0,2} = 0$ 即 ${}_2F^{0,2} = {}_2F^{1,1}$. 由推论 5.3.8, g_i, k_i, $g_{2,i}, \kappa_2$, $\widetilde{\alpha}_2$ 是 ${}_2E_\infty^{1,1} = {}_2F^{1,1}/{}_2F^{2,0}$ 的 Z_p 基, 而由引理 5.3.9, ${}_2F^{2,0}$ 有 Z_p 基 $h_i h_j (i < j-1)$, $h_i a_0 (i > 0)$, b_j, $a_0 a_0$, 因此 $H^2(P_2)$ 有 Z_p 基 g_i, k_i, $g_{2,i}$, κ_2, $\widetilde{\alpha}_2$, $h_i h_j (i < j-1)$, $h_i a_0 (i > 0)$, b_j, $a_0 a_0$.

下面计算 $H^*(P_n)$ $(n > 2)$, 并证明上述 Z_p 基元中只有 $g_{2,i}$ 和 κ_2 在 $\Pi_n^* \cdots \Pi_s^*$ 的核中.

引理 5.3.10 当 $n>2$, ${}_nE_3^{0,2}$ 由 $\{b_{n,i}\}$ 生成.

证 类似于引理 5.3.5.

引理 5.3.11 当 $n>2$,

(a) $d_3\colon {}_nE_3^{0,2}\to {}_nE_3^{3,0}$ 的像在 ${}_{n-1}F^{1,2}H^3(P_{n-1})$ 中而 d_3 和投射 ${}_{n-1}F^{1,2}\to {}_{n-1}E_\infty^{1,2}$ 的合成 ${}_nE_3^{0,2}\to {}_{n-1}E_\infty^{1,2}$ 是单的.

(b) ${}_nE_4^{0,2}=0$.

证 (b) 直接由 (a) 得出. 由引理 5.3.10 , ${}_nE_3^{0,2}$ 由 $\{b_{n,i}\}$ 生成而 $b_{n,i}=\beta h_{n,i}$. 因此 $d_3\{b_{n,i}\}=d_3\{\beta h_{n,i}\}=\{\beta d_2h_{n,i}\}=\{\beta g_{n-1,i}\}$, 这里令 $g_{n-1,i}=d_2h_{n,i}$. 因为 $h_{n,i}=\{[\xi_n^{p^i}]\}$, $d_2h_{n,i}=\{-\sum\limits_{j=1}^{m}[\xi_{n-j}^{p^{i+j}}|\xi_j^{p^i}]\}$, 其中 $m=n-1$. 因此 $g_{m,i}=\{-h_{m,i+1}h_i+h_{m,i}h_{i+m}\}$, 通过计算, $\beta g_{m,i}$ 在 ${}_mF^{1,2}$ 中且决定 ${}_mE_\infty^{1,2}$ 的类

$$\{b_{m,i+1}h_{i+1}-b_{m,i}h_{m+i+1}\}$$

这些类在 ${}_mE_2^{1,2}$ 中线性无关 (由次数彼此不同), 从而在 ${}_mE_\infty^{1,2}$ 中也无关, 因此结论得出. 证毕.

引理 5.3.12 当 $n>2$,

(a) $d_2\colon {}_nE_2^{1,1}\to {}_nE_2^{3,0}$ 的像包含在 ${}_{n-1}F^{2,1}H^3(P_{n-1})$.

(b) 合成 ${}_nE_2^{1,1}\to {}_{n-1}E_\infty^{2,1}$ 的核和 d_2 的核一致.

(c) $\ker d_2$ 有以下 Z_p 基:

$$h_{n,i+1}h_i-h_{n,i}h_{n+1}(=\{g_{n,i}\})$$

$$h_{n,0}a_0-a_{n-1}h_{n-1}(=\{\kappa_n\}=d_2a_n)$$

证 类似.

引理 5.3.13 当 $n\geqslant 2$, V_n 为以下类 $h_ih_j(i<j,j\neq i+1)$, $h_ia_0(i\neq 0)$, b_i, $\widetilde{\alpha}_2$, a_0a_0, g_i, k_i 所生成的 $H^2(P_n)$ 的子空间, 则 $\Pi_{n+1}^*\colon H^2(P_n)\to H^2(P_{n+1})$ 在 V_n 上是单的.

证 $\operatorname{im}\Pi_{n+1}^*=H^2(P_n)/\ker\Pi_{n+1}^*$. 由长恰当序列

$$\cdots\to H^1(P_n)\xrightarrow{\Pi_{n+1}^*}H^1(P_{n+1})\to H^1(L_{n+1})\xrightarrow{\delta^*}H^2(P_n)\to$$

可知 $\ker\Pi_{n+1}^*=\operatorname{im}\delta^*=\operatorname{im}(d_2\colon {}_{n+1}E_2^{0,1}\to {}_{n+1}E_2^{2,0})$. 因为 $d_2h_{n+1,i}=g_{n,i}$, $d_2a_{n+1}=\kappa_n$, 由引理 5.3.12, $\operatorname{im}d_2$ 包含在 ${}_nF^{1,1}\subset H^2(P_n)$ 且和 ${}_nF^{1,1}\to {}_nE_\infty^{1,1}$ 的合成是单的.

另一方面 $V_n\subset {}_nF^{2,0}\subset {}_nF^{1,1}$, 因此

$$V_n\cap\operatorname{im}d_2=\{0\}$$

从而 Π_{n+1}^* 在 V_n 上是单的. 证毕.

定理 5.3.2 的证明 考虑滤子

$$H^2(P_n) = {}_nF^{0,2} \supset {}_nF^{1,1} \supset {}_nF^{2,0} \supset 0$$

由引理 5.3.11, ${}_nE_\infty^{0,2} = 0$, 则 ${}_nF^{0,2} = {}_nF^{1,1}$. 由引理 5.3.12, ${}_nE_\infty^{1,1}$ 由 $g_{n,i}$ 和 κ_n $(n > 2)$ 所生成. 由引理 5.3.13, Π_n^* 给出 V_{n-1} 和 ${}_nF^{2,0}$ $(n \geqslant 3)$ 的同构. 由 $H^2(P_2)$ 的 Z_p 基已知, 因此 $H^2(P_n)$ $(n > 2)$ 有以下 Z_p 基:

$g_{n,i}$		滤子	1
κ_n		滤子	1
$h_i a_0$	$(i \neq 0)$	滤子	2
$h_i h_j$	$(i < j-1)$	滤子	2
$a_0 a_0$		滤子	2
$\widetilde{\alpha}_2$		滤子	2
b_i		滤子	2
g_i		滤子	2
k_i		滤子	2

其中 $i, j = 0, 1, 2, \cdots$. 因为 $\Pi_{n+1}^* g_{n,i} = \Pi_{n+1}^* \kappa_n = 0$, 因此当 n 充分大, 有 $H^2(A) = H^2(P_n)$ 的 Z_p 基如定理 5.3.2 所述. 证毕.

5.4 $H^{3,*}(A)$ 的 Z_p 基元

在本节, 我们不加证明将 T. Aikawa[5] 所计算出来的 $H^{3,*}(A) = \mathrm{Ext}_A^{3,*}(Z_p, Z_p)$ 的全部 Z_p 基元列出.

定理 5.4.1(文献 [5] 表 8.1p.110) $H^{3,*}(A) = \mathrm{Ext}_A^{3,*}(Z_p, Z_p)$ 的以下元素组成它的 Z_p 基 $(p > 2, q = 2(p-1))$:

a_0^3	次数	3
$h_i a_0^2 (i \geqslant 1)$	次数	$p^i q + 2$
$h_i h_j a_0 (1 \leqslant j \leqslant i-2)$	次数	$(p^i + p^j)q + 1$
$h_i h_j h_k (0 \leqslant k \leqslant j-2 \leqslant i-4)$	次数	$(p^i + p^j + p^k)q$
$b_i a_0 (i \geqslant 0)$	次数	$p^{i+1}q + 1$
$b_i h_j (i \geqslant 0, j \geqslant 0, j \neq i+2)$	次数	$(p^{i+1} + p^j)q$
$g_i a_0 (i \geqslant 1)$	次数	$(p^{i+1} + 2p^i)q + 1$
$g_i h_j (i \geqslant 0, 0 \leqslant j \neq i+2, i, i-1)$	次数	$(p^{i+1} + 2p^i + p^j)q$
$k_i a_0 (i \geqslant 1)$	次数	$(2p^{i+1} + p^i)q + 1$
$k_i h_j (i \geqslant 0, 0 \leqslant j \neq i+2, i \pm 1, i)$	次数	$(2p^{i+1} + p^i + p^j)q$
$\widetilde{\alpha}_2 h_j (j \geqslant 2)$	次数	$(p^j + 2)q + 1$
$h_{i,1,2,3} (p \neq 3, i \geqslant 0)$	次数	$(3p^{i+2} + 2p^{i+1} + p^i)q$

$h_{-1,1,2,3}$	次数	$(3p+2)q+1$
$h_{i,2,0,2}(p=3,i\geqslant 0)$	次数	$(2p^{i+3}+2p^{i+1}+p^i)q$
$h_{-1,2,0,2}(p=3)$	次数	$(2p^2+2)q+1$
$h_{i,1,3,1}(p\neq 3,i\geqslant 0)$	次数	$(p^{i+2}+3p^{i+1}+p^i)q$
$h_{-1,1,3,1}(p\neq 3)$	次数	$(p+3)q+1$
$h_{i.2.1.2}(i\geqslant 0)$	次数	$(2p^{i+2}+p^{i+1}+2p^i)q$
$h_{i,3,2,1}(p\neq 3,i\geqslant 0)$	次数	$(p^{i+2}+2p^{i+1}+3p^i)q$
$l_i(i\geqslant 1)$	次数	$(p^{i+1}+2p^i)q$
$m_i(i\geqslant 1)$	次数	$(2p^{i+1}+p^i)q$
$\widetilde{\alpha}_3(p\neq 3)$	次数	$3q+2$
$Q'_3(p=3)$	次数	26

定理 5.4.2(文献 [5] 表 8.2p. 111) $H^{3,*}(A)$ 中可分解元素的关系只有:

$$
\begin{aligned}
&h_{i+1}h_ih_j=0, \qquad g_rh_{r-1}=0,\\
&h_r^2h_j=0, \qquad g_rh_r=0,p\neq 3\\
&h_{r+2}b_r=b_{r+1}h_{r+1}, \qquad h_{r+1}g_r=k_rh_r,\\
&h_{r+1}b_r=g_rh_r,p=3,k_rh_{r+2}=0,\\
&b_{r+1}h_r=h_{r+1}k_r,p=3, \qquad k_rh_{r+1}=0,p\neq 3,\\
&k_rh_{r-1}=0, \qquad g_rh_{r+2}=0,\\
&\widetilde{\alpha}_2a_0=0, \qquad \widetilde{\alpha}_2h_1=0,\\
&\widetilde{\alpha}_2h_0=0,p\neq 3.
\end{aligned}
$$

其中 $i\geqslant -1,j\geqslant -1,r\geqslant 0$, 并且记 $h_{-1}=a_0\in \mathrm{Ext}_A^{1,1}(Z_p,Z_p)$.

5.5 J.P.May 谱序列

本节中我们介绍 May 谱序列. 这是计算一般的 Hopf 代数 A 的上同调 $H^{*,*}(A)$ 的方法.May 谱序列由两个谱序列组成. 首先是相应于 A 的适当滤子, 有谱序列

$$E_2=H^{*,*}(E_0A)\Rightarrow H^{*,*}(A)$$

而 E_0A 将是一个原初生成的 Hopf 代数. 如果 A 是有特征数 0 的域 K 上 Hopf 代数, 则 $E_0A\cong U(L)$, 其中 $L=P(E_0A)$ 为 E_0A 的原初元集合 (是一个李代数), 而 $U(L)$ 为 L 的泛包络代数. 如果 K 是有特征数 $p>0$ 的域, 则 $E_0A\cong V(L)$, L 如上是一个限制李代数, $V(L)$ 为 L 的 (限制) 泛包络代数.

其次, 存在一个谱序列

$$E_2=P((S^2L^+)^*)\otimes H^{*,*}(U(L))\Rightarrow H^{*,*}(V(L))=H^{*,*}(E_0A)$$

其中 $P((S^2L^+)^*)$ 的含义在后面介绍. 当 A 是 Steenrod 代数, 后一个谱序列的 E_2 项比较好计算, 因此对 $H^{**}(A)$ 的粗略估计可立即得出.

我们将介绍上述两个谱序列的有关概念和结论, 但由于篇幅所限, 有些定理的证明将予省略 (参见文献 [8], [11]).

定义 5.5.1　域 K 称为有特征数 p(p 为 0 或素数), 如果 $K \neq 0$ 而对应

$$\alpha: Z \to K$$

使 $\alpha(1) = 1,\ \alpha(n) = n \cdot 1 = 1 + 1 + \cdots + 1$ 是典则环同态且 $\ker \alpha = p \cdot Z$.

因此域 Z_p 有特征数 $p > 0$. 若域 K 有特征数 0, 则 K 将含整数加群 Z 为子环.

本节中, 除非特别说明, A 总是表示具有特征数 $p \geqslant 0$ 的域 K 上的 Hopf 代数.

给 A 予如下滤子：

$$A = F_0A \supset \cdots \supset F_sA \supset F_{s-1}A \supset \cdots \qquad (s < 0)$$

使 $F_sA = A\,(s \geqslant 0),\ F_{-1}(A) = I(A)$ 而 $F_{s-1}A = I \cdot F_s(A)$ (当 $s < 0$).

令 $E_0^{s,t}(A) = (F_sA/F_{s-1}A)_{s+t}$, 则

$$E_0A = \sum_{s,t} E_0^{s,t}A$$

是分次 Hopf 代数.

定理 5.5.2　存在谱序列

$$E_2^{*,*} = H^{*,*}(E_0A) \Rightarrow H^{*,*}(A)$$

证　如 5.1 节, $(B(A)^*, d^*) = (\mathrm{Hom}_A(B(A), K), \mathrm{Hom}(d, 1))$, 即 $(B(A), d)$ 的对偶. 如 5.1 节所指出的, 上链复形 $B(A)^*$ 关于 d^* 的上同调群就是 Hopf 代数 A 的上同调. 今给 $B(A)^*$ 予滤子

$$F^sB(A)^* = \sum F^{s_1}I(A)^* \otimes \cdots \otimes F^{s_n}I(A)^*$$

和式取遍所有序列 $(s_1, \cdots, s_n)$ 使 $n + \sum\limits_{i=1}^{n} s_i \geqslant s$. 这等价于

$$F^sB(A)^* = [B(A)/F_{s-1}B(A)]^*,$$

其中

$$F_sB(A) = \sum F_{s_1}I(A) \otimes \cdots \otimes F_{s_n}I(A)$$

和式取遍所有序列 $(s_1, \cdots, s_n)$ 使 $n + \sum\limits_{i=1}^{n} s_i \leqslant s$. 根据定理 4.2.12, 推论 4.2.13 和定理 4.2.16, 上链复形 $B(A)^*$ 的上述滤子导出一个收敛于 $H^{*,*}(A)$ 的谱序列. 下面我们只要指出, 这个谱序列的 E_1 项就是 $B(E_0A)^*$ 而且 E_1 项的微分算子就是 $B(E_0A)^*$ 的微分算子 d^*, 从而谱序列的 E_2 项为 $E_2^{*,*} = H^{*,*}(E_0A)$.

实际上, E_1 是三分次的, 即

$$E_1^{s,t,r}=\left[\frac{F^sB_{s+t}(A)^*}{F^{s+1}B_{s+t}(A)^*}\right]_r$$

(见定理 4.2.12), 其中 $s+t$ 是 $B(A)^*$ 的同调次数, 即通常所谓的维数. 由

$$\frac{F^sB(A)^*}{F^{s+1}B(A)^*}=\frac{[B(A)/F_{s-1}B(A)]^*}{[B(A)/F_sB(A)]^*}=\left[\frac{F_sB(A)}{F_{s-1}B(A)}\right]^*$$

且通过直接建立自然的对应关系容易得出, 作为 K 模有

$$\left[\frac{F_sB_{s+t}(A)}{F_{s-1}B_{s+t}(A)}\right]_r=B_{s+t}(E_0A)_{-t,t+r}$$

因此 $E_1^{s,t,r}=B(E_0A)^*_{s,t,r}=B_{s+t}(E_0A)^*_{-t,t+r}$. 利用 bar 分解中微分算子 d 的公式, 容易得出 E_1 项的微分算子恰好是 $B(E_0A)^*$ 的微分算子 d^*, 因此定理得证. 证毕.

当 A 为 mod p Steenrod 代数, 上述 May 谱序列 (定理 5.5.2) 的 $\{E_1^{s,t,*},d_1^{s,t,*}\}$ 项已经全部计算出来, 因此可将定理 5.5.2 重新叙述为以下定理 (参见文献 [14] p.82 定理 3.2.5).

定理 5.5.3 当 $p>2$, 存在 May 谱序列

$$E_1^{s,t,*}\Rightarrow \mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_p,Z_p)$$

使得 $E_1^{*,*,*}=E(h_{i,j}\mid i>0,j\geqslant 0)\otimes P(b_{i,j}\mid i>0,j\geqslant 0)\otimes P(a_i\mid i\geqslant 0)$, 其中 E 表示外代数, P 表示多项式代数, 而且

$$h_{i,j}\in E_1^{1,2(p^i-1)p^j,2i-1}$$
$$b_{i,j}\in E_1^{2,2(p^i-1)p^{j+1},p(2i-1)}$$
$$a_i\in E_1^{1,2p^i-1,2i+1}$$

另外, 它的微分算子为 $d_r:E_r^{s,t,u}\longrightarrow E_r^{s+1,t,u-r}$, 并且当 $x\in E_r^{s,t,u},y\in E_r^{s',t',u'}$ 有公式: $d_r(xy)=d_r(x)y+(-1)^sxd_r(y)$ $(r\geqslant 1)$, d_1 如下:

$$d_1(h_{i,j})=\sum_{0<k<i}h_{k,j}h_{i-k,k+j},$$
$$d_1(a_i)=\sum_{0\leqslant k<i}a_kh_{i-k,k},$$
$$d_1(b_{i,j})=0.$$

下面我们进一步说明 E_0A 是 $L=P(E_0A)$ 的泛包络代数. 首先介绍李代数和它的泛包络代数的概念.

定义 5.5.4 L 称为分次李代数, 如果 L 是域 K 上分次向量空间, 且有称为李括弧的双线性映射 $[\ ,\ ]: L\otimes L\to L$, 使

(1) $[x, y] = (-1)^{pq+1}[y, x] \quad x \in L_p,\ y \in L_q$.

(2)$(-1)^{pr}[x, [y, z]] + (-1)^{qp}[y, [z, x]] + (-1)^{rq}[z, [x, y]] = 0, \quad x \in L_p,\ y \in L_q,\ z \in L_r$, 其中第 2 个条件叫做 Jacobi 恒等式.

$N \subset L$ 叫做子李代数, 如果 N 对 $[\ ,\ ]$ 是封闭的. N 叫做理想, 若 $[x, y] \in N$ 对任何 $x \in L,\ y \in N$. $f\colon L \to L'$ 叫做李代数的映照, 若 $f[x, y] = [f(x), f(y)]$.

例 5.5.5 若 A 为域 K 上的分次代数, 定义 $[\ ,\ ]\colon A \otimes A \to A$ 为 $[x, y] = xy - (-1)^{pq}yx$ ($x \in A_p,\ y \in A_q$), 则 $[\ ,\ ]$ 满足李代数的两个条件, 称 $(A, [\ ,\ ])$ 为代数 A 的相应李代数.

定义 5.5.6 设 L 为 (分次) 李代数, L 的泛包络代数是一个代数 $U(L)$ 连同李代数映照 $i_L\colon L \to U(L)$ 使对任一李代数 A 和李代数映照 $f\colon L \to A$, 存在唯一的代数映照 $\tilde{f}\colon U(L) \to A$ 使下图可换:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i_L} & U(L) \\ & f \searrow \quad \swarrow \tilde{f} & \\ & A & \end{array}$$

$U(L)$ 的显式可写成

$$U(L) = TL/\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y]\}$$

其中 TL 是 K 向量空间 L 的张量代数, 即

$$TL = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_n L$$

而 $T_0 L = K,\ T_n L = L \otimes_K L \otimes_K \cdots \otimes_K L$ (n 重), 具有乘法

$$\begin{aligned} &(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \cdot (x_1' \otimes \cdots \otimes x_n') \\ &= x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes x_1' \otimes \cdots \otimes x_n' \end{aligned}$$

另外 $\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y]\}$ 表示 TL 的由形如 $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ 的元所生成的理想.

定义 5.5.7 特征数 $p > 0$ 的域 K 上的李代数 L 叫做限制李代数, 若存在 $\xi\colon L \to L$ 满足

(1) $\xi(\lambda x) = \lambda^p \xi(x), \quad \lambda \in K$.

(2) $\xi(x + y) = \xi(x) + \xi(y) + \sum\limits_{i=1}^{p-1} s_i(x, y)$, 其中 $s_i(x, y)$ 是关于 x, y 的 p 次齐次多项式.

(3)$x^p y - xy^p = \xi(x)^p y - \xi(x) y^p$.

定义 5.5.8 若 L 为限制李代数, 则 L 的 (限制)泛包络代数 $V(L) = U(L)/J$, $U(L)$ 如上, 而 J 是 L 的由 $\xi(x) - x^p$ ($x \in L$) 生成的理想.

2.5 节中已经提到, Hopf 代数 A 的元 a 若 $\psi(a) = 1 \otimes a + a \otimes 1$ 称为 A 的原初

(primitive) 元. 令 $P(A)$ 表示 A 的所有原初元的集合, 则以下的命题容易证明.

命题 5.5.9 $P(A)$ 是 A 的相应李代数的子李代数.

定义 5.5.10 Hopf 代数 A 叫做原初生成的如果含 $P(A)$ 的最小子代数是 A 本身, 即 A 的任一元素由原初元生成.

若 L 为李代数, $U(L)$ 为它的泛包络代数, 则对角映射 $\Delta: L \to L\otimes L$ 使 $\Delta(x) = (x,x)$ 将导出 $\psi: U(L) \to U(L)\otimes U(L)$ 使 $U(L)$ 成为 Hopf 代数, 而容易证明 $U(L)$ 是原初生成的 Hopf 代数.

令 $\mathcal{L}_K$ 为 K 上李代数范畴, $\mathcal{H}_K$ 为 K 上 Hopf 代数范畴, $\mathcal{PH}_K \subset \mathcal{H}_K$ 为 K上原初生成的 Hopf 代数范畴, 则有以下函子

$$P: \mathcal{H}_K \to \mathcal{L}_K$$
$$U: \mathcal{L}_K \to \mathcal{PH}_K$$

定理 5.5.11(文献 [12] 定理 5.18) 若 K 是有特征数 0 的域, 则

(1) $PU: \mathcal{L}_K \to \mathcal{L}_K$ 是恒同函子.

(2) $UP: \mathcal{PH}_K \to \mathcal{PH}_K$ 是恒同函子.

设 $\mathcal{RL}_K \subset \mathcal{L}_K$ 表示 K 上限制李代数范畴, 则由定义 5.5.7, 类似地有函子 $V: \mathcal{RL}_K \to \mathcal{PH}_K$, 并且当 K 有特征数 $p>0$, 有 $P: \mathcal{PH}_K \to \mathcal{RL}_K$.

定理 5.5.12 $PV = 1: \mathcal{RL}_K \to \mathcal{RL}_K$, $VP = 1: \mathcal{PH}_K \to \mathcal{PH}_K$.

利用以上结论, 若 K 有特征数 $p>0$, 由于 $E_0A \in \mathcal{PH}_K$, 则

$$E_0A = V(L), \qquad L = P(E_0A)$$

下面叙述收敛于 $H^{*,*}(V(L))$ 的第二个 May 谱序列.

定理 5.5.13(文献 [11]§6 推论 9) 设 L 为双分次限制李代数, $V(L)$ 为 L 的 (限制) 泛包络代数, 则存在微分代数谱序列 $\{E_r(L)\}$ 使

$$E_2^{**} = P((s^2L^+)^*) \otimes H^{**}(U(L)) \Rightarrow H^{**}(V(L))$$

其中 $P((s^2L^+)^*)$ 表示 $(s^2L^+)^*$ 为生成元的多项式代数, 而 $(s^2L^+)^*$ 为 s^2L^+ 的对偶, s^2L^+ 是 L 的所有维数是 2, 次数是 $2p$ 的倍数的元素生成的 K 模.

证 我们只介绍这个定理证明的思路, 而省略一些细节. 首先, 作出 K 的 $U(L)$ 分解 $Y(L)$, 作为 K 模 $Y(L) = \tilde{Y}(L)\otimes U(L)$, 其中 $\tilde{Y}(L) = \Gamma(sL^-)\otimes E(sL^+)$, Γ 表示 (可除) 多项式代数而 E 表示外代数.sL^- 表示 L^- 的一个拷贝, 由所有 L 的奇次数元素所组成的子模, sL^+ 表示 L^+ 的一个拷贝, 由 L 的所有偶次数元素所组成的 K 子模 (这里的次数是全次数).

然后, 给 $Y(L)$ 予 Hopf 代数结构使 $Y(L)$ 的乘法与 $\tilde{Y}(L), U(L)$ 的原乘法一致, 且 $Y(L)$ 成为 Hopf 代数 $U(L)$ 上的 Hopf 代数. 给出 $Y(L)$ 的微分 d 使 $Y(L)$ 成为微分代数 (也是微分的上代数).

若 L 为限制李代数, $V(L)$ 为 L 的 (限制) 泛包络代数, 令 $\tilde{X}(L) = \Gamma(s^2L^+) \otimes \tilde{Y}(L)$, $X(L) = \tilde{X}(L) \otimes V(L)$, 则 $X(L)$ 可给予 Hopf 代数结构使成为 $V(L)$ 上的 Hopf 代数. 因此 $X(L)$ 是 K 的 $V(L)$ 分解且是 $V(L)$ 上的微分代数.

最后给 $\tilde{X}(L)^* = P((s^2L^+)^*) \otimes \tilde{Y}(L)^*$ 予适当滤子, 得出谱序列 $\{E_r(L)\}$ 收敛于 $H^{*,*}(V(L))$ 而 $E_0(L) = P((s^2L^+)^*) \otimes \tilde{Y}(L)^*$. 因为 $\tilde{Y}(L)^*$ 的上同调群为 $H^{*,*}(U(L))$ 而 $d_1 = 0$ 因此 $E_2(L) = P((s^2L^+)^*) \otimes H^{*,*}(U(L))$. 证毕.

May 谱序列的基本概念和结论到此已介绍完毕. 若 A 是 $\bmod p$ Steenrod 代数, Tangora 在 $p=2$, $t-s \leqslant 70$ 用 May 谱序列计算出 $H^{s,t}(A)$.Nakamura[7] 对 $p>2$, $t-s<2(p-1)(3p^2+p+4)-2$ 确定了 $H^{s,t}(E_0A)$(用第二个谱序列). 我们不准备介绍这方面的结果. 作为 May 谱序列的应用, 下一节介绍 $\mathrm{Ext}_P^{*,*}(Z_p, Z_p) = H^{*,*}(P)$ 的一个估计, 第 6 章中关于谱 $V(n)$ 的存在性将用到这个估计.

5.6 $\mathrm{Ext}_P^{*,*}(Z_p, Z_p) = H^{*,*}(P)$ 的一个估计

本节中 A 为 $\bmod p$ Steenrod 代数, $p>2$. P 表示 A 的由循环缩减幂 P^i $(i \geqslant 0)$ 生成的子代数. 以下我们用 May 谱序列来得出 $H^{**}(P) = \mathrm{Ext}_P^{**}(Z_p, Z_p)$ 的一个估计 (见文献 [13]§2).

设 $\epsilon: P \to Z_p$ 为增广, $I(P) = \ker \epsilon$. 令 $F_0P = P$, 而

$$F_{s-1}P = I \cdot F_sP \quad (s \leqslant 0)$$

因此得出滤子 $P = F_0P \supset F_{-1}P \supset \cdots$, 考虑分次 Hopf 代数

$$E_0P = \sum_s F_sP/F_{s-1}P$$

则由定理 5.5.2 有如下定理.

定理 5.6.1 存在谱序列

$$E_2^{*,*} = H^{*,*}(E_0P) \Rightarrow H^{*,*}(P)$$

由定理 5.5.11, E_0P 是特征数 $p>2$ 的域上的原初生成 Hopf 代数, $E_0P = V(L)$, 其中 $L = P(E_0P)$(E_0P 的原初元集合), 而 $V(L) = U(L)/J$, 其中

$$U(L) = TL/\{xy - yx - [x,y]\}$$

为李代数 L 的通常泛包络代数, 而 J 是由 $\xi(x) - x^p$ $(x \in L)$ 生成的理想.

定理 5.6.2(文献 [8] 定理 II2.9 的一部分) $L = P(E_0P)$ 有 Z_p 基

$$\{P_j^i = P^{(0,\cdots,0,p^i,0,\cdots)} \mid i \geqslant 0,\ j \geqslant 1\}$$

使 $[P_j^i, P_l^k] = \delta_{i,k+l}P_{j+l}^k$ $(i \geqslant k)$ 而 $\xi(P_j^i) = 0$, 其中 $\delta_{i,k+l}$ 为 Kronecker 指数.

因此由定理 5.5.13, 存在谱序列 $E_2^{*,*} = P(b_j^i) \otimes H^{*,*}(U(L)) \Rightarrow H^{*,*}(V(L))$, 其中 b_j^i 表示 P_j^{i+1} $(i \geqslant 0,\ j \geqslant 1)$, 它的双次数为 $(2, 2p^{i+1}(p^j-1))$, 而 $P(b_j^i)$ 表示所有 b_j^i 生成的多项式代数.

下面计算 $H^{*,*}(U(L))$. 在定理 5.5.13 的证明中, 有 K 的 $U(L)$ 自由分解 $\tilde{Y}(L) \otimes U(L)$, 而 $\tilde{Y}(L) = \Gamma(sL^-) \otimes E(sL^+)$. 因为 L 没有奇次数元素, 因此 $\tilde{Y}(L) = E(\langle P_j^i \rangle)$ 是所有 $\langle P_j^i \rangle$ 生成的外代数, 而且有微分

$$\bar{d}\langle P_j^i, P_l^k \rangle = \delta_{i,k+l} \langle P_{j+l}^k \rangle$$

因此过渡到对偶, 记 R_j^i 为 $\langle P_j^i \rangle$ 的对偶, 则 $U(L)$ 的上同调 $H^{*,*}(U(L))$ 同构于上链复形 $(E(R_j^i), \delta)$ 的上同调群

$$H^{*,*}(U(L)) \cong H^{*,*}(E(R_j^i), \delta)$$

其中 $\delta R_j^i = \sum\limits_{k=1}^{j-1} R_{j-k}^{i+k} R_k^i$. 注意到 R_j^i 的双次数为 $(1, 2p^i(p^j-1))$.

利用这个结论 May[8] 算出了如下结果 (或见文献 [13]P.55):

定理 5.6.3 当 $t - s < 2(p^3 + 3p^2 + 2p + 1)(p-1) - 4$, $H^{s,t}(U(L))$ 由以下上同调类所 (乘法) 生成:

$$\begin{aligned}
&h_i = \{R_1^i\},\ g_i = \{R_2^i R_1^i\},\ k_i = \{R_2^i R_1^{i+1}\}\ (i \geqslant 0) \\
&l_1 = \{R_3^0 R_2^0 R_1^0\},\ l_2 = \{R_2^1 R_2^0 R_1^1\},\ l_3 = \{R_3^0 R_1^2 R_1^0\} \\
&l_4 = \{R_3^0 R_2^1 R_1^2\},\ l_5 = \{R_3^1 R_2^1 R_1^1\},\ l_6 = \{R_2^2 R_2^1 R_1^2\} \\
&m_1 = \{R_3^0 R_2^1 R_2^0 R_1^1\},\ m_2 = \{R_4^0 R_3^0 R_2^0 R_1^0\} \\
&m_3 = \{R_3^1 R_2^1 R_2^0 R_1^1\},\ m_4 = \{R_2^2 R_3^0 R_1^2 R_1^0\}
\end{aligned}$$

而我们加法的有

$$\begin{aligned}
H^{**}(U(L)) \cong &\{1, l_4, h_3\} \otimes \{1, h_0, h_1, g_0, k_0, k_0 h_0\} \\
&+ \{h_2, h_2 h_0, g_1, l_1, l_2, l_1 h_1, k_1, l_3, k_1 h_1, l_1 h_2, m_1, m_1 h_0, g_2 \\
&\quad g_2 h_0, l_5, m_2, m_3, l_6, m_4\}
\end{aligned}$$

因此从两个 May 谱序列

$$H^{*,*}(V(L)) \Rightarrow H^{*,*}(P)$$
$$P(b_j^i) \otimes H^{*,*}(U(L)) \Rightarrow H^{*,*}(V(L))$$

和 $H^{*,*}(U(L))$ 的上述计算结果, 就得出 $H^{*,*}(P)$ 在 $t-s$ 的该范围内的一个估计.

推论 5.6.4 $\mathrm{Ext}_P^{s,t}(Z_p, Z_p)$ 的秩 $\leqslant [P(b_j^i) \otimes H^{*,*}(U(L))]^{s,t}$ 的秩.

参考文献

[1] Steenrod N E, Epstein D B A. 1962. Cohomology Operations. Ann. of Math. Studies 50. Princeton Univ. Press

[2] Adams J F. 1960. On the nonexistence of elements of Hopf invariant one. Ann. of Math. 72, 20∼104

[3] Liulevicius A. 1962. Factorization of cyclic reduced powers by secondary cohomology operation. Mem. A. M. S. 42

[4] Wang J S P. 1967. On the cohomology of the Steenrod algebra and the nonexistence of element of Hopf invariant one. Ill. J. Math. 11, 480∼490

[5] Aikawa T. 1980. 3-dimensional cohomology of the mod p Steenrod algebra. Math. Scand. 47, 91∼115

[6] Tangora M C. 1966. On the cohomology of the Steenrod algebra. Thesis. North-Western Univ

[7] Nakamura O. 1975. On the cohomology of the mod p Steenrod algebra. Bull. Sci. and Eng. Div. Univ. of the Ryukyus Math. and Nat. Sci. 18, 9∼58

[8] May J P. 1964. The cohomology of restricted Lie algebras and Hopf algebra. Thesis. Princeton Univ.

[9] Dyer E, Lashof R K. Homology of iterated loop spaces.

[10] Adams J F. 1958. On the structure and application of the Steenrod algebra. Comm. Math. Helv. 32, 180∼214

[11] May J P. 1966. The cohomology of restricted Lie algebras and Hopf algebras. J. Algebra 3, 123∼146

[12] Milnor J, Moore J C. 1965. On the structure of Hopf algebras. Ann. of Math. 81, 211∼264

[13] Toda H. 1971. On spectra realizing exterior parts of the Steenrod algebra. Topology 10, 53∼65

[14] Ravenel D C. 1986. Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres. Academic Press Inc

第 6 章　Steenrod 模可实现条件及一些重要的谱

6.1　Steenrod 模可实现的一个充分条件

设 A 为 $\bmod p$ Steenrod 代数, $p \geqslant 2$, M 为分次 Z_p 模. 若存在 A 模作用 $\alpha: A \otimes M \to M$ 使下图可换:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes M & \xrightarrow{1 \otimes \alpha} & A \otimes M \\ \downarrow \phi \otimes 1 & & \downarrow \alpha \\ A \otimes M & \xrightarrow{\alpha} & M \end{array}$$

其中 $\phi: A \otimes A \to A$ 为 A 的乘法, 则称 M 为 Steenrod 代数上的模, 简称为 A 模. 设 X 为 CW 复形或 CW 谱, 则 X 的 Z_p 上同调群 $H^*(X)$ 是 A 模.

若 M 为 A 模, 且存在谱 X 使 X 的 Z_p 上同调群 $H^*(X) \cong M$(作为 A 模), 称 M 为可实现 A 模, 即 M 有几何实现.

Steenrod 模的实现问题是近代代数拓扑学的一个重要问题, 一些重要的谱起初是从实现某些 A 模引进来的. 下面介绍一个 A 模可实现的充分条件.

定义 6.1.1　恰当序列

$$\cdots \to F_s \xrightarrow{d_s} F_{s-1} \xrightarrow{d_{s-1}} \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

叫做 A 模 M 的极小 (自由) 分解, 若它是自由分解 (即每个 F_s 是自由 A 模), 且可以作为直加项嵌入任何一个自由分解中.

命题 6.1.2　(1) A 模 M 的极小分解存在且在同构意义下唯一.

(2) M 的极小分解中, $F_s \cong A \otimes \mathrm{Ext}_A^{s,*}(M, Z_p)$.

证　略.

设已给 M 的极小分解如定义 6.1.1, F_s 为 A 自由模, 由推论 3.5.5 和定理 3.5.7, 存在 E-M 谱 K_s 使 $H^*(K_s) \cong F_s$ 且存在映射 $h_1: X_1 = K_0 \to K_1$ 使 $h_1^* = d_1$. 令

$$X_2 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{h_1} K_1$$

为上纤维序列, 则导出 Z_p 上同调群的恰当序列

$$F_1 \xrightarrow{h_1^*} H^*(X_1) \xrightarrow{f_1^*} H^*(X_2) \to \Sigma^{-1} F_1 \xrightarrow{\Sigma^{-1} h_1^*} \Sigma^{-1} H^*(X_1)$$

其中 $\Sigma^{-1} H^t(X_1) = H^{t+1}(X_1)$. 因此有短恰当序列

(6.1.3)　　$0 \to \mathrm{cok}\, d_1 \to H^*(X_2) \to \mathrm{im}\, \Sigma^{-1} d_2 \to 0$

而 $\mathrm{cok}\, d_1 = M$. 这时称 M 为 1- 可实现的. 若 (6.1.3) 是 A 可裂的, 则称 M 为 1 强

可实现.

定义 6.1.4 如果 M 的极小分解中, E-M 谱 K_s 使 $H^*(K_s) \cong F_s$, 且存在一序列谱和映射

$$X_{n+1} \xrightarrow{f_n} X_n \to \cdots \to X_{k+1} \xrightarrow{f_k} X_k \to \cdots \to X_1 = K_0$$

使当 $1 \leqslant k \leqslant n$, 有

(1) $X_{k+1} \xrightarrow{f_k} X_k \xrightarrow{h_k} \Sigma^{-k+1}K_k$ 为上纤维序列导出 Z_p 上同调恰当序列

$$\Sigma^{-k+1}F_k \xrightarrow{h_k^*} H^*(X_k) \xrightarrow{f_k^*} H^*(X_{k+1}) \xrightarrow{\tau_k} \Sigma^{-k}F_k \xrightarrow{\Sigma^{-1}h_k^*} \Sigma^{-1}H^*(X_k)$$

(2) 存在短恰当序列 (对所有 $1 \leqslant k \leqslant n$)

$$0 \to M \xrightarrow{i_{k+1}} H^*(X_{k+1}) \xrightarrow{j_{k+1}} \operatorname{im}\Sigma^{-k}d_{k+1} \to 0$$

则称 M 为 n 可实现. 若更进一步, 以上短恰当序列为 A 可裂 $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 称 M 为 n 强可实现.

命题 6.1.5 n 强可实现蕴涵 $(n+1)$ 可实现.

证 考查以下短恰当序列:

$$\begin{array}{ccc} 0 \to M \xrightarrow{i_{n+1}} & H^*(X_{n+1}) & \underset{\xi_{n+1}}{\overset{j_{n+1}}{\rightleftarrows}} \operatorname{im}\Sigma^{-n}d_{n+1} \to 0 \\ \psi_{n+1} & \uparrow & \nearrow \Sigma^{-n}d_{n+1} \\ & \Sigma^{-n}F_{n+1} & \end{array}$$

因为序列 A 可裂, 存在 A 映照 ξ_{n+1} 使 $j_{n+1}\xi_{n+1} = 1$. 令 $\psi_{n+1} = \xi_{n+1} \cdot \Sigma^{-n}d_{n+1}$, 因此 $\ker\psi_{n+1} = \ker\Sigma^{-n}d_{n+1} = \operatorname{im}\Sigma^{-n}d_{n+2}$, 存在映射

$$h_{n+1} : X_{n+1} \to \Sigma^{-n}K_{n+1}$$

使 $h_{n+1}^* = \psi_{n+1}$. 令

$$X_{n+2} \xrightarrow{f_{n+1}} X_{n+1} \xrightarrow{h_{n+1}} \Sigma^{-n}K_{n+1}$$

为上纤维序列, 则导出 Z_p 上同调恰当序列

$$\Sigma^{-n}F_{n+1} \xrightarrow{h_{n+1}^*} H^*(X_{n+1}) \xrightarrow{f_{n+1}^*} H^*(X_{n+2}) \to \Sigma^{-n-1}F_{n+1} \xrightarrow{\Sigma^{-1}h_{n+1}^*} \Sigma^{-1}H^*(X_{n+1})$$

从而有短恰当序列

$$0 \to \operatorname{cok} h_{n+1}^* \xrightarrow{f_{n+1}^*} H^*(X_{n+2}) \to \ker\Sigma^{-1}h_{n+1}^* \to 0$$

由以上已推出 $\ker\Sigma^{-1}h_{n+1}^* = \ker\Sigma^{-1}\psi_{n+1} = \operatorname{im}\Sigma^{-n-1}d_{n+2}$, 另外合成 $M \xrightarrow{i_{n+1}} H^*(X_{n+1}) \xrightarrow{f_{n+1}^*} H^*(X_{n+2})$ 的像恰好是 $f_{n+1}^*(\operatorname{cok} h_{n+1}^*)$. 因此有短恰当序列

$$0 \to M \xrightarrow{i_{n+2}} H^*(X_{n+2}) \xrightarrow{j_{n+2}} \operatorname{im}\Sigma^{-n-1}d_{n+2} \to 0$$

从而 M 是 $(n+1)$ 可实现的. 证毕.

下面证明 A 模 M 可实现的充分条件.

定理 6.1.6 若连通 A 模 M 是 $E(Q_0)$ 自由的, 且对所有 $n \geqslant 1$ 为 n 可实现, 则 M 可实现.

证 因为 M 是 $E(Q_0)$ 自由的, 由定理 4.1.10, $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M, Z_p) = 0$ 当 $t < 2(p-1)s - 1$(这里设 $M^i = 0$ 当 $i < 0$). 因为 M 的极小分解中 $F_s = A \otimes \mathrm{Ext}_A^{s,*}(M, Z_p)$, 因此 K_s 是 $2(p-1)s-1$ 连通的, 再由上纤维序列

$$X_{s+1} \xrightarrow{f_s} X_s \xrightarrow{h_s} \Sigma^{-s+1} K_s$$

的同伦群和 Z_p 上同调群的恰当序列可知

$$f_{s*}: \pi_t(X_{s+1}) \cong \pi_t(X_s)$$
$$f_s^*: H^t(X_s) \cong H^t(X_{s+1})$$

当 $t < 2(p-1)s-2$. 令 $X = \varprojlim X_s$, 则 $H^*(X) \cong \varinjlim H^*(X_s) \cong M$, M 可实现. 证毕.

推论 6.1.7 若连通 A 模 M 是 $E(Q_0)$ 自由的, 且

$$\mathrm{Ext}_A^{s+2,s}(M, M) = 0 \quad (s \geqslant 1)$$

则 M 可实现.

证 因为任意 A 模总是 1- 可实现的, 因此只要证明 s 可实现导出 s 强可实现 $(s \geqslant 1)$.

因为短恰当序列

$$0 \to M \to H^*(X_{s+1}) \to \mathrm{im}\, \Sigma^{-s} d_{s+1} \to 0$$

属于 $\mathrm{Ext}_A^1(\mathrm{im}\, \Sigma^{-s} d_{s+1}, M) = \mathrm{Ext}_A^{1,s}(\mathrm{im}\, d_{s+1}, M) = \mathrm{Ext}_A^{s+2,s}(M, M)$, 因此由假设得出以上序列是 A 可裂的. 证毕.

推论 6.1.8 若连通 A 模 M 是 $E(Q_0)$ 自由的, 且 $M^t \neq 0$ 蕴涵 $\mathrm{Ext}_A^{s+2,t+s}(M, Z_p) = 0$, 则 M 可实现.

证 因为存在 A 映照 ϕ, ψ 使下图可换:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to M & \to & H^*(X_{s+1}) & \to & \mathrm{im}\, \Sigma^{-s} d_{s+1} \to 0 \\ \uparrow \psi & & \uparrow \phi & \nearrow \Sigma^{-s} d_{s+1} & \\ \Sigma^{-s} F_{s+2} & \to & \Sigma^{-s} F_{s+1} & & \end{array}$$

对 $\Sigma^{-s} F_{s+2}$ 任一 A 基元 $x \in \mathrm{Ext}_A^{s+2,t+s}(M, Z_p)$(见命题 6.1.2), 由设得出 $M^t = 0$, 因此 $\psi = 0$, 从而序列可裂. 证毕.

6.2 Smith-Toda 谱 $V(n)$

设 A 表示 $\mathrm{mod}\, p$ Steenrod 代数, $p > 2$. P 表示 A 的由循环缩减幂 P^i $(i \geqslant 0)$ 生成的子代数, Q 表示由 A 的 Milnor 基元 $Q_0, Q_1, Q_2, \cdots$ 生成的外代数 $E(Q_0, Q_1,$

$Q_2,\cdots)$. 自然对应 $Q\to A//P$ 确定了又单又满的对应, 因此 Q 可由后者给予 A 模结构. Q 有 Z_p 基

$$\{1,Q_0,Q_1,Q_0Q_1,Q_2,\cdots\}$$

其中元素按次数由小到大排列. 令 $Q(m)$ 为 Q 的前 m 个 Z_p 基元所展成, $Q(m)$ 作为 Q 的商给予 A 模结构. 下面讨论 A 模 $Q(m)$ 的几何实现问题.

我们记一个谱为 $V(n+\frac{k}{2^{n+1}})$, 如果有 A 模同构

$$H^*\left(V\left(n+\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right)\cong Q(2^{n+1}+k)$$

即谱 $V(n+\frac{k}{2^{n+1}})$ 如果存在, 它是 $Q(2^{n+1}+k)$ 的几何实现. 特别地, $H^*(V(n))\cong Q(2^{n+1})=E(Q_0,Q_1,\cdots,Q_n)$. 由于谱 $V(n)$ 与球面稳定同伦群有密切联系, 因此是一类重要的谱, $V(n)$ 当 $p>2n$ 的存在性对 $n=0,1$ 由 Adams[1], $n=1$ 由 Smith[2], $n=2,3$ 由 Toda[3] 得出. 下面是文献 [3] 中的定理 1.1.

定理 6.2.1(文献 [3] 定理 1.1) (1) $V(0)$ 当 $p\geqslant 2$ 存在.

(2) $V(1),V(1\frac{1}{2})$ 当 $p\geqslant 3$ 存在.

(3) $V(2),V(2\frac{3}{4})$ 当 $p\geqslant 5$ 存在.

(4) $V(3)$ 当 $p\geqslant 7$ 存在.

证 设 $M=Q(2^{n+1}+k)$. 考虑短恰当序列

$$0\to N\to Q\xrightarrow{\Pi}M\to 0$$

其中 Π 为自然投射, $N=\ker\Pi$. 设 m 为 M 的 Z_p 基元的最高次数 (即 $M^m\neq 0$ 的最大 m), 因此 $N^r=0$ 当 $r\leqslant m$. 由导出的 Ext 长恰当序列

$$\cdots\to \mathrm{Ext}_A^{s-1,t}(N,Z_p)\to \mathrm{Ext}_A^{s,t}(M,Z_p)\to \mathrm{Ext}_A^{s,t}(Q,Z_p)\to\cdots$$

因为 $\mathrm{Ext}_A^{s-1,t}(N,Z_p)=\mathrm{Ext}_A^{s,t}(N,Z_p)=0$ 当 $t-s<m$, 因此有

$$\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M,Z_p)\cong \mathrm{Ext}_A^{s,t}(Q,Z_p)$$

当 $t-s<m$. 由于在乘法之下 $Q\otimes P\cong A$, 容易证明 $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(Q,Z_p)\cong \mathrm{Ext}_P^{s,t}(Z_p,Z_p)$(任意 s, t).

由推论 6.1.8 和推论 5.6.5, 只需证明 $M^r\neq 0$ 蕴涵

$$[P(b_j^i)\otimes H^{*,*}(U(L))]^{s+2,s+r}=0 \qquad (s\geqslant 1)$$

根据 5.6 节的计算, 当 $t-s<2(p^2+2p+3)(p-1)+4$, $P(b_j^i)\otimes H^{*,*}(U(L))$ 等于

$$P(b)\otimes[\{1,b_1,b_2^0\}\otimes\{1,h_0,h_1,g_0,k_0,k_0h_0\}+\{h_2,h_2g_0,g_1,l_1\}]$$

其中 $b=b_1^0$, $b_1=b_1^1$. 下面考虑括号 [ ] 中的元素 λ 的次数 $\deg\lambda(\mathrm{mod}\ \deg b=pq-2)$,

其中 $q = 2(p-1)$($\deg\lambda$ 指的是 λ 双次数的差).

$$\begin{aligned}\lambda\ &= b_1, b_2^0, \quad h_0, \quad h_1, g_0, k_0, \quad k_0h_0, \quad h_2, h_2h_0, \quad g_1, \quad l_1\\ \deg\lambda &\equiv q, q+2, q-1, 1, 2q, q+2, 2q+1, q+1, 2q, q+4, 4q+3\end{aligned}$$

另一方面, M 中单项式 u 的次数 $\deg u (\bmod\, pq-2)$ 如下:

$$\begin{aligned}u\ &= Q_0, Q_1, Q_0Q_1, Q_2, Q_0Q_2, Q_1Q_2, Q_0Q_1Q_2, Q_3, \cdots\\ \deg u &\equiv 1, q+1, q+2, q+3, q+4, 2q+4, 2q+5, 2q+5, \cdots\end{aligned}$$

由上面所述, 一对 (u, λ) 使 $\deg u = \deg\lambda + 2$ 是 M 可实现的阻碍.

(1) $V(0)$ 取为 Moore 谱 $S^0 \cup_p e^1$, 当 $p \geqslant 2$ 总是存在的.

(2) 当 $M = E(Q_0, Q_1)$, 只要考虑 $u = Q_0, Q_1, Q_0Q_1$. 唯一可能的阻碍是 (Q_1, h_0), 但这时 $s = 1$ 可以不算. 因此 $V(1)$ 当 $p \geqslant 3$ 存在.

(3) 当 $M = E(Q_0, Q_1, Q_2)$, 只要考虑 $u = Q_2, Q_0Q_2, Q_1Q_2, Q_0Q_1Q_2$. 因为 $\deg Q_0Q_1Q_2 < \deg k_0$, 则从以上计算表格中容易看出不存在阻碍, 除非当 $p = 3$, (Q_1Q_2, b^2) 有 $\deg Q_1Q_2 = 22 = \deg b^2 + 2$. 因此 $V(2)$ 当 $p \geqslant 5$ 存在, $V(1\frac{1}{2})$ 当 $p \geqslant 3$ 存在.

(4) 当 $M = E(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$, 考虑 $u = Q_0^{\epsilon_0}Q_1^{\epsilon_1}Q_2^{\epsilon_2}Q_3$, 则 $\deg u = lq + m$, $2 \leqslant l \leqslant 4$, $5 \leqslant m \leqslant 10$(由以上计算表格看出), 因此不可能有 $\deg u = \deg\lambda + 2$ 除非 $q < 12$, 即 $p < 7$. 因此 $V(3)$ 当 $p \geqslant 7$ 存在, 而当 $p = 5$ 次数最小的 u 使 $\deg u = \deg\lambda + 2$ 是 $u = Q_1Q_2Q_3$(这时对应的 $\lambda = b^{p+2}h_1$), 因此 $V(2\frac{3}{4})$ 当 $p \geqslant 5$ 存在. 证毕.

注 $V(4)$ 的存在性在以上计算中有阻碍 $\lambda = l_2b_2^0b^{p^2-p-2}$ 和 $h_1(b_2^0)^3b^{p^2-2p-2}$ 满足 $\deg Q_4 = \deg\lambda + 2$. $V(4)$ 当 $p \geqslant 7$ 可能存在的问题目前尚未解决.

由于有 $H^*(V(n + \frac{k}{2^{n+1}}) \cong Q(2^{n+1} + k)$, 因此谱 $V(n + \frac{k}{2^{n+1}})$ 是有限个胞腔的 CW 谱, 其胞腔个数和 $Q(2^{n+1} + k)$ 的 Z_p 基元个数 $2^{n+1} + k$ 相等. 因此为简单起见, 可令

$$V\left(n + \frac{k}{2^{n+1}}\right) = * \cup e_1 \cup e_2 \cup \cdots \cup e_{2^{n+1}+k}$$

使 $* \cup e_1 = S^0$, e_2 用拓扑度为 p 的映射粘在 e_1 上, e_{2i} 用阶数为 p 的映射粘在 e_{2i-1} 上. 因此若 $a < a'$, 则 $V(a)$ 是 $V(a')$ 的子谱且 $V(a')$ 的存在性蕴涵 $V(a)$ 的存在性.

定理 6.2.2(文献 [3] 定理 4.1) 定理 6.2.1 中的谱 $V(a)$ 在同伦等价意义下唯一.

证 设 $a_0 = 3$ 当 $p \geqslant 7$, $a_0 = 2\frac{3}{4}$ 当 $p \geqslant 5$, $a_0 = 1\frac{1}{2}$ 当 $p \geqslant 3$. 设 $V(a_0)$ 和 $V'(a_0)$ 使 $H^*(V(a_0)) \cong H^*(V'(a_0))$.

首先如定理 6.2.1 的证明中所述,

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,s+n}(H^*(V(a_0)),Z_p)\cong \mathrm{Ext}_P^{s+1,s+n}(Z_p,Z_p)$$

且类似于定理 6.2.1 的验证方法, 不存在 (u,λ) 使 $\deg u=\deg\lambda+1$, 从而当 $n=\deg e_i$ $(i>2)$

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,s+n}(H^*(V(a_0)),Z_p)=0 \qquad (s\geqslant 1)$$

因此由 Adams 谱序列得出 $\pi_{n-1}(V(a_0))_p=0$, 但 $V(a_0)$ 是 p 局部的, 因此 $\pi_{n-1}(V(a_0))=0$.

由于内射 $S^0\subset V(a_0)$ 扩张到整个 $V'(a_0)$ 的阻碍在 $\pi_{n-1}(V(a_0))$ 中 $(n=\deg e_i,\ i>2)$ 而 $\pi_{n-1}(V(a_0))=0$, 因此内射 $S^0\subset V(a_0)$ 可扩张为 $f\colon V'(a_0)\to V(a_0)$ 使 $f^*\colon H^*(V(a_0))\cong H^*(V'(a_0))$, 从而 f 是 p 等价. 因为 $V(a_0)$, $V'(a_0)$ 是 p 局部的, 则 f 是同伦等价. 证毕.

推论 6.2.3 当 $n=1,2,3$, $p>2n$, 存在上纤维序列 $\Sigma^{2(p^n-1)}V(n-1)\to V(n-1)\to V(n)$.

证 这是因为对任何 CW 谱偶 (K,L) 有上纤维序列

$$\Sigma^{-1}(K/L)\to L\to K\to K/L$$

而 $H^*(V(n)/V(n-1))\cong\Sigma^{2p^n-1}H^*(V(n-1))$. 证毕.

定理 6.2.4 (文献 [3] 定理 4.4) 存在以下谱的乘法:

$$\begin{aligned}
&\phi\colon V(3)\wedge V(3)\to V(3), &&\text{当 } p\geqslant 11\\
&\phi\colon V(2)\wedge V(2)\to V(2), &&\text{当 } p\geqslant 7\\
&\phi\colon V(1)\wedge V(1)\to V(1), &&\text{当 } p\geqslant 5\\
&\phi\colon V(0)\wedge V(0)\to V(0), &&\text{当 } p\geqslant 3
\end{aligned}$$

证 映射 $\phi\colon V(a)\wedge V(a)\to V(a)$ 叫做谱的乘法, 如果 ϕ 在 $V(a)\wedge S^0\simeq V(a)$ 和 $S^0\wedge V(a)\simeq V(a)$ 上的限制是同伦等价 (见 3.4 节), 因此 ϕ 是 $S^0\wedge S^0\to V(a)$ 的扩张. 扩张到胞腔 $e_i\wedge e_j$ 的阻碍在 $\pi_{n-1}(V(a))$, 其中 $n=\deg e_i+\deg e_j$ $(i,j>1)$. 通过验证可知 $\mathrm{Ext}_P^{s+1,s+n}(Z_p,Z_p)=0$ 从而由 Adams 谱序列得出 $\pi_{n-1}(V(a))=0$ 对所有 $n=\deg e_i+\deg e_j$ $(i,j>1)$, 因此 ϕ 存在. 证毕.

推论 6.2.5 稳定同伦群 $\pi_*(V(3))$ 当 $p\geqslant 7$, $\pi_*(V(2))$ 当 $p\geqslant 5$, $\pi_*(V(1))$ 当 $p\geqslant 3$ 在 $\pi_0(V(0))\cong Z_p$ 的模作用下是 Z_p 模.

证 $\phi\colon V(a)\wedge V(a)\to V(a)$ $(a=1,2,3)$ 的限制

$$\phi\colon V(0)\wedge V(a)\to V(a)$$

给出了模作用

$$\pi_0(V(0))\otimes\pi_t(V(a))\to\pi_t(V(a))$$

而 $\pi_0(V(0))\cong Z_p$. 证毕.

定理 6.2.6 (文献 [3] 定理 6.1) $V(1)$ 当 $p=2$ 不存在.

证 若 $V(1)$ 存在, 则 $H^*(V(1)) \cong E(Q_0, Q_1)u$, 其中 $u \in H^0(V(1))$ 为生成元. 因为 $p=2$ 时 $Q_0 = Sq^1$, $Q_1 = Sq^2Sq^1 + Sq^1Sq^2$, 由次数关系 $Sq^2u=0$, 则导出矛盾 $0 = Sq^2Sq^2u = Sq^1Sq^2Sq^1u = Q_0Q_1u \neq 0$. 证毕.

注 $V(2)$ 当 $p=3$ 可能不存在, $V(4)$ 当 $p=5$ 可能不存在. 一般的猜想 $V(p-1)$, $V(\infty)$ 不存在. 这个猜想目前仍未解决.

由定理 6.2.2 可知, 当 $p > 2n, 0 \leqslant n \leqslant 3$, 有上纤维序列

$$\Sigma^{2(p^n-1)}V(n-1) \xrightarrow{\phi_n} V(n-1) \xrightarrow{i_n} V(n) \xrightarrow{j_n} \Sigma^{2p^n-1}V(n-1)$$

其中 $V(-1)$ 表示球谱 S 而 ϕ_0 是拓扑度为 p 的映射 $p \in [S,S]$. 将 ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 分别记为 p, α, β, γ, 从而有以下上纤维序列:

(6.2.7) $\quad S \xrightarrow{p} S \xrightarrow{i_0} V(0) \xrightarrow{j_0} \Sigma S$

(6.2.8) $\quad \Sigma^q V(0) \xrightarrow{\alpha} V(0) \xrightarrow{i_1} V(1) \xrightarrow{j_1} \Sigma^{q+1}V(0)$

(6.2.9) $\quad \Sigma^{(p+1)q}V(1) \xrightarrow{\beta} V(1) \xrightarrow{i_2} V(2) \xrightarrow{j_2} \Sigma^{(p+1)q+1}V(1)$

(6.2.10) $\quad \Sigma^{2(p^3-1)}V(2) \xrightarrow{\gamma} V(2) \xrightarrow{i_3} V(3) \xrightarrow{j_3} \Sigma^{2p^3-1}V(2)$

其中 $q = 2(p-1)$.

定理 6.2.11(文献 [3] 定理 5.2) 在 $p \geqslant 5$ 和次数 $< p^2q-3$ 之下, 我们有

$$\pi_*(V(1)) = P(\beta) \otimes A \otimes P(\beta_1)$$

其中张量积由合成给出, 而 A 是以 $\{i_1i_0, i_1i_0\alpha_1, i_1j_1\beta i_1i_0, g_0 \in \pi_{(p+2)q-2}V(1), i_1i_0\beta_1, i_1i_0\beta_2\alpha_1\}$ 为基底的 Z_p 向量空间, $\alpha_1 = j_0\alpha i_0, \beta_1 = j_0j_1\beta i_1i_0, \beta_2 = j_0j_1\beta^2i_1i_0$.

证 由定理 4.3.3, 存在收敛到 $\pi_{t-s}(V(2))$ 的 Adams 谱序列

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_A^{s,t}(H^*(V(2)), Z_p) \Longrightarrow \pi_{t-s}(V(2))$$

由定理 6.2.1 的证明, 当 $t-s < p^2q-3$, $E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_A^{s,t}(H^*(V(2)), Z_p) \cong \mathrm{Ext}_P^{s,t}(Z_p, Z_p) \cong P(b) \otimes \{1, h_0, h_1, g_0, k_0, k_0h_0\}$. 更进一步, 利用推论 5.6.5 容易证明这些 E_2 项生成元在 Adams 谱序列的微分算子作用下的像群为零, 即 $d_rE_r^{s,t} \subset E_r^{s+r,t+r-1} = 0, r \geqslant 2, t-s < p^2q-3$. 因此, 谱序列重合, 从而 $\pi_{t-s}(V(2)) = E_2^{s,t} \cong P(b) \otimes \{1, h_0, h_1, g_0, k_0, k_0h_0\}(t-s < p^2q-3)$. 已经知道, 对应于 h_0, b, k_0 的 $\mathrm{Ext}_A^{*,*}(Z_p, Z_p)$ 中元素在 Adams 谱序列中分别收敛到 $\alpha_1 = j_0\alpha i_0 \in \pi_{q-1}S, \beta_1 = j_0j_1\beta i_1i_0 \in \pi_{pq-2}S, \beta_2 = j_0j_1\beta^2i_1i_0 \in \pi_{(2p+1)q-2}S$. 另外, 映射 $j_1\beta i_1i_0 : \Sigma^{pq-1}S \to V(0)$ 的上纤维是 $V(1\frac{1}{4})/V(0)$, 而由于在 $V(2)$ 中 $P^pQ_1 = Q_2$ 从而 $P^p \neq 0$, 因此 $j_1\beta i_1i_0 \in \pi_{pq-1}V(0)$ 在 Adams 谱序列中由 h_1 所表示. 这样, 定理的结论可由以下恰当序列

$$\pi_{n-pq-q}V(1) \xrightarrow{\beta_*} \pi_nV(1) \xrightarrow{(i_2)_*} \pi_nV(2) \xrightarrow{(j_2)_*}$$

得出, 其中 $\pi_{(p+2)q-2}V(2)$ 中的 g_0 被拉回到 $\pi_{(p+2)q-2}V(1)$, 这是由于 $(j_2)_*(g_0) \in \pi_{q-3}V(1) \cong \pi_{q-3}V(2) = 0$. 证毕.

6.3 Brown-Peterson 谱 BP

Brown-Peterson 谱 BP 在近世代数拓扑学中已日益显示出其重要的作用，是一个重要的谱. BP 是使 $H^*(BP) \cong P$ 的谱，其中 P 是 Steenrod 代数 A 的循环缩减幂 P^i $(i \geqslant 0)$ 生成的子代数. $P \cong A/(Q_0)$，其中 (Q_0) 表示由 Milnor 基元 Q_0 生成的双侧理想，P 的 A 模作用由商模 $A/(Q_0)$ 给出.

BP 起初是作为 A 模 $A/(Q_0)$ 的几何实现引进来的. 后来 Quillen[9] 用形式群律得出 p 局部的 Thom 谱 $MU_{(p)}$(与流形的协边分类有关) 的直加项就是 BP 对 p 局部化，从而显示出它的重要性.

本节介绍 BP 作为 $A/(Q_0)$ 的几何实现是如何引进来的，材料来源于 [4].

定理 6.3.1(文献 [4] 推论 1.2) 存在谱 BP 使 $H^*(BP) \cong A/(Q_0)$ 且 $\pi_*(BP)$ 为多项式代数 $Z[v_1, v_2, \cdots]$，其中 $|v_i| = 2(p^i - 1)$，而 Z 是整数加群.

设 $\mathcal{R}$ 为所有非负整数序列 $(r_1, r_2, \cdots)$ 的集合，其中除有限个外 $r_i = 0$. 若 $R = (r_1, r_2, \cdots)$，令 $\dim R = \sum 2r_i(p-1)$，$l(R) = \sum r_i$. 令 V_s 为由 $l(R) = s$ 的所有 $R \in \mathcal{R}$ 生成的分次自由 Abel 群.KV_s 为 E-M 谱使 $\pi_*(KV_s) = V_s$(KV_s 实际上是若干个 E-M 谱 KZ 的一点和). 令 $\alpha_R \in H^*(KV_s, Z)$ 为对应于 $R \in \mathcal{R}$ 的生成元. 对每个 $R \in \mathcal{R}$，P^R 为 $\operatorname{mod} p$ Steenrod 代数 A 的 Milnor 基元 $(p \geqslant 2)$. $c\colon A \to A$ 为典则反自同构. 定理 6.3.1 的证明归结为以下命题.

命题 6.3.2(文献 [4] 定理 1.1) 存在一序列谱 X_s $(s = 0, 1, 2, \cdots)$ 和元 $1_s \in H^0(X_s)$ 使

(1) $X_0 = KV_0$.

(2) $1_0 = \alpha_{(0,0,\cdots)} \operatorname{mod} p$.

(3) 有上纤维序列 $KV_s \to X_s \xrightarrow{\pi} X_{s-1}$ 导出整系数上同调恰当序列

$$\cdots \xrightarrow{\Pi^*} H^t(X_s, Z) \to H^t(KV_s, Z) \xrightarrow{\tau_s} H^{t+1}(X_{s-1}, Z) \xrightarrow{\Pi^*} \cdots$$

使超度 τ_s 有 $p^{s-1}\tau_s(\alpha_R) = \delta c(P^R) \cdot 1_{s-1}$，其中 δ 是相应于 $0 \to Z \to Z \to Z_p \to 0$ 的 Bockstein 运算.

(4) 由 $a \mapsto a \cdot 1_s$ 定义的同态 $A \to H^*(X_s)$ 当 $s > 0$ 时它的核为 (Q_0).

(5) 在维数小于 $2(s+1)(p-1)$ 时 $H^*(X_s) = A/(Q_0) \cdot 1_s$.

实际上，如果已证明命题 6.3.2，可令 $X = \varprojlim X_s$. 因为 KV_s 是 $2s(p-1)-1$ 连通的，则 $H^q(X) \cong H^q(X_s)$ 当 $q < 2(s+1)(p-1)$. 另外 $\pi_i(KV_s) = 0$ 当 i 奇，因此

$$\pi_i(X_s) = \sum_{t \leqslant s} \pi_i(KV_t)$$

从而有 $H^*(X)\cong\varinjlim H^*(X_s)\cong A/(Q_0)$, 而 $\pi_*(X)$ 是由 $\mathcal{R}$ 中所有序列 R 为生成元的自由 Abel 群. 因此 X 即为 BP, 定理 6.3.1 得证.

为了证明命题 6.3.2, 先证明几个引理.

引理 6.3.3 $(Q_0)=AQ_0+AQ_1+AQ_2+\cdots$

证 任意 $x\in(Q_0)$, 则 $x=aQ_0+Q_0a'$, 其中 $a,a'\in A$. 因为 $aQ_0\in AQ_0$, 只要证明 $Q_0a'\in AQ_0+AQ_1+AQ_2+\cdots$. 由第 2 章关于 A 的 Milnor 基的结果, a' 可用 Z_p 基 $\{P^RQ_0^{\epsilon_0}Q_1^{\epsilon_1}\cdots Q_k^{\epsilon_k}\}$ 唯一表示, 因此只要证明 $Q_0P^R\in AQ_0+AQ_1+AQ_2+\cdots$, 而这由定理 2.5.1 的公式

$$P^RQ_k-Q_kP^R=Q_{k+1}P^{R\backslash p^k\Delta_1}+Q_{k+2}P^{R\backslash p^k\Delta_2}+\cdots$$

就可得出. 证毕.

引理 6.3.4 (1) $Q_j=Q_0c(P^{\Delta_j})-c(P^{\Delta_j})Q_0$.

(2) $Q_0c(P^R)=\sum c(P^{R\backslash\Delta_j})Q_0c(P^{\Delta_j})+aQ_0$, 其中 $a\in A$.

证 由定理 2.5.1 的公式作用于典则反自同构 c 即得出

$$Q_0c(P^R)=c(P^R)Q_0+\sum_{j\geqslant1}c(P^{R\backslash\Delta_j})Q_j$$

取 $R=\Delta_j$ 便得出 (1). 将 (1) 和上面的公式合起来便得出 (2). 证毕.

注意到 V_s 是使 $l(R)=s$ 的所有 $R\in\mathcal{R}$ 所生成的分次自由 Abel 群. 令 $M_s=A/AQ_0\otimes V_s$, 具有次数 1 的 A 映照 $d_s\colon M_s\to M_{s-1}$ 定义为

$$d_s(1\otimes R)=\sum Q_j\otimes(R\setminus\Delta_j)=Q_0\sum c(P^{\Delta_j})\otimes(R\setminus\Delta_j)$$

而 $\epsilon\colon M_0\to A/(Q_0)$ 定义为 $\epsilon(1\otimes(0,0,\cdots))=1$.

引理 6.3.5 以下序列恰当

$$\cdots\to M_s\xrightarrow{d_s}M_{s-1}\to\cdots\xrightarrow{d_1}M_0\xrightarrow{\epsilon}A/(Q_0)\to0$$

证 令 B 为外代数 $E(Q_1,Q_2,\cdots)$, 则以下是 Z_p 的 B 自由分解:

$$\cdots\to B\otimes V_s\xrightarrow{d'_s}B\otimes V_{s-1}\to\cdots\to B\otimes V_0\xrightarrow{\epsilon'}Z_p\to0$$

其中 $d'_s(1\otimes R)=\sum Q_j\otimes(R\setminus\Delta_j)$, $\epsilon'(1\otimes(0,0,\ldots))=1$. 实际上, 由 $d'_{s-1}d'_s(1\otimes R)=d'_{s-1}(\sum\limits_j Q_j\otimes(R\setminus\Delta_j))=\sum\limits_k\sum\limits_j Q_kQ_j\otimes(R\setminus\Delta_j\Delta_k)=\sum\limits_{k\neq j}Q_kQ_j\otimes(R\setminus\Delta_j\setminus\Delta_k)$, 而 $R\backslash\Delta_j\backslash\Delta_k$ 对 j,k 对称, $Q_kQ_j=-Q_jQ_k$, 因此得出 $d'_{s-1}d'_s=0$. 若 $a=Q_{i_1}\cdots Q_{i_k}\in B$ 使 $d'_s(a\otimes R)=0$, 则

$$\sum_j Q_{i_1}\cdots Q_{i_k}Q_j\otimes(R\setminus\Delta_j)=0$$

因此若 $R=(r_1,r_2,\cdots)$, 则除 $r_{i_1},\cdots,r_{i_k}$ 外, 其他 $r_j=0$. 令 $b=Q_{i_2}\cdots Q_{i_k}$, 则

$$d'_{s+1}(b\otimes(R+\Delta_{i_1}))=\sum_j bQ_j\otimes(R+\Delta_{i_1}\setminus\Delta_j)=a\otimes R$$

这就得出 $\ker d'_s=\operatorname{im} d_{s+1}$, 以上是 Z_p 的 B 自由分解.

设 $E=E(Q_0,Q_1,Q_2,\cdots)$, 则

$$A\otimes_E Z_p=A/AQ_0+AQ_1+\cdots=A/(Q_0)$$

而由于 A 是 E 自由模 (见文献 [11]), 函子 $A\otimes_E -$ 保持恰当序列. 将以上 Z_p 的 B 自由分解作用于函子 $A\otimes_E -$, 注意到 $A\otimes_E B=A/AQ_0$, 因此引理得证. 证毕.

注 文献称若干个 $\Sigma^i A/AQ_0$ 与 A 自由模的直和为简单模(simple module). 因此引理 6.3.5 中的恰当序列也可称为 A 模 $A/(Q_0)$ 的简单模分解 (因为每个 M_s 是简单模). 关于简单模的性质可参见 [5][6].

以下若 u 表示整上同调类, 则 $\bar{u}$ 表示 u 的相应 $\bmod p$ 上同调类.

引理 6.3.6 若 $F\xrightarrow{f}E\xrightarrow{\Pi}B$ 为谱的上纤维序列, $\bar{\tau}\colon H^*(F)\to H^*(B)$ 为超度, $v\in H^*(F)$, $u\in H^*(B,Z)$ 使 $\bar{\tau}(v)=\bar{u}$, 则存在 $w\in H^*(E,Z)$ 使 $\Pi^*u=pw$, $f^*w=\delta v$, 其中 δ 是相应于 $0\to Z\xrightarrow{p}Z\xrightarrow{q}Z_p\to 0$ 的 Bockstein 运算.

证 考虑由上纤维序列导出的上同调恰当序列的可换图形:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & v\in H^t(F,Z_p) & \xrightarrow{\bar{\tau}} & H^{t+1}(B,Z_p)\\
 & & & & \downarrow\delta & & \downarrow\delta\\
H^{t+1}(B,Z) & \xrightarrow{\Pi^*} & H^{t+1}(E,Z) & \xrightarrow{f^*} & H^{t+1}(F,Z) & \xrightarrow{\tau} & H^{t+2}(B,Z)\\
\downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p & & \\
u\in H^{t+1}(B,Z) & \xrightarrow{\Pi^*} & H^{t+1}(E,Z) & \xrightarrow{f^*} & H^{t+1}(F,Z) & & \\
\downarrow q & & \downarrow q & & \downarrow q & & \\
\bar{u}\in H^{t+1}(B,Z_p) & \xrightarrow{\Pi^*} & H^{t+1}(E,Z_p) & \xrightarrow{f^*} & H^{t+1}(F,Z_p) & &
\end{array}$$

由 $\bar{\tau}v=\bar{u}=qu$, 则 $\tau\delta v=\delta\bar{\tau}v=\delta qu=0$, 因此 $\delta v\in\operatorname{im} f^*$. 以上图形导出可换图形

$$\begin{array}{ccc}
0\to\operatorname{cok}\Pi^* & \xrightarrow{f^*} & H^{t+1}(F,Z)\\
\downarrow p & & \downarrow p\\
0\to\operatorname{cok}\Pi^* & \xrightarrow{f^*} & H^{t+1}(F,Z)
\end{array}$$

因此有 $[w]\in\operatorname{cok}\Pi^*$ 使 $f^*[w]=\delta v$, 其中 $[w]$ 表示陪集 $w+\operatorname{im}\Pi^*$. 但

$$f^*p[w]=pf^*[w]=p\delta v=0$$

因此 $p[w]=0\in\operatorname{cok}\Pi^*$, 从而有 w 使 $pw=\Pi^*u$ 而 $f^*w=\delta v$. 证毕.

命题 6.3.2 的证明 注意到 $H^*(KV_s)\cong A/AQ_0\otimes V_s=M_s$, 下面用归纳法构造一序列谱 X_s $(s=0,1,2,\cdots)$ 和元 $1_s\in H^0(X_s)$, $k_R^s\in H^*(X_s,Z)$ $(R\in\mathcal{R},\ l(R)>s)$ 以及同态 $\bar{\tau}_{s+1}\colon M_{s+1}\to H^*(X_s)$ 满足

(6.3.7) 对 $s>0$, 有上纤维序列 $KV_s\to X_s\xrightarrow{\pi_s}X_{s-1}$ 使得 $\pi_s^*1_{s-1}=1_s$, $\tau_s(\alpha_R)=k_R^{s-1}$, 其中 $\tau_s\colon H^*(KV_s,Z)\to H^*(X_{s-1},Z)$ 为超度, 而 $\alpha_R\in H^*(KV_s,Z)$ 是相应于 $R\in\mathcal{R}$, $l(R)=s$ 的生成元.

(6.3.8) $\bar\tau_{s+1}(1\otimes R)=\bar k_R^s$.

(6.3.9) 若 $s>0$, $a\in A$, 则 $a\cdot 1_s=0$ 当且仅当 $a\in(Q_0)$ 且 $\operatorname{cok}\bar\tau_{s+1}=A/(Q_0)\cdot 1_s$.

(6.3.10) 有恰当序列

$$M_{s+2}\xrightarrow{d_{s+2}}M_{s+1}\xrightarrow{\bar\tau_{s+1}}H^*(X_s)$$

(6.3.11) $p^sk_R^s=\delta c(P^R)\cdot 1_s$, 对 $l(R)>s$.

(6.3.12) 当 $l(R)>s$, $\bar k_R^s=\sum c(P^U)\bar k_{R-U}^s$, 其中和式取遍 U 使 $R-U$ 有定义且 $l(R-U)=s+1$.

当 $s=0$, 取 $X_0=KV_0$, $1_0=1\otimes(0,0,\cdots)$, $k_R^0=\delta c(P^R)\cdot 1_0$, 而 $\bar\tau_1=d_1$. 由引理 6.3.5 中 d_1 的定义, (6.3.8) 和 (6.3.9) 成立.(6.3.10) 和 (6.3.11) 是直接的, 而 (6.3.12) 由引理 6.3.4 得出.

设已有 $X_{s-1},1_{s-1},\bar k_R^{s-1}$ 和 $\bar\tau_s$ 满足 (6.3.7)~(6.3.12), 存在映射 $g_s\colon X_{s-1}\to\Sigma KV_s$ 使 $\bar g_s^*=\bar\tau_s\colon H^*(KV_s)\to H^*(X_{s-1})$, 令

$$KV_s\xrightarrow{f_s}X_s\xrightarrow{\pi_s}X_{s-1}\xrightarrow{g_s}\Sigma KV_s$$

为上纤维序列, 则得出 X_s. 令 $1_s=\pi_s^*1_{s-1}$. 若 $l(R)>s$, 由 (6.3.8) 和 (6.3.12),

$$\bar\tau_s\Big(\sum_{l(R-U)=s}c(P^U)\otimes(R-U)\Big)=\sum_{l(R-U)=s}c(P^U)\bar k_{R-U}^{s-1}=\bar k_R^{s-1}$$

因此由引理 6.3.6, 存在元 $k_R^s\in H^*(X_s,Z)$ 使

$$\pi_s^*k_R^{s-1}=pk_R^s$$
$$f_s^*k_R^s=\delta\sum_{l(R-U)=s}c(P^U)\otimes(R-U)$$

设 $\bar\tau_{s+1}$ 用 (6.3.8) 定义, 则

$$\begin{aligned}p^sk_R^s&=\pi_s^*(p^{s-1}k_R^{s-1})\\&=\pi_s^*(\delta c(P^R)\cdot 1_{s-1})\\&=\delta c(P^R)\cdot 1_s\end{aligned}$$

(6.3.11) 成立. 考虑以下图形

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & M_{s+2} & \xrightarrow{d_{s+2}} & M_{s+1} & & \\ & & & & \bar\tau_{s+1}\downarrow & & \searrow d_{s+1} & & \\ M_s & \xrightarrow{\bar\tau_s} & H^*(X_{s-1}) & \xrightarrow{\pi_s^*} & H^*(X_s) & \xrightarrow{f_s^*} & M_s & \xrightarrow{\bar\tau_s} & H^*(X_{s-1})\end{array}$$

上横行由 $s-1$ 情况的 (6.3.10) 是恰当的. 下横行是上纤维序列导出的上同调恰当序列. 因为当 $l(R)=s+1$,

$$\begin{aligned}&f_s^*\bar{\tau}_{s+1}(1\otimes R)=f_s^*\bar{k}_R^s\\&=\delta\sum_{l(R-U)=s}c(P^U)\otimes(R-U)=Q_0\sum c(P^{\Delta_j})\otimes(R\setminus\Delta_j)\\&(\text{因为只能}U=\Delta_j\text{而}\delta c(P^{\Delta_j})=Q_0c(P^{\Delta_j}))\\&=d_{s+1}(1\otimes R)\end{aligned}$$

因此以上图形中的三角形可换, 即 $f_s^*\bar{\tau}_{s+1}=d_{s+1}$. 由 $s-1$ 情况的 (6.3.9), $\operatorname{cok}\bar{\tau}_s=A/(Q_0)\cdot 1_{s-1}$, 而 $\operatorname{im}\pi_s^*\cong\operatorname{cok}\bar{\tau}_s$, 从而有 $\ker f_s^*=A/(Q_0)\cdot 1_s$.

今证明 (6.3.12). 因为

$$\begin{aligned}&f_s^*\sum_{l(R-U)=s+1}c(P^U)\bar{k}_{R-U}^s\\&=\sum_{l(R-U)=s+1}c(P^U)Q_0c(P^{\Delta_j})\otimes(R-U-\Delta_j)\\&=\sum_{l(V)=s}c(P^V)\otimes(R-V)=f_s^*\bar{k}_R^s\end{aligned}$$

(第二个等式由引理 6.3.4), 而 $\ker f_s^*$ 只含偶次数元素, $\bar{k}_R^s$ 具有奇次数, 因此

$$\bar{k}_R^s=\sum_{l(R-U)=s+1}c(P^U)\otimes\bar{k}_{R-U}^s$$

(6.3.12) 成立. 最后推出 (6.3.9), (6.3.10). 由以上图形, $\ker\bar{\tau}_{s+1}\subset\ker d_{s+1}=\operatorname{im}d_{s+2}$, 只要证 $\bar{\tau}_{s+1}d_{s+2}=0$, 但是, 如果 $l(R)=s+2$,

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{s+1}d_{s+2}(1\otimes R)&=\bar{\tau}_{s+1}\sum_j Q_0c(P^{\Delta_j})\otimes(R\setminus\Delta_j)\\&=Q_0\sum c(P^{\Delta_j})\bar{k}_{R\setminus\Delta_j}^s\\&=Q_0\bar{k}_R^s=0\end{aligned}$$

另外, 若 $a\in A$, 则 $a\cdot 1_s=0$ 当且仅当 $\pi_s^*(a\cdot 1_{s-1})=0\in A/(Q_0)\cdot 1_{s-1}$ 当且仅当 $a\in(Q_0)$. 完成了归纳法. 证毕.

下面证明主要定理 6.3.1 的重要推论.

推论 6.3.13　若 Y 是谱使 $H^*(Y,Z)$ 没有 p 挠系数而 $H^*(Y)$ 是以 $\{y_r\in H^{n_r}(Y)\}$ 为基的自由 $A/(Q_0)$ 模, 则存在映射 $f\colon Y\to\Pi\Sigma^{n_i}BP$ 使 $f^*\colon H^*(\Pi\Sigma^{n_i}BP)\cong H^*(Y)$. 特别地 $\Pi_*(Y)\cong V\otimes U \bmod C_p$, V 和 U 是由 $\mathcal{R}$ 和 $\{y_i\}$ 生成的分次自由 Abel 群.

证　设 $1\in H^0(BP)$ 为 A 生成元. 令 $1^n\in H^n(\Sigma^nBP)$ 和 $1_s^n\in H^n(\Sigma^nX_s)$ 为 1 和 1_s 的 n 次双角锥, 则存在映射 $g_i\colon Y\to\Sigma^{n_i}X_0$ 使 $g_i^*(1_0^{n_i})=y_i$. 因为 $p^s\tau(\alpha_R)=p\delta c(P^R)1_{s-1}=0$, 因此在 BP 的构造中 (见命题 6.3.2) 所有 k 不变量 k_R^s

的阶数为 p 的幂, 因此 g_i 可提升到 $f_i\colon Y \to \Sigma^{n_i}BP$, 令 $f = \Pi f_i\colon Y \to \Pi\Sigma^{n_i}BP$, 则 f 为所求. 证毕.

注　当 $p > 2$, Thom 谱 MU, MSO 满足推论 6.3.13 中 Y 的条件, 因此可得出 MU 的 p 局部化等价于若干个 BP p 局部化的一点和, 而且 $\pi_*(MU) \cong U \otimes V$ 如 6.3.13 所述.

6.4　M 模谱和 M 模谱之间映射的导数算子

由 (6.2.7), 谱 $V(0)$ 是拓扑度为 p 的映射 $p : S \to S$ 的上纤维. 这就是已知的 Moore 谱, 我们记为 M, 它由以下上纤维序列

(6.4.1)　$$S \xrightarrow{p} S \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} \Sigma S$$

给出. 在本节, 我们将讨论 Moore 谱 M 的环谱性质以及一类 M 模谱的性质. 首先叙述有关谱映射 (同伦类) 的压挤 (smash) 乘积的一些关系式, 它可由 3.4 节得出 (见 [11] 定理 1.1).

定理 6.4.2　设 X, X', Y, Y', Z, Z' 为谱, 而 $f \in [\Sigma^* X, Y], f' \in [\Sigma^* X', Y'], g \in [\Sigma^* Y, Z], g' \in [\Sigma^* Y', Z']$ 为谱映射, $T_{X,Y} \in [X \wedge Y, Y \wedge X]$ 是交换映射, 则谱映射的压挤乘积 $\wedge$ 是双线性的, 且以下公式成立:

(1) $(gf) \wedge (g'f') = (-1)^{\deg f \cdot \deg g'}(g \wedge g')(f \wedge f')$;

(2) $T_{Y,Y'}(f \wedge f') = (-1)^{\deg f \cdot \deg f'}(f' \wedge f)T_{X,X'}$;

(3) $(f \wedge f') \wedge f'' = f \wedge (f' \wedge f'')$;

(4) $(f \wedge 1_{Y'})(1_X \wedge f') = (-1)^{\deg f \cdot \deg f'}(1_Y \wedge f')(f \wedge 1_{X'})$;

(5) $1_S \wedge f = f = f \wedge 1_S, \quad T_{S,X} = T_{X,S} = 1_X$.

定理 6.4.3　Moore 谱 M 是交换环谱, 存在乘法 $m_M : M \wedge M \to M$ 和映射 $\overline{m}_M : \Sigma M \to M \wedge M$ 使得

$$\begin{aligned} &m_M(i \wedge 1_M) = 1_M, \quad (j \wedge 1_M)\overline{m}_M = 1_M, \\ &m_M\overline{m}_M = 0, \quad (i \wedge 1_M)m_M + \overline{m}_M(j \wedge 1_M) = 1_{M \wedge M}, \\ &m_M T = m_M, \qquad\quad T\overline{m}_M = -\overline{m}_M, \\ &m_M(1_M \wedge i) = 1_M, \qquad (1_M \wedge j)\overline{m}_M = -1_M \end{aligned}$$

其中 $T = T_{M,M} : M \wedge M \to M \wedge M$ 是交换映射.

证　已知 $\pi_1 S = 0, \pi_0 S \cong Z_{(p)}\{1_S\}$, 而且 $p \cdot 1_S \neq 0 \in \pi_0 S$, 因此由 (6.4.1) 导出的恰当序列可得 $\pi_1 M = 0$. 对于 $p \wedge 1_M \in [M, M]$, 由定理 6.4.2(4), (5) 和 (6.4.1), $(p \wedge 1_M)i = i \cdot p = 0$. 因此由 (6.4.1), $(p \wedge 1_M) \in j^* \pi_1 M = 0$. 由 (6.4.1) 和命题 3.4.3, 我们得到以下上纤维序列

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{p\wedge 1_M=0} & S\wedge M & \xrightarrow{i\wedge 1_M} & M\wedge M & \xrightarrow{j\wedge 1_M} & \Sigma S\wedge M \\ & \| & & \| & & \| \\ & M & \xrightarrow{i\wedge 1_M} & M\wedge M & \xrightarrow{j\wedge 1_M} & \Sigma M \end{array}$$

由于左边的映射 $p\wedge 1_M=0$, 因此这个上纤维序列分裂, 即中间的谱 $M\wedge M$ 同伦等价于两边的谱的一点和: $M\wedge M=M\vee\Sigma M$. 因此存在 $m_M\in[M\wedge M,M],\overline{m}_M\in[\Sigma M,M\wedge M]$ 使得

$$m_M(i\wedge 1_M)=1_M,\quad (j\wedge 1_M)\overline{m}_M,$$
$$m_M\overline{m}_M=0,(i\wedge 1_M)m_M+\overline{m}_M(j\wedge 1_M)=1_{M\wedge M}$$

另一方面, 类似于上面的推演, 由 $\pi_rS=0(r=1,2),\pi_0S\cong Z_{(p)}\{1_S\}$ 可得 $\pi_rM=0(r=1,2)$ 从而有 $[\Sigma^1M,M]=0,[M,M]\cong Z_p\{1_M\}$. 因此 $m_MT\overline{m}_M\in[\Sigma M,M]=0$, $m_MT(i\wedge 1_M)=x\cdot 1_M,(j\wedge 1_M)T\overline{m}_M=y\cdot 1_M$, 某个 $x,y\in Z_p$. 再利用定理 6.4.2 的公式,

$$\begin{aligned} x\cdot i&=m_MT(i\wedge 1_M)(1_S\wedge i)\\ &=m_M(i\wedge i)T_{S,S}=m_M(i\wedge 1_M)(1_S\wedge i)=i\end{aligned}$$

类似地有 $y\cdot j=(j\wedge j)T\overline{m}_M=-(j\wedge j)\overline{m}_M=-j$, 从而得出 $x=1,y=-1$. 因此 $m_M=m_MT(i\wedge 1_M)m_M=m_MT$, $T\overline{m}_M=-\overline{m}_M(j\wedge 1_M)T\overline{m}_M=-\overline{m}_M$. 更进一步, $m_M(1_M\wedge i)=m_M(1_M\wedge i)T_{M,S}=m_MT(i\wedge 1_M)=m_M(i\wedge 1_M)=1_M$ 以及 $(1_M\wedge j)\overline{m}_M=T_{M,S}(1_M\wedge j)\overline{m}_M=(j\wedge 1_M)T\overline{m}_M=-(j\wedge 1_M)\overline{m}_M=-1_M$. 证毕.

定义 6.4.4 谱 X 叫作 M 模谱, 如果 $p\wedge 1_X=0\in[X,X]$. 类似于定理 6.4.3 的证明, 这时我们有一个分裂的上纤维序列 $X\xrightarrow{i\wedge 1_X}M\wedge X\xrightarrow{j\wedge 1_X}\Sigma X$, 从而存在称之为 M 模作用的映射 $m_X\in[M\wedge X,X],\overline{m}_X\in[\Sigma X,M\wedge X]$ 使得

$$m_X(i\wedge 1_X)=1_X,\quad (j\wedge 1_X)\overline{m}_X=1_X,$$
$$m_X\overline{m}_X=0,\qquad (i\wedge 1_X)m_X+\overline{m}_X(j\wedge 1_X)=1_{M\wedge X}$$

对于 M 模谱之间的映射 $f\in[\Sigma^*X,Y],f$ 叫作 M 模谱映射, 如果有 $fm_X=m_Y(1_M\wedge f),(-1)^{\deg f}\overline{m}_Yf=(1_M\wedge f)\overline{m}_X$. M 模谱 X 称为可结合的, 如果有 $m_X(1_M\wedge m_X)=m_X(m_M\wedge 1_X),(1_M\wedge\overline{m}_X)\overline{m}_X=-(\overline{m}_M\wedge 1_X)\overline{m}_X$.

命题 6.4.5 设 M 模谱 X 是有限谱. 若 $[\Sigma X,X]=0$, 则 X 的 M 模作用 $m_X,\overline{m}_X$ 是唯一的. 更进一步, 若对 $r=1,2$ 有 $[\Sigma^rX,X]=0$, 则 X 是可结合的.

证 从上纤维序列 $X\xrightarrow{i\wedge 1_X}M\wedge X\xrightarrow{j\wedge 1_X}\Sigma X$ 导出的恰当序列

$$0=[\Sigma^1X,X]\xrightarrow{(j\wedge 1_X)^*}[M\wedge X,X]\xrightarrow{(i\wedge 1_X)^*}[X,X]$$

可知 $(i\wedge 1_X)^*$ 单射. 若有两个模作用 m_X,m'_X, 则 $(i\wedge 1_X)^*(m_X-m'_X)=m_X(i\wedge 1_X)-m'_X(i\wedge 1_X)=1_X-1_X=0$, 从而有 $m_X=m'_X$. $\overline{m}_X$ 的唯一性可类似得证.

为了证明可结合性, 首先得出 $1_M\wedge i=(1_M\wedge i)T_{S,M}=T_{M,M}(i\wedge 1_M)=(i\wedge 1_M)m_MT_{M,M}(i\wedge 1_M)+\overline{m}_M(j\wedge 1_M)T_{M,M}(i\wedge 1_M)=i\wedge 1_M+\overline{m}_Mij$, 类似可得 $1_M\wedge j=-(j\wedge 1_M)+ijm_M$. 因此有

$$
\begin{aligned}
&m_X(1_M \wedge m_X)(i \wedge i \wedge 1_X)\\
&= m_X(1_M \wedge m_X)(i \wedge 1_M \wedge 1_X)(i \wedge 1_X)\\
&= m_X(1_M \wedge m_X)(1_M \wedge i \wedge 1_X - \overline{m}_M ij \wedge 1_X)(i \wedge 1_X)\\
&= m_X(i \wedge 1_X) = 1_X
\end{aligned}
$$

另一方面, $m_X(m_M \wedge 1_X)(i \wedge i \wedge 1_X) = m_X(m_M(i \wedge 1_M) \wedge 1_X)(i \wedge 1_X) = 1_X$, 因此 $m_X(1_M \wedge m_X) - m_X(m_M \wedge 1_X)$ 属于 $\ker(i \wedge i \wedge 1_X)^* = \ker(i \wedge 1_X)^*(i \wedge 1_M \wedge 1_X)^*$. 但是, 上面已知 $\ker(i \wedge 1_X)^* = 0$, 而由恰当性 $\ker(i \wedge 1_M \wedge 1_X)^* = (j \wedge 1_M \wedge 1_X)^*[\Sigma^1 M \wedge X, X] = 0$, 这是由于 $[\Sigma^1 M \wedge X, X] \cong [\Sigma^2 X, X] \oplus [\Sigma^1 X, X] = 0$. 因此 $m_X(1_M \wedge m_X) = m_X(m_M \wedge 1_X)$ 得证. 对于可结合性的第二个等式 $(1_M \wedge \overline{m}_X)\overline{m}_X = -(\overline{m}_M \wedge 1_X)\overline{m}_X$, 可类似地推导出等式 $(j \wedge j \wedge 1_X)(\overline{m}_M \wedge 1_X)\overline{m}_X = 1_X = -(j \wedge j \wedge 1_X)(1_M \wedge \overline{m}_X)\overline{m}_X$ 之后得出. 证毕.

定义 6.4.6 设 X 为 M 模谱, X' 为任意谱, 则 $X \wedge X', X' \wedge X$ 也是 M 模谱, 它的 M 模作用由 X 的 M 模作用 $m_X, \overline{m}_X$ 分别以如下方式给出

$$
\begin{aligned}
&\{X \wedge X', m_{X \wedge X'} = m_X \wedge 1_{X'}, \overline{m}_{X \wedge X'} = \overline{m}_X \wedge 1_{X'}\}\\
&\{X' \wedge X, m_{X' \wedge X} = (1_{X'} \wedge m_X)(T_{M,X'} \wedge 1_X),\\
&\qquad \overline{m}_{X' \wedge X} = (T_{X',M} \wedge 1_X)(1_{X'} \wedge \overline{m}_X)\}
\end{aligned}
$$

定义 6.4.7 设 X, Y 为 M 模谱, 定义一个同态

$$d : [\Sigma^* X, Y] \to [\Sigma^{*+1} X, Y]$$

为 $d(f) = m_Y(1_M \wedge f)\overline{m}_X, f \in [\Sigma^* X, Y]$. 我们称 d 为 M 模谱之间映射的导数算子, 它有如下性质.

定理 6.4.8 (文献 [11] 定理 2.2) (1) d 的作用如导数: $d(gf) = gd(f) + (-1)^{\deg f} d(g)f$, 其中 $f \in [\Sigma^s X, Y], g \in [\Sigma^t Y, Z]$.

(2) 若 $h \in [\Sigma^* W, U]$ 为任意映射, f 如上, 则

$$d(h \wedge f) = h \wedge d(f), \qquad d(f \wedge h) = (-1)^{\deg h} d(f) \wedge h$$

(3) $d(f) = 0$ 当且仅当 f 为 M 模谱映射.

(4) 若 X, Y 都是可结合的 M 模谱, 则

$$d^2 = 0 : [\Sigma^* X, Y] \to [\Sigma^{*+2} X, Y]$$

证 (1) 由导数算子 d 的定义,

$$
\begin{aligned}
&d(gf) = m_Z(1_M \wedge gf)\overline{m}_X = m_Z(1_M \wedge g)(1_M \wedge f)\overline{m}_X\\
&= m_Z(1_M \wedge g)[(i \wedge 1_Y)m_Y + \overline{m}_Y(j \wedge 1_Y)](1_M \wedge f)\overline{m}_X\\
&= m_Z(i \wedge 1_Z)(1_S \wedge g)d(f) + (-1)^{\deg f} d(g)(1_S \wedge f)(j \wedge 1_X)\overline{m}_X\\
&= gd(f) + (-1)^{\deg f} d(g)f
\end{aligned}
$$

(2) $d(h\wedge f)=m_{U\wedge Y}(1_M\wedge h\wedge f)\overline{m}_{W\wedge X}$

$=(1_U\wedge m_Y)(T_{M,U}\wedge 1_Y)(1_M\wedge h\wedge f)(T_{W,M}\wedge 1_X)(1_W\wedge \overline{m}_X)$

$=(1_U\wedge m_Y)(h\wedge 1_M\wedge f)(1_W\wedge \overline{m}_X)=h\wedge d(f)$.

另外一个公式可类似得出.

(3) 对于 M 模谱映射 $f\in[\Sigma^*X,Y]$, $d(f)=m_Y(1_M\wedge f)\overline{m}_X=(-1)^{\deg f}m_Y\overline{m}_Y\cdot f=0$. 反之, 若 $d(f)=0$, 则

$$\begin{aligned}m_Y(1_M\wedge f)&=m_Y(1_M\wedge f)[\overline{m}_X(j\wedge 1_X)+(i\wedge 1_X)m_X]\\&=d(f)(j\wedge 1_X)+m_Y(i\wedge 1_Y)(1_S\wedge f)m_X=fm_X\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}(1_M\wedge f)\overline{m}_X&=[\overline{m}_Y(j\wedge 1_Y)+(i\wedge 1_Y)m_Y](1_M\wedge f)\overline{m}_X\\&=(-1)^{\deg f}\overline{m}_Yf+(i\wedge 1_Y)d(f)=(-1)^{\deg f}\overline{m}_Yf\end{aligned}$$

(4) 由 X,Y 的可结合性, 我们有

$$\begin{aligned}dd(f)&=m_Y(1_M\wedge m_Y)(1_M\wedge 1_M\wedge f)(1_M\wedge \overline{m}_X)\overline{m}_X\\&=-m_Y(m_M\wedge 1_Y)(1_M\wedge 1_M\wedge f)(\overline{m}_M\wedge 1_X)\overline{m}_X\\&=-m_Y(m_M\overline{m}_M\wedge f)\overline{m}_X=0\end{aligned}$$

证毕.

定理 6.4.9　设 M 模谱 X,Y 都是连通谱, W 是 $f\in[\Sigma^kX,Y]$ 的上纤维, 由上纤维序列 $\Sigma^kX\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{w}W\xrightarrow{u}\Sigma^{k+1}X$ 给出. 若 $d(f)=0$, 则 W 是 M 模谱.

证　由定理 6.4.8(3), 若 $d(f)=0$, 则 $f:\Sigma^kX\to Y$ 是 M 模谱映射, 即 $m_Y(1_M\wedge f)=fm_X$. 因此有以下上纤维序列的同伦可换图形

$$\begin{array}{ccccccc}\Sigma^kX&\xrightarrow{f}&Y&\xrightarrow{w}&W&\xrightarrow{u}&\Sigma^{k+1}X\\ \downarrow{\scriptstyle i\wedge 1_X}&&\downarrow{\scriptstyle i\wedge 1_Y}&&\downarrow{\scriptstyle i\wedge 1_W}&&\downarrow{\scriptstyle i\wedge 1_X}\\ \Sigma^kM\wedge X&\xrightarrow{1_M\wedge f}&M\wedge Y&\xrightarrow{1_M\wedge w}&M\wedge W&\xrightarrow{1_M\wedge u}&\Sigma^{k+1}M\wedge X\\ \downarrow{\scriptstyle m_X}&&\downarrow{\scriptstyle m_Y}&&\downarrow{\scriptstyle m_W}&&\downarrow{\scriptstyle m_X}\\ \Sigma^kX&\xrightarrow{f}&Y&\xrightarrow{w}&W&\xrightarrow{u}&\Sigma^{k+1}X\end{array}$$

首先, 由上面已知左下方块同伦可换, 利用引理 3.2.6, 存在 m_W 使下面四个方块都同伦可换, 而上面四个方块显然同伦可换. 这个同伦可换图形导出同伦群的恰当序列的可换图. 再由于 $m_X(i\wedge 1_X)=1_X, m_Y(i\wedge 1_Y)=1_Y$, 利用五项引理可得出 $m_W(i\wedge 1_W)$ 导出的同态 $(m_W(i\wedge 1_W))_*:\pi_r(W)\to\pi_r(W)$ 对所有整数 r 为同构, 即 $m_W(i\wedge 1_W):W\to W$ 是弱同伦等价. 利用 Whitehead 定理 3.1.23 可知 $m_W(i\wedge 1_W)$ 是同伦等价, 它有同伦逆 γ, 从而有 $p\wedge 1_W=\gamma\cdot m_W(i\wedge 1_W)\cdot(p\wedge 1_W)=0\in[W,W]$, 证明了 W 是 M 模谱. 证毕.

定理 6.4.10　设 $V_r(1)$ 为 $\alpha^r:\Sigma^{rq}M\to M$ 的上纤维, 由上纤维序列 $\Sigma^{rq}M\xrightarrow{\alpha^r}M\xrightarrow{i'_r}V_r(1)\xrightarrow{j'_r}\Sigma^{rq+1}M$ 给出, 则 $V_r(1)$ 是 M 模谱, 且 $d(\alpha)=0, d(i'_r)=0, d(j'_r)=$

$0, d(ij) = -1_M$.

证 已知 $\pi_k S = 0(pq-2 > k \neq 0, rq-1)$ 而 $\pi_0 S \cong Z_{(p)}\{1_S\}, \pi_{rq-1}S \cong Z_{(p)}\{\alpha_r = j\alpha^r i\}$, 因此 $[M, M] \cong Z_p\{1_M\}$, $[\Sigma^{rq}M, M] \cong Z_p\{\alpha^r\}, [\Sigma^{rq+t}M, M] = 0, 0 < t < q, rq+t < pq-3$, 从而有 $d(\alpha) \in [\Sigma^{q+1}M, M] = 0$. 再根据定理 6.4.8(1), 可得 $d(\alpha^r) = 0$. 从而由定理 6.4.9 得出 $V_r(1)$ 是 M 模谱. 另外, $j_r' d(i_r'), d(j_r')i_r' \in [\Sigma^{-q}M, M] = 0$, 因此 $d(i_r') \in (i_r')_*[\Sigma M, M] = 0, d(j_r') \in (j_r')^*[\Sigma M, M] = 0$. 最后, 由定理 6.4.3, $d(ij) = m_M(1_M \wedge ij)\overline{m}_M = -1_M$. 证毕.

定义 6.4.11 令 X 为具有 M 模作用 $m_X, \overline{m}_X$ 的 M 模谱, 定义一个与导数算子类似的同态 $\lambda_X : [\Sigma^t M, M] \to [\Sigma^{t+1}X, X]$ 为 $\lambda_X(f) = m_X(f \wedge 1_X)\overline{m}_X, f \in [\Sigma^t M, M]$. 记 $\delta = ij \in [\Sigma^{-1}M, M]$.

定理 6.4.12 对于 $f \in [\Sigma^t M, M]$, $\lambda_M(f) = -d(f)$.

证 $\lambda_M(f) = m_M(f \wedge 1_M)\overline{m}_M = -m_M T(f \wedge 1_M)T\overline{m}_M = -m_M(1_M \wedge f)\overline{m}_M = -d(f)$. 证毕.

定理 6.4.13 (文献 [11] 定理 2.4) (1) $\lambda_X(ff') = \lambda_X(f)\lambda_X(\delta f') + \lambda_X(f\delta)\lambda_X(f')$.

(2) $\lambda_{X' \wedge X}(f) = 1_{X'} \wedge \lambda_X(f)$.

(3) $\lambda_Y(f)g + \lambda_Y(f\delta)d(g) = (-1)^{(t+1)k}g\lambda_X(f) + (-1)^{tk}d(g)\lambda_X(\delta f)$, 其中 $f \in [\Sigma^t M, M], g \in [\Sigma^k X, Y]$.

(4) $\lambda_X(\delta f \delta) = jfi \wedge 1_X, \lambda_X(ij) = 1_X, \lambda_X(1_M) = 0$.

(5) 若 X 是可结合的, 则 $d(\lambda_X(f)) = \lambda_X(d(f)) = 0$.

证 (1)
$$
\begin{aligned}
&\lambda_X(ff') \\
&= m_X(f \wedge 1_X)[(i \wedge 1_X)m_X + \overline{m}_X(j \wedge 1_X)](f' \wedge 1_X)\overline{m}_X \\
&= m_X(fi \wedge 1_X)(j \wedge 1_X)\overline{m}_X\lambda_X(f') + \lambda_X(f)m_X(i \wedge 1_X)(jf' \wedge 1_X)\overline{m}_X \\
&= \lambda_X((f\delta)\lambda f') + \lambda(f)\lambda_X(\delta f').
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
&\lambda_{X' \wedge X}(f) \\
&= (1_{X'} \wedge m_X)(T_{M,X'} \wedge 1_X)(f \wedge 1_{X'} \wedge 1_X) \cdot (T_{X',M} \wedge 1_X)(1_{X'} \wedge \overline{m}_X) \\
&= (1_{X'} \wedge m_X)(1_{X'} \wedge f \wedge 1_X)(1_{X'} \wedge \overline{m}_X) = 1_{X'} \wedge \lambda_X(f).
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
&\lambda_Y(f)g + \lambda_Y(f\delta)d(g) \\
&= m_Y(f \wedge 1_Y)\overline{m}_Y g + m_Y(fij \wedge 1_Y)\overline{m}_Y m_Y(1_M \wedge g)\overline{m}_X \\
&= m_Y(f \wedge 1_Y)\overline{m}_Y(1_S \wedge g)(j \wedge 1_X)\overline{m}_X + m_Y(f \wedge 1_Y)(i \wedge 1_Y)m_Y(1_M \wedge g)\overline{m}_X \\
&= m_Y(f \wedge 1_Y)[\overline{m}_Y(j \wedge 1_Y) + (i \wedge 1_Y)m_Y](1_M \wedge g)\overline{m}_X \\
&= m_Y(f \wedge 1_Y)(1_M \wedge g)\overline{m}_X = (-1)^{tk}m_Y(1_M \wedge g)(f \wedge 1_X)\overline{m}_X \\
&= (-1)^{tk}m_Y(1_M \wedge g)[(i \wedge 1_X)m_X + \overline{m}_X(j \wedge 1_X)](f \wedge 1_X)\overline{m}_X
\end{aligned}
$$

$$= (-1)^{(t+1)k} m_Y(i\wedge 1_Y)(1_S\wedge g)\lambda_X(f) + (-1)^{tk} d(g) m_X(i\wedge 1_X)(jf\wedge 1_X)\overline{m}_X$$
$$= (-1)^{(t+1)k} g\lambda_X(f) + (-1)^{tk} d(g)\lambda_X(\delta f).$$

(4) $\lambda_X(\delta f\delta) = \lambda_X(ijfij)$

$$= m_X(i\wedge 1_X)(jfi\wedge 1_X)(j\wedge 1_X)\overline{m}_X = jfi\wedge 1_X.$$
$$\lambda_X(\delta) = m_X(i\wedge 1_X)(j\wedge 1_X)\overline{m}_X = 1_X$$
$$\lambda_X(1_M) = m_X(1_M\wedge 1_X)\overline{m}_X = m_X\overline{m}_X = 0.$$

(5) 由结合性和定理 6.4.12, 我们有

$$\begin{aligned} d(\lambda_X(f)) &= m_X(1_M\wedge m_X)(1_M\wedge f\wedge 1_X)(1_M\wedge \overline{m}_X)\overline{m}_X \\ &= -m_X(m_M\wedge 1_X)(1_M\wedge f\wedge 1_X)(\overline{m}_M\wedge 1_X)\overline{m}_X \\ &= -\lambda_X(d(f)) = \lambda_X(\lambda_M(f)) \\ &= m_X(m_M\wedge 1_X)(f\wedge 1_M\wedge 1_X)(\overline{m}_M\wedge 1_X)\overline{m}_X \\ &= -m_X(1_M\wedge m_X)(f\wedge 1_M\wedge 1_X)(1_M\wedge \overline{m}_X)\overline{m}_X \\ &= -m_X(f\wedge m_X\overline{m}_X)\overline{m}_X = 0. \end{aligned}$$ 证毕.

定理 6.4.14 设 V, V' 为任意谱, 则存在直和分解

$$\begin{aligned} [\Sigma^* V\wedge M, V'\wedge M] &= (1_{V'}\wedge\delta)(\ker d)\oplus(\ker d) \\ &= (\ker d)(1_V\wedge\delta)\oplus(\ker d) \end{aligned}$$

使 $\ker d = [\Sigma^* V\wedge M, V'\wedge M]\cap(\ker d)$. 特别地, 有直和分解

$$[\Sigma^* M, M] = \delta(\ker d)\oplus(\ker d) = (\ker d)\delta\oplus(\ker d)$$

使得 $\ker d = (\ker d)\cap[\Sigma^* M, M]$ 是 $[\Sigma^* M, M]$ 的交换子环, 其中 $\delta = ij\in[\Sigma^{-1}M, M]$.

证 因为 $[\Sigma^r M, M] = 0, r = 1, 2$, 由定理 6.4.5 可知 M 是可结合的, 有等式 $m_M(m_M\wedge 1_M) = m_M(1_M\wedge m_M), (\overline{m}_M\wedge 1_M)\overline{m}_M = -(1_M\wedge\overline{m}_M)\overline{m}_M$. 容易证明, $V'\wedge M$ 的 M 模作用 $(1_{V'}\wedge m_M)(T_{M,V'}\wedge 1_M), (T_{V',M}\wedge 1_M)(1_{V'}\wedge\overline{m}_M)$ 也满足可结合的相应等式. 因此由定理 6.4.8(4) 可得 $d^2 = 0 : [\Sigma^* V\wedge M, V'\wedge M]\to[\Sigma^{*+2}V\wedge M, V'\wedge M]$. 令 $\delta_L(f) = (1_{V'}\wedge\delta)f, f\in[\Sigma^* V\wedge M, V'\wedge M]$, 则我们有以下相互分裂的两个恰当序列:

$$[\Sigma^s V\wedge M, V'\wedge M]\xrightarrow{d}[\Sigma^{s+1}V\wedge M, V'\wedge M]\xrightarrow{d}[\Sigma^{s+2}V\wedge M, V'\wedge M]$$
$$[\Sigma^s V\wedge M, V'\wedge M]\xleftarrow{\delta_L}[\Sigma^{s+1}V\wedge M, V'\wedge M]\xleftarrow{\delta_L}[\Sigma^{s+2}V\wedge M, V'\wedge M]$$

这是因为定理 6.4.8 导出 $d((1_{V'}\wedge\delta)f) = \pm f + (1_{V'}\wedge\delta)d(f)$, 从而当 $d(f) = 0$ 有 $f = \pm d((1_{V'}\wedge\delta)f)$ 而当 $\delta_L(f) = 0$ 有 $f = \pm(1_{V'}\wedge\delta)d(f)$. 因此第一个直和分解得出, 而第二个直和分解是类似的. 若特别地, 取 $V = V' = S$, 则可得后面两个直和分解. 最后利用 $m_M T = m_M$ 证明 $(\ker d)\cap[\Sigma^* M, M]$ 是交换子环. 对于 $f, g\in(\ker d)\cap[\Sigma^* M, M]$, 由定理 6.4.8(2), f, g 是 M 模谱映射, 即 $m_M(1_M\wedge f) = fm_M$,

因此 $m_M(1_M \wedge fi) = fm_M(1_M \wedge i) = f = m_M T(1_M \wedge fi) = m_M(fi \wedge 1_M)$ 从而 $g \cdot f = m_M(gi \wedge 1_M)m_M(1_M \wedge fi) = m_M(g \wedge 1_M)(1_M \wedge fi) = (-1)^{\deg f \cdot \deg g} m_M(1_M \wedge fi)g = (-1)^{\deg f \cdot \deg g} f \cdot g$. 证毕.

推论 6.4.15 设 X, V, V' 和 V'' 为任意谱而 $g: V \to V', g': V' \to V''$ 为映射. 若 $[V'' \wedge M, X \wedge M] \stackrel{(g' \wedge 1_M)^*}{\longrightarrow} [V' \wedge M, X \wedge M] \stackrel{(g \wedge 1_M)^*}{\longrightarrow} [V \wedge M, X \wedge M]$ 是一个恰当序列, 则

$$\ker d \cap [V'' \wedge M, X \wedge M] \stackrel{(g' \wedge 1_M)^*}{\longrightarrow} \ker d \cap [V' \wedge M, X \wedge M] \stackrel{(g \wedge 1_M)^*}{\longrightarrow} \ker d \cap [V \wedge M, X \wedge M]$$

也是恰当序列, 其中 d 为在相应的群上定义的导数算子. 这个结果的对偶形式也成立.

证 对 $f \in \ker d \cap [V' \wedge M, X \wedge M]$ 使得 $f \in \ker(g \wedge 1_M)^*$, 存在 $f' \in [V'' \wedge M, X \wedge M]$ 使得 $f'(g' \wedge 1_M) = f$. 由定理 6.4.14, $f' = f_1' + (1_X \wedge ij)f_2'$, 某个 $f_1' \in \ker d \cap [V' \wedge M, X \wedge M], f_2' \in \ker d \cap [\Sigma V' \wedge M, X \wedge M]$. 通过对等式 $f = f_1'(g' \wedge 1_M) + (1_X \wedge ij)f_2'(g' \wedge 1_M)$ 作用于 d 得出 $f_2'(g' \wedge 1_M) = 0$, 从而有 $f = f_1'(g' \wedge 1_M)$, 某个 $f_1' \in \ker d \cap [V' \wedge M, X \wedge M$, 结论得证. 证毕.

6.5 谱 $V_r(1)$ 的分裂环谱性质

在本节, 我们将深入讨论由谱 $V_r(1) \wedge V_r(1)$ 的分裂性导出的谱 $V_r(1)$ 的分裂环谱性质. 本节自始至终, 正整数 r 都固定, 我们将谱 $V_r(1)$ 简记为 K, 它由以下上纤维序列给出:

(6.5.0) $\qquad \Sigma^{rq} M \stackrel{\alpha^r}{\longrightarrow} M \stackrel{i'}{\longrightarrow} K \stackrel{j'}{\longrightarrow} \Sigma^{rq+1} M.$

定理 6.5.1 谱 K 是可结合的 M 模谱, 即存 M 模作用 $m_K: M \wedge K \to K, \overline{m}_K: \Sigma K \to M \wedge K$ 使得

$$\begin{aligned}
&m_K(i \wedge 1_K) = 1_K, \qquad (j \wedge 1_K)\overline{m}_K = 1_K,\\
&m_K\overline{m}_K = 0, \quad (i \wedge 1_K)m_K + \overline{m}_K(j \wedge 1_K) = 1_{M \wedge K},\\
&m_K(1_M \wedge m_K) = m_K(m_M \wedge 1_K),\\
&(1_M \wedge \overline{m}_K)\overline{m}_K = -(\overline{m}_M \wedge 1_K)\overline{m}_K
\end{aligned}$$

而且 $d(i') = 0, d(j') = 0$. 另外当 $p \geqslant 5$ 有 $m_K(\alpha^r i \wedge 1_K) = 0$.

在证明定理 6.5.1 之前, 我们先证明以下引理.

引理 6.5.2 若 $k < N(s) = s(p^2 - 3p + 1) + pq - 2$,

$$\alpha^s[\Sigma^k M, M] = [\Sigma^k M, M]\alpha^s \subset A_{k+sq}$$

其中 $A_* = Z_p[\alpha] \otimes E(\delta\alpha - \alpha\delta, \delta)$, $E(\quad)$ 表示外代数.

证 M 的乘法 m_M 使得 $\pi_* M$ 成为交换环, 其中对于 $f, g \in \pi_* M$, 乘积 $f \cdot g =$

$m_M(f \wedge g)$. 由于 $\delta i = 0, (\delta\alpha - \alpha\delta)i = i\alpha_1$, 因此 $i^* : A_* \to A_* i = Z_p[\alpha i] \otimes E(i\alpha_1)$ 是环同构. 设

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_A^{s,t}(H^*M, Z_p) \Longrightarrow \pi_{t-s}M$$

为定理 4.3.3 中的 Adams 谱序列, [7] 已证明:

(D) $E_\infty^{s,t} = Z_p[q_1] \otimes E(h_{1,0})$, 当 $t - s \leqslant (p^2 - p - 1)(s + 1)$

其中 $q_1, h_{1,0}$ 分别具有双次数 $(1, q+1), (1, q)$ 且分别表示 $\alpha i, i\alpha_1 \in \pi_* M$. 对于任意 $h \in [\Sigma^k M, M]$, 设 $x \in E_\infty^{a,b}$ 表示 $hi \in \pi_{b-a}M, b - a = k$. 若 $k \leqslant N(s)$, 则 $k + sq \leqslant (p^2 - p - 1)(s + a + 1)$, 从而由 (D), $q_1^s x \in Z_p[q_1] \otimes E(h_{1,0})$. 这就是说 $\alpha^s hi \in A_* i$, 从而 $\alpha^s h\delta \in A_*\delta \subset A_*$. 再由定理 6.4.14, $h = h_0 + \delta h_1$, 某个 $h_0, h_1 \in [\Sigma^* M, M] \cap (\ker d)$, 从而有 $d(h) = \pm h_1$, 并且当 $k \leqslant N(s)$ 有 $(\alpha^s h \pm \alpha^s h_1 \delta)\delta = \alpha^s h\delta \in A_*$. 因此有 $\alpha^s h \pm \alpha^s h_1 \delta = d(\alpha^s h \pm \alpha^s h_1 \delta) \in d(A_*) \subset A_*$. 若 $d(h) = 0$, 即 $h_1 = 0$, 则由 $[\Sigma^* M, M] \cap (\ker d)$ 的可交换性, 得出 $\alpha^s h = h\alpha^s \in A_{k+sq}$. 一般情况下, 首先得出当 $k + 1 \leqslant N(s)$, 或者 $k < N(s)$, 有 $h_1 \alpha^s = \alpha^s h_1 \in A_{k+sq+1}$, 从而得出 $\alpha^s h \in A_{k+sq}$. 同理可证当 $k < N(s)$, $h\alpha^s \in A_{k+sq}$. 证毕.

定理 6.5.1 的证明 由定理 6.4.10, K 是 M 模谱, 存在 M 模作用 $m_K : M \wedge K \to K, \overline{m}_K : \Sigma K \to M \wedge K$ 使得

(I) $m_K(i \wedge 1_K) = 1_K, \qquad (j \wedge 1_K)\overline{m}_K = 1_K,$

$m_K \overline{m}_K = 0, \quad (i \wedge 1_K)m_K + \overline{m}_K(j \wedge 1_K) = 1_{M \wedge K}$

而且 i', j' 是 M 模谱映射. 我们将满足这些条件的 $m_K, \overline{m}_K$ 称为可许的 M 模作用. 下面将 (6.5.0) 中的 K, i', j' 记为 K_r, i'_r, j'_r. 利用 (6.5.0) 和稳定同伦范畴中的 3×3 引理 (见 3.7 节) 可知 K_r 是 $i'_1 j'_{r-1} : \Sigma^{-1} K_{r-1} \to \Sigma^{(r-1)q} K_1$ 的上纤维, 由以下上纤维序列

(II) $\Sigma^{-1} K_{r-1} \xrightarrow{i'_1 j'_{r-1}} \Sigma^{(r-1)q} K_1 \xrightarrow{\psi} K_r \xrightarrow{\rho} K_{r-1}$

给出, 且有关系式 $j'_r \psi = j'_1, \psi i'_1 = i'_r \alpha^{r-1}, \rho i'_r = i'_{r-1}, j'_{r-1}\rho = \alpha j'_r$. 利用 i'_1, j'_{r-1} 是 M 模谱映射, 可以选取可许的 M 模作用 $m_{K_r}, \overline{m}_{K_r}$ (任意 $r \geqslant 1$) 使得 ψ, ρ 是 M 模谱映射 (见 [16] 定理 4.4), 即 $m_{K_{r-1}}(1_M \wedge \rho) = \rho m_{K_r}$ 等. 对任意 $r \geqslant 1$, 令 $\tau(m_{K_r}) = m_{K_r}(1_M \wedge m_{K_r}) - m_{K_r}(m_M \wedge 1_{K_r}), \tau(\overline{m}_{K_r}) = (1_M \wedge \overline{m}_{K_r})\overline{m}_{K_r} + (\overline{m}_M \wedge 1_{K_r})\overline{m}_{K_r}$. 容易证明存在唯一的 $a(m_{K_r}), a(\overline{m}_{K_r}) \in [\Sigma^2 K_r, K_r]$ 使得

$$\tau(m_{K_r}) = a(m_{K_r})(j \wedge j \wedge 1_{K_r})$$
$$\tau(\overline{m}_{K_r}) = (i \wedge i \wedge 1_{K_r})a(\overline{m}_{K_r})$$

另外, 由 ρ 是 M 模谱映射, 可得出 $\rho\tau(m_{K_r}) = \tau(m_{K_{r-1}}) \cdot (1_{M \wedge M} \wedge \rho)$. 因为 $a(m_{K_1}) \in [\Sigma^2 K_1, K_1] = i'_1[\Sigma^{q+1} M, M]j'_1 = 0$, 我们可以归纳假设 $a(m_{K_{r-1}}) = 0$, 从而得出 $\rho a(m_{K_r})(j \wedge j \wedge 1_{K_r}) = \rho\tau(m_{K_r}) = 0$. 更进一步, 由 $\ker(j \wedge 1_{K_r})^*(1_M \wedge j \wedge 1_{K_r})^* = 0$ 可得出 $\rho a(m_{K_r}) = 0$, 从而由 (II) 有 $a(m_{K_r}) = \psi \cdot \overline{g} = \psi i'_1 g j'_r$,

某个 $\overline{g} \in [\Sigma^{-(r-1)q+2}K_r, K_1], g \in [\Sigma^{q+3}M, M]$. 但是, $[\Sigma^{q+3}M, M] = 0$, 从而有 $a(m_{K_r}) = 0$ 完成了归纳法. 因此, 对任意 $r \geqslant 1$ 有 $\tau(m_{K_r}) = 0$. 同理 $\tau(\overline{m}_{K_r}) = 0$, 即存在满足 (I) 的可结合的 M 模作用 $m_K, \overline{m}_K$.

最后证明当 $p \geqslant 5$ 有 $m_K(\alpha^r i \wedge 1_K) = 0$. 注意到 $\alpha^r = -d(\alpha^r\delta)$, 因此由定理 6.4.13(5), $m_{K_r}(\alpha^r \wedge 1_{K_r})\overline{m}_{K_r} = \lambda_{K_r}(\alpha^r) = -\lambda_{K_r}(d(\alpha^r\delta)) = 0$, 从而 $m_{K_r}(\alpha^r i \wedge 1_{K_r}) = 0$ 蕴涵 $m_{K_r}(\alpha^r \wedge 1_{K_r}) = m_{K_r}(\alpha^r \wedge 1_{K_r})[(i \wedge 1_{K_r})m_{K_r} + \overline{m}_{K_r}(j \wedge 1_{K_r})] = 0$. 更进一步, 由 ρ 是 M 模谱映射, 我们有

(III) $\rho m_{K_r}(\alpha^r i \wedge 1_{K_r}) = m_{K_{r-1}}(\alpha^r i \wedge 1_{K_{r-1}})\rho$

由于当 $p \geqslant 5$ 有 $2q+1 < pq-3$, 而当 $k < pq-3$, $[\Sigma^k M, M] = A_k$, 因此 $m_{K_1}(\alpha i \wedge 1_{K_1}) \in [\Sigma^q K_1; K_1] = i_1'[\Sigma^{2q+1}M, M]j_1' = i_1' A_{2q+1} j_1' = 0$. 以此作为归纳的初始条件, 归纳假设 $m_{K_{r-1}}(\alpha^{r-1} i \wedge 1_{K_{r-1}}) = 0$, 因此由 (III) 得出 $\rho m_{K_r}(\alpha^r i \wedge 1_{K_r}) = 0$, 从而 $m_{K_r}(\alpha^r i \wedge 1_{K_r}) = \psi \cdot \overline{g} = \psi i_1' g j_r' = i_r' \alpha^{r-1} g j_r'$, 某个 $\overline{g} \in [\Sigma^q K_r, K_1], g \in [\Sigma^{(r+1)q+1}M, M]$. 但是, 由引理 6.5.2, $\alpha^{r-1}g \in \alpha^{r-1}[\Sigma^{(r+1)q+1}M, M] \subset A_{2rq+1} = 0$, 因此得出 $m_{K_r}(\alpha^r i \wedge 1_K) = 0$, 完成了归纳法. 证毕.

令 $\alpha_s = j\alpha^s i \in \pi_{sq-1}S$, 则 $\alpha_s \wedge 1_M = \delta\alpha^s - \alpha^s\delta$. 由于 $\alpha, \delta\alpha - \alpha\delta \in [\Sigma^* M, M] \cap (\ker d)$ 是交换子环 (见定理 6.4.14), 因此 $\alpha(\delta\alpha - \alpha\delta) = (\delta\alpha - \alpha\delta)\alpha$, 从而有 $\alpha_2 \wedge 1_M = \delta\alpha^2 - \alpha^2\delta = 2\alpha(\delta\alpha - \alpha\delta)$. 利用归纳法可立即得出

(6.5.3) $$\alpha_s \wedge 1_M = \delta\alpha^s - \alpha^s\delta = s\alpha^{s-1}(\delta\alpha - \alpha\delta)$$

现在, 下面的 K 仍表示 (6.5.0) 中的 K. 令

$$\overline{\alpha} = \lambda_K(\alpha\delta) = m_K(\alpha i \wedge 1_K) \in [\Sigma^q K, K] \quad (r \geqslant 2)$$

$$\alpha' = \lambda_K(\delta\alpha\delta) = \alpha_1 \wedge 1_K \in [\Sigma^{q-1}K, K]$$

因为 $\lambda_K(\alpha^{s-1}) = -\lambda_K(d(\delta\alpha^{s-1})) = 0$(由定理 6.4.13(5)), 因此利用定理 6.4.13 (1) 和归纳法有 $\lambda_K(\alpha^s\delta) = \lambda_K(\alpha^{s-1} \cdot \alpha\delta) = \lambda_K(\alpha^{s-1})\lambda_K(\delta\alpha\delta) + \lambda_K(\alpha^{s-1}\delta)\lambda_K(\alpha\delta) = (\overline{\alpha})^{s-1} \cdot \overline{\alpha} = (\overline{\alpha})^s$, 从而由定理 6.5.1 得 $(\overline{\alpha})^r = \lambda_K(\alpha^r\delta) = m_K(\alpha^r i \wedge 1_K) = 0$. 再利用 6.4.13(3) 以及 $d(i') = 0, d(j') = 0, \lambda_M(\alpha\delta) = \alpha, \lambda_M(\delta\alpha\delta) = \alpha_1 \wedge 1_M$ 可得

(6.5.4) $$(\overline{\alpha})^s i' = i'\alpha^s, \qquad j'(\overline{\alpha})^s = \alpha^s j'$$
$$\alpha' i' = i'(\delta\alpha - \alpha\delta), \quad j'\alpha' = (\alpha\delta - \delta\alpha)j'$$

另外由 (6.5.3) 可知 $(\alpha_1)^2 = j\alpha\delta\alpha i = 0$, 因此 $(\alpha')^2 = 0$, 且利用定理 6.4.2(4) 可得 $\overline{\alpha}\alpha' = \alpha'\overline{\alpha}$.

由 (6.5.3) 可得 $2\alpha\delta\alpha = \delta\alpha^2 + \alpha^2\delta$, 因此 $\delta\alpha\delta\alpha = \frac{1}{2}\delta(\delta\alpha^2 + \alpha^2\delta) = \frac{1}{2}(\delta\alpha^2 + \alpha^2\delta)\delta = \alpha\delta\alpha\delta$. 再利用归纳法得出 $\delta\alpha\delta\alpha^r = \alpha\delta\alpha\delta\alpha^{r-1} = \alpha^r\delta\alpha\delta$, 从而有 $i'\delta\alpha\delta\alpha^r = 0$, 存在某个 $\alpha_0'' \in [\Sigma^{q-2}K, K]$ 使得 $\alpha_0'' i' = i'\delta\alpha\delta$. 两边作用于 d 得 $d(\alpha_0'')i' = -i'(\delta\alpha - \alpha\delta) = -\alpha' i'$, 从而 $d(\alpha_0'') = -\alpha' + g_K j'$, 某个 $g_K \in [\Sigma^{(r+1)q}M, K]$. 注意到 $j' g_K \in [\Sigma^{q-1}M, M] \cong Z_p\{\delta\alpha, \alpha\delta\}$, 从而由 (6.5.3) 可推出 $\alpha_*[\Sigma^{q-1}M, M] \neq 0$. 因此 $j' g_K = 0, g_K = i'g$, 某个 $g \in [\Sigma^{(r+1)q}M, M]$. 于是我们得到 $d(\alpha_0'') = -\alpha' + i'gj'$.

再作用于 d 得出 $i'd(g)j'=0$, 由此容易推出 $d(g)=0$, 从而 $g=d(-g\delta)$. 令 $\alpha''=\alpha_0''-i'g\delta j'\in[\Sigma^{q-2}K,K]$, 则

(6.5.5) $$\alpha''i'=i'\delta\alpha\delta,\quad d(\alpha'')=-\alpha',\quad j'\alpha''=\delta\alpha\delta j'.$$

类似于以上的推导可知, 存在 $\overline{\alpha}'\in[\Sigma^{q-1}K,K]$ 使得

(6.5.6) $$\overline{\alpha}'i'=i'\alpha\delta,\quad d(\overline{\alpha}')=-\overline{\alpha},\quad j'(\overline{\alpha}'-r\alpha')=-\alpha\delta j'$$

另外当 $r\equiv 0 \pmod p$, 存在 $\delta_K\in[\Sigma^{-1}K,K]$ 使得

(6.5.7) $$\delta_K i'=i'\delta,\quad j'\delta_K=-\delta j',\quad d(\delta_K)=-1_K$$

并且容易看出

(6.5.8) $$\alpha''i'=\delta_K\overline{\alpha}\delta_K i',\qquad \alpha'i'=(\delta_K\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\delta_K)i',\qquad \overline{\alpha}'i'=\overline{\alpha}\delta_K i'$$

定义 $[\Sigma^*K,K]$ 的子群 $\overline{A}_*$ 如下：

$$\overline{A}_*=Z_p[\overline{\alpha}]/(\overline{\alpha}^r)\otimes\{1,\alpha'',\alpha',\overline{\alpha}'\}\quad 当\ r\neq 0 \pmod p$$
$$\overline{A}_*=Z_p[\overline{\alpha}]/(\overline{\alpha}^r)\otimes\{1,\delta_K,\delta_K\overline{\alpha}\delta_K,\delta_K\overline{\alpha}\}\quad 当\ r\equiv 0 \pmod p$$

定理 6.5.9(文献 [14] 引理 5.6(ii)) 当 $k<pq-3$, 有直和分解

$$[\Sigma^kK,K]=\overline{A}_k\oplus(i')_*(j')^*[\Sigma^{k+rq+1}M,M]$$

证 当 $k<pq-2$, 已知 $\pi_kS=0$ 除非 $\pi_{sq-1}S\cong Z_{(p)}\{\alpha_s\}$ 和 $\pi_0S\cong Z_{(p)}\{1_S\}$, 因此由 (6.5.3) 可知, 当 $k<pq-3$, $[\Sigma^kM,M]=A_*=Z_p[\alpha]\otimes E(\delta\alpha-\alpha\delta,\delta)$, 其中 $Z_p[\ \ ]$ 表示多项式代数, E 表示外代数. 已知对任意正整数 r, $\alpha^r\neq 0$, 因此 A_* 是 $[\Sigma^*M,M]$ 的子环, 从而 $A_k\xrightarrow{\alpha^s}A_{k+sq}$ 对所有 $k\geqslant 0, s>0$ 单射. 对于 $f\in[\Sigma^kK,K], j'fi'\in[\Sigma^{k-rq-1}M,M]=A_{k-rq-1}$. 但是 $A_{k-rq-1}\xrightarrow{\alpha^r}A_{k-1}$ 单射, 因此 $j'fi'=0$, 从而 $fi'=i'g$, 某个 $g\in[\Sigma^kM,M]=A_k$. 令 $A'_*=A_*/\alpha^rA_*$, 则 $i'_*A'_*=i'_*A_*$. 另外由 (6.5.4)~(6.5.8) 可知 $i'_*A'_*\subset\overline{A}_*i'$, 除非当 $r\neq 0 \pmod p$ 且 $k=-1$, 这时 $i'\delta$ 不属于 $\overline{A}_*i'$. 因此 $i'g=\bar{g}i'$ 某个 $\bar{g}\in\overline{A}_k$ 从而 $f=\bar{g}+g'_Kj'$, 某个 $g'_K\in[\Sigma^{k+rq+1}M,K]$. 类似于上面, 有 $j'g'_K=0$, 从而 $g'_K=i'g'$, 某个 $g'\in[\Sigma^{k+rq+1}M,M]$. 于是我们有 $f=\bar{g}+i'g'j'$. 由 (6.5.4)~(6.5.8) 显然有 $\overline{A}_*\cap(i')_*(j')^*[\Sigma^{*+rq+1}M,M]=0$, 因此得出所要的直和分解. 证毕.

设 L 是 $j\alpha^ri\in[\Sigma^{rq-1}S,S]$ 的上纤维, 由上纤维序列：

(6.5.10) $$\Sigma^{rq-1}S\xrightarrow{j\alpha^ri}S\xrightarrow{i''}L\xrightarrow{j''}\Sigma^{rq}S$$

给出, 则我们有以下结果.

定理 6.5.11(文献 [14]p.433) 当 $p\geqslant 5$, 谱 $K\wedge K$ 分裂, 即存在同伦等价

$K\wedge K=K\vee\Sigma K\vee\Sigma^{rq+1}K\vee\Sigma^{rq+2}K$ 当 $r\equiv 0 \pmod p$

$K\wedge K=K\vee\Sigma L\wedge K\vee\Sigma^{rq+2}K$ 当 $r\neq 0 \pmod p$

证 由定理 6.5.1, $\lambda_K(\alpha^r\delta)=m_K(\alpha^ri\wedge 1_K)=0$. 另外, 利用定理 (6.4.13)(5), $m_K(\alpha^r\wedge 1_K)\overline{m}_K=\lambda_K(\alpha^r)=-\lambda_K(d(\delta\alpha^r))=0$, $\lambda_K(\delta\alpha^r-\alpha^r\delta)=-\lambda_K(d(\delta\alpha^r\delta))=0$, 从而有 $(j\alpha^r\wedge 1_K)\overline{m}_K=\lambda_K(\delta\alpha^r)=\lambda_K(\alpha^r\delta)=0$. 再将等式 $(i\wedge 1_K)m_K+\overline{m}_K(j\wedge$

$1_K) = 1_{M\wedge K}$ 同时作用在 $\alpha^r \wedge 1_K$ 的两边, 就得出

(6.5.12) $$\alpha^r \wedge 1_K = \overline{m}_K(j\alpha^r i \wedge 1_K)m_K$$

设 $r \equiv 0 \pmod p$. 由 (6.5.3), $j\alpha^r i \wedge 1_M = 0$, 因此 $ij\alpha^r i = 0 \in \pi_{rq-1}M$; 从而 $j\alpha^r i = p\cdot f$, 某个 $f \in \pi_{rq-1}S$. 再由 (6.5.12) 得出 $\alpha^r \wedge 1_K = \overline{m}_K(p\cdot f \wedge 1_K)m_K = 0 \in [\Sigma^{rq}M\wedge K, M\wedge K]$. 因此由 (6.5.0) 和命题 3.4.3 所导出的上纤维序列

$$\xrightarrow{\alpha^r\wedge 1_K=0} M\wedge K \xrightarrow{i'\wedge 1_K} K\wedge K \xrightarrow{j'\wedge 1_K} \Sigma^{rq+1}M\wedge K$$

分裂, 从而有同伦等价 $K\wedge K = M\wedge K \vee \Sigma^{rq+1}M\wedge K = K\vee\Sigma K\vee\Sigma^{rq+1}K\vee\Sigma^{rq+2}K$, 得出所要的结果.

当 $r \not\equiv 0 \pmod p$, 所要的 $K\wedge K$ 的分裂性可证明如下. 由定理 6.5.2, $p\wedge 1_K = 0$, 从而有分裂上纤维序列 $\Sigma K \xrightarrow{\overline{m}_K} M\wedge K \xrightarrow{m_K} K$. 设 X 为 $(j\alpha^r i\wedge 1_K)m_K : \Sigma^{rq-1}M\wedge K \to K$ 的上纤维, 由上纤维序列

$$\Sigma^{rq-1}M\wedge K \xrightarrow{(j\alpha^r i\wedge 1_K)m_K} K \xrightarrow{w} X \xrightarrow{u} \Sigma^{rq}M\wedge K$$

给出. 注意到还有上纤维序列 (6.5.10), 利用以下稳定同伦范畴中的 3×3 引理的同伦交换图形 (见 3.7 节)

(6.5.13)
$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^{rq-1}M\wedge K & & \xrightarrow{(j\alpha^r i\wedge 1_K)m_K} & K & \xrightarrow{i''\wedge 1_K} & & L\wedge K \\
& \searrow m_K & & \nearrow_{j\alpha^r i\wedge 1_K} \searrow w & & \nearrow & \\
& & \Sigma^{rq-1}K & & X & & \\
& \nearrow_{j''\wedge 1_K} & \searrow 0 & & \nearrow & \searrow u & \\
\Sigma^{-1}L\wedge K & & \xrightarrow{0} & \Sigma^{rq+1}K & \xrightarrow{\overline{m}_K} & & \Sigma^{rq}M\wedge K
\end{array}$$

可得出另外一个分裂的上纤维序列 $\xrightarrow{0} \Sigma^{rq+1}K \to X \to L\wedge K$, 即 $X = L\wedge K\vee \Sigma^{rq+1}K$. 再利用等式 (6.5.12) 和以下 3×3 引理的同伦交换图形

(6.5.14)
$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^{rq}M\wedge K & & \xrightarrow{\alpha^r\wedge 1_K} & M\wedge K & \xrightarrow{m_K} & & K \\
& \searrow_{(j\alpha^r i\wedge 1_K)m_K} & \nearrow \overline{m}_K & & \searrow i'\wedge 1_K & \nearrow \mu & \\
& & \Sigma K & & K\wedge K & & \\
& \nearrow 0 & \searrow w & & \nearrow & \searrow j'\wedge 1_K & \\
\Sigma^2 K & & \xrightarrow{0} & \Sigma X & \xrightarrow{u} & & \Sigma^{rq+1}M\wedge K
\end{array}$$

可得出另外一个分裂的上纤维序列 $\xrightarrow{0} \Sigma X \to K\wedge K \xrightarrow{\mu} K$, 从而得出 $K\wedge K = K\vee\Sigma X = K\vee\Sigma L\wedge K\vee\Sigma^{rq+2}K$, 所要的 $K\wedge K$ 的分裂性得证. 证毕.

注 6.5.15 注意到当 $r\equiv 0 \pmod p$ 时有 $j\alpha^r i\wedge 1_K = 0$, 这时 $L\wedge K = K\vee\Sigma^{rq}K$. 因此定理 6.5.11 中的两种分裂性可以统一成一个, 即对任意 $r > 0$ 有 $K\wedge K = K\vee\Sigma L\wedge K\vee\Sigma^{rq+2}K$.

定理 6.5.16(文献 [14] p.433 (A)~(D)) 当 $p \geqslant 5$, 存在投射 $\mu\in[K\wedge K, K]$, $\mu_2 \in [K\wedge K, \Sigma L\wedge K]$, $jj'\wedge 1_K \in [K\wedge K, \Sigma^{rq+2}K]$ 和内射 $i'i\wedge 1_K \in [K, K\wedge K]$, $\nu_2 \in$

$[\Sigma L\wedge K, K\wedge K], \nu\in[\Sigma^{rq+2}K, K\wedge K]$ 使得

(A) $\mu(i'\wedge 1_K)=m_K,\qquad (j'\wedge 1_K)\nu=\overline{m}_K;$

(B) $\mu_2(i'\wedge 1_K)=(i''\cdot j\wedge 1_K),\quad (j'\wedge 1_K)\nu_2=(i\cdot j''\wedge 1_K);$

(C) $(j''\wedge 1_K)\mu_2=m_K(j'\wedge 1_K),\quad \nu_2(i''\wedge 1_K)=(i'\wedge 1_K)\overline{m}_K;$

(D) $\mu\nu_2=0,\quad \mu\nu=0,\quad \mu_2\nu=0,\quad \mu_2\nu_2=1_{L\wedge K}.$

证 令 ν 为 (6.5.13), (6.5.14) 中两个映射的合成, 即 $\nu:\Sigma^{rq+2}K\to\Sigma X\to K\wedge K$, 则由 (6.5.14) 的右上三角形和 (6.5.13), (6.5.14) 的两个右下三角形, (A) 得出. 考查以下上纤维序列的同伦可换图形:

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^{rq}K & \xrightarrow{j\alpha^r i\wedge 1_K} & \Sigma K & \xrightarrow{i''\wedge 1_K} & \Sigma L\wedge K & \xrightarrow{j''\wedge 1_K} & \Sigma^{rq+1}K\\
\uparrow{\scriptstyle m_K} & & \uparrow{\scriptstyle j\wedge 1_K} & & \uparrow{\scriptstyle \mu_2} & & \uparrow{\scriptstyle m_K}\\
\Sigma^{rq}M\wedge K & \xrightarrow{\alpha^r\wedge 1_K} & M\wedge K & \xrightarrow{i'\wedge 1_K} & K\wedge K & \xrightarrow{j'\wedge 1_K} & \Sigma^{rq+1}M\wedge K\\
\uparrow{\scriptstyle i\wedge 1_K} & & \uparrow{\scriptstyle \overline{m}_K} & & \uparrow{\scriptstyle \nu_2} & & \uparrow{\scriptstyle i\wedge 1_K}\\
\Sigma^{rq}K & \xrightarrow{j\alpha^r i\wedge 1_K} & \Sigma K & \xrightarrow{i''\wedge 1_K} & \Sigma L\wedge K & \xrightarrow{j''\wedge 1_K} & \Sigma^{rq+1}K
\end{array}$$

利用等式 (6.5.12) 可知左边上下两个方块同伦可换, 因此由引理 3.2.6, 存在 μ_2,ν_2 使得以上全部的方块同伦可换, 得出 (B), (C). 由第一行和第三行所导出的同伦群的恰当序列以及五项引理可知 $\mu_2\nu_2: L\wedge K\to L\wedge K$ 导出的同态 $(\mu_2\nu_2)_*:\pi_k(L\wedge K)\to\pi_k(L\wedge K)$ 对所有整数 k 为同构, 从而由 Whitehead 定理 3.1.23, $\mu_2\nu_2$ 是同伦等价, $\mu_2\nu_2=1_{L\wedge K}$. 另外由图 (6.5.13), (6.5.14) 可得 $\mu\nu=0,\mu\nu_2=0,\mu_2\nu=0$, 得出 (D). 证毕.

更进一步, (A), (B) 蕴涵 $\mu(i'i\wedge 1_K)=1_K=(jj'\wedge 1_K)\nu, \mu_2(i'i\wedge 1_K)=0=(jj'\wedge 1_K)\nu_2$. 显然还有 $(jj'\wedge 1_K)(i'i\wedge 1_K)=0$. 令 $f=(i'i\wedge 1_K)\mu+\nu_2\mu_2+\nu(jj'\wedge 1_K)\in[K\wedge K, K\wedge K]$, 综合 (D) 和这些等式可得 $f\cdot f=f$. 由于 Z_p 上同调群 $H^*(K\wedge K)\cong H^*K\otimes H^*K$ 而 $H^kK=0$ 除非 $k=0,1,rq+1,rq+2$, 因此 $\mathrm{Ext}_A^{0,0}(H^*(K\wedge K),H^*(K\wedge K))\cong Z_p$, 由恒等同态 $1:H^*(K\wedge K)\to H^*(K\wedge K)$ 为其生成元, 从而 $f=x\cdot 1_{K\wedge K}+f_1$, 某个 $f_1\in[K\wedge K,K\wedge K]$ 使得 f_1 导出的 Z_p 上同调群的同态为零. 也就是说 f_1 在 Adams 谱序列中具有 filtration $s>0$. 由 $f\cdot f=f$ 可得出 $(x-x^2)\cdot 1_{K\wedge K}=(2x-1)f_1+f_1\cdot f_1$ 从而 $(x-x^2)=0, x=1, -f_1=f_1^2$ 并且随之有 $f_1=(-1)^{n-1}f_1^n$, 任意 $n>1$. 这就是说 f_1 在 Adams 谱序列中具有任意大的 filtration, 从而 $f_1=0$, $f=1_{K\wedge K}$, 即

(6.5.17) $$(i'i\wedge 1_K)\mu+\nu_2\mu_2+\nu(jj'\wedge 1_K)=1_{K\wedge K}$$

定理 6.5.18(文献 [14] 引理 6.2) 当 $p\geqslant 5$, 存在

$$\widetilde{\Delta}\in[\Sigma^{-1}K, L\wedge K],\quad \overline{\Delta}\in[\Sigma^{-rq-1}L\wedge K, K]$$

使得

(1) $(j''\wedge 1_K)\widetilde{\Delta}=i'j'$, $\quad\overline{\Delta}(i''\wedge 1_K)=i'j'$;

(2) $\widetilde{\Delta}i'=(i''\wedge 1_K)i'\delta$, $\quad j'\overline{\Delta}=\delta j'(j''\wedge 1_K)$;

(3) $(1_L\wedge j')\widetilde{\Delta}=-(i''\wedge 1_M)\delta j'$, $\quad\overline{\Delta}(1_L\wedge i')=-i'\delta(j''\wedge 1_M)$;

(4) $\overline{\Delta}\widetilde{\Delta}=-2i'ijj'$;

(5) $d(\widetilde{\Delta})=-(i''\wedge 1_K)$, $\quad d(\overline{\Delta})=j''\wedge 1_K$.

证 令 $\widetilde{\Delta}=\mu_2(1_K\wedge i'i),\overline{\Delta}=(1_K\wedge jj')\nu_2$, 则

(1) 由定理 6.5.16(C), $(j''\wedge 1_K)\widetilde{\Delta}=(j''\wedge 1_K)\mu_2(1_K\wedge i'i)=m_K(j'\wedge 1_K)(1_K\wedge i'i)=m_K(1_M\wedge i')(j'\wedge 1_M)(1_K\wedge i)=i'm_M(j'\wedge 1_M)(1_K\wedge i)=i'm_M(1_M\wedge i)j'=i'j'$. 类似地, $\overline{\Delta}(i''\wedge 1_K)=(1_K\wedge jj')\nu_2(i''\wedge 1_K)=(1_K\wedge jj')(i'\wedge 1_K)\overline{m}_K=(1_K\wedge j)(i'\wedge 1_M)(1_M\wedge j')\overline{m}_K=-i'(1_M\wedge j)\overline{m}_Mj'=i'j'$.

(2) 由定理 6.5.16(B), $\widetilde{\Delta}i'=\mu_2(1_K\wedge i'i)i'=\mu_2(i'\wedge 1_K)(1_M\wedge i'i)=(i''\cdot j\wedge 1_K)(1_M\wedge i'i)=(i''\wedge 1_K)i'\delta$. 类似地, $j'\overline{\Delta}=j'(1_K\wedge jj')\nu_2=(1_M\wedge jj')(j'\wedge 1_K)\nu_2=(1_M\wedge jj')(i\cdot j''\wedge 1_K)=\delta j'(j''\wedge 1_K)$.

下面一起证明 (5), (3), (4). 由于 $-(j''\wedge 1_K)d(\widetilde{\Delta})=d((j''\wedge 1_K)\widetilde{\Delta})=d(i'j')=0$, 则 $d(\widetilde{\Delta})\in(i''\wedge 1_K)_*[K,K]$. 同理有 $d(\overline{\Delta})\in(j''\wedge 1_K)^*[K,K]$. 由定理 6.5.9, $[K,K]=\overline{A}_0+i'[\Sigma^{rq+1}M,M]j'$, 因此 $d(\widetilde{\Delta})=x(i''\wedge 1_K)+(i''\wedge 1_K)i'g_1j',d(\overline{\Delta})=y\cdot(j''\wedge 1_K)+i'g_2j'(j''\wedge 1_K)$, 某个 $g_1,g_2\in[\Sigma^{rq+1}M,M],x,y\in Z_p$. 对两个等式作用于 d 可得 $(i''\wedge 1_K)i'd(g_1)j'=0=i'd(g_2)j'(j''\wedge 1_K)$, 从而可推出 $d(g_1)=0=d(g_2)$. 通过作用 d 于 (2), 可得 $d(\widetilde{\Delta})i'=-(i''\wedge 1_K)i'$, 从而 $x=-1$. 同理 $y=1$. 因此, 通过选择另外一对 μ_2,ν_2, 可使 (5), (1), (2) 同时成立. 再证明 (3), 由于 $(j''\wedge 1_M)(1_L\wedge j')\widetilde{\Delta}=j'(j''\wedge 1_K)\widetilde{\Delta}=j'i'j'=0$, 因此 $(1_L\wedge j')\widetilde{\Delta}\in(i''\wedge 1_M)_*[\Sigma^{-rq-2}K,M]$, 从而 $(1_L\wedge j')\widetilde{\Delta}=x\cdot(i''\wedge 1_M)\delta j'$, 某个 $x\in Z_p$, 这是因为 $[\Sigma^{-rq-2}K,M]\cong Z_p\{\delta j'\}$. 再通过两边作用于 d 和 (5) 比较可得 $x=-1$. (3) 第一个等式成立. 同理 (3) 的另一个等式也成立. 最后验证 (4): 利用 (6.5.17) 我们有 $\overline{\Delta}\widetilde{\Delta}=(1_K\wedge jj')\nu_2\mu_2(1_K\wedge i'i)=(1_K\wedge jj')(1_K\wedge i'i)-(1_K\wedge jj')\nu(jj'\wedge 1_K)(1_K\wedge i'i)-(1_K\wedge jj')(i'i\wedge 1_K)\mu(1_K\wedge i'i)=-(1_K\wedge jj')\nu i'\delta j'-i'\delta j'\mu(1_K\wedge i'i)=-2i'\delta j'$, 其中通过选择一对 μ,ν 可使 $\mu(1_K\wedge i'i)=1_K=(1_K\wedge jj')\nu$, 见下面的定理 6.5.19. 证毕.

下面我们不加证明地叙述文献 [14]p. 438 定理 6.5 和 6.6. 当 r 比较大, 它的证明比较复杂, 也需要较多篇幅. 但是, 当 $r<p$, 定理 6.5.19 可由定理 6.5.16, 6.5.18, 6.5.9 以及 $[\Sigma^{rq+k}M,M]=A_{rq+k}=0,k=1,2,3$ 容易证得, 而定理 6.5.20 当 $r\leqslant\frac{1}{2}(p-1)$ 可利用定理 6.5.2 容易证得.

定理 6.5.19 (文献 [14]p.438 定理 6.5) 存在 (μ,ν,μ_2,ν_2) 的一个选择, 使满足定理 6.5.16(A), (B), (C), (D) 和以下:

(E) $\mu T=\mu$, $\qquad T\nu=\nu$;

(F) $\mu_2 T = -\mu_2 + \widetilde{\Delta}\mu, \quad T\nu_2 = -\nu_2 + \nu\overline{\Delta};$

(G) $d_i(\mu) = 0, \qquad d_i(\nu) = 0, \quad i = 1, 2;$

(H) $d_1(\mu_2) = -(i'' \wedge 1_K)\mu, \quad d_2(\mu_2) = 0,$

$\quad d_1(\nu_2) = -\nu(j'' \wedge 1_K), \quad d_2(\nu_2) = 0$

其中 $T : K \wedge K \to K \wedge K$ 是交换映射, $d_i(i = 1, 2)$ 是 M 模谱之间映射的导数算子 d 使 $K \wedge K$ 的 M 模作用由第 i 个 K 所决定 (参见定义 6.4.6).

定理 6.5.20 (文献 [14]p.438 定理 6.6) 定理 6.5.19 中的任一个 μ 都是可结合的, 即 $\mu(\mu \wedge 1_K) = \mu(1_K \wedge \mu)$.

以上两个定理蕴涵如下有关直和分解的结果.

引理 6.5.21 以上定理中的 μ, ν 满足 $(\mu \wedge 1_K)(1_K \wedge \nu) = \nu\mu = (1_K \wedge \mu)(\nu \wedge 1_K)$.

证 利用文献 [14] 定理 6.5 证明 $\mu(\mu \wedge 1_K) = \mu(1_K \wedge \mu)$ 过程的对偶形式可证得相对应的可结合性: $(\nu \wedge 1_K)\nu = (1_K \wedge \nu)\nu$. 因此 $(\mu \wedge 1_K)(1_K \wedge \nu)\nu = (\mu\nu \wedge 1_K)\nu = 0$. 由于 $(\nu \wedge 1_K)T\nu_2 = T'(1_K \wedge \nu)\nu_2$, 其中 $T' : K \wedge K \wedge K \to K \wedge K \wedge K$ 使得 $T'(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) = x_3 \wedge x_1 \wedge x_2$, 因此 $(T')^2(\nu \wedge 1_K)T\nu_2 = (T')^3(1_K \wedge \nu)\nu_2 = (1_K \wedge \nu)\nu_2$, 从而 $(1_K \wedge \mu)(T')^2(\nu \wedge 1_K)T\nu_2 = 0$. 但是可看出 $(1_K \wedge T)(T')^2(T \wedge 1_K) = 1_{K \wedge K \wedge K}$, 因此有 $(1_K \wedge \mu)(T')^2(\nu \wedge 1_K) = (1_K \wedge \mu T)(T')^2(T\nu \wedge 1_K) = (1_K \wedge \mu)(\nu \wedge 1_K)$, 从而得出 $(1_K \wedge \mu)(\nu \wedge 1_K)T\nu_2 = 0$ 以及 $(1_K \wedge \mu)(\nu \wedge 1_K)\nu_2 = -(1_K \wedge \mu)(\nu \wedge 1_K)T\nu_2 + (1_K \wedge \mu)(\nu \wedge 1_K)\nu\overline{\Delta} = 0$.

同理 $(\mu \wedge 1_K)(1_K \wedge \nu)\nu_2 = 0$. 因此, 将 $(1_K \wedge \mu)(\nu \wedge 1_K)$ 或者 $(\mu \wedge 1_K)(1_K \wedge \nu)$ 合成于等式 (6.5.17) 可得出引理的结果. 证毕.

定理 6.5.22(文献 [14] p.424) 设 $p \geqslant 5$, $\delta_0 = i'\delta j' \in [\Sigma^{-rq-2}K, K]$ 且

$\quad \mathrm{Mod}_* = \{f \in [\Sigma^* K, K] \mid \mu(f \wedge 1_K) = f\mu\}$

$\quad \mathrm{Der}_* = \{f \in [\Sigma^* K, K] \mid \mu(f \wedge 1_K) + \mu(1_K \wedge f) = f\mu\}$

则存在直和分解

$$[\Sigma^* K, K] = \mathrm{Mod}_* \oplus \mathrm{Der}_* \oplus \mathrm{Mod}_*\delta_0$$

并且有 $i'j' \in \mathrm{Der}_{-rq-1}$.

证 首先利用 μ 的可结合性证明 $(i'i)^* : [\Sigma^* K, K] \to \pi_* K$ 导出同构 $(i'i)^* : \mathrm{Mod}_* \to \pi_* K$. 对任意 $f \in \mathrm{Mod}_*$ 使得 $(i'i)^*(f) = 0$, 则 $f = f\mu(i'i \wedge 1_K) = \mu(fi'i \wedge 1_K) = 0$, $(i'i)^* : \mathrm{Mod}_* \to \pi_* K$ 单射. 另一方面, 对 $g \in \pi_* K$, $(i'i)^*(\mu(g \wedge 1_K)) = \mu(g \wedge 1_K)i'i = \mu(1_K \wedge i'i)g = g$ 而且 $\mu(\mu \wedge 1_K)(g \wedge 1_K \wedge 1_K) = \mu(1_K \wedge \mu)(g \wedge 1_K \wedge 1_K) = \mu(g \wedge 1_K)\mu$, 即 $\mu(g \wedge 1_K) \in \mathrm{Mod}_*$, 从而 $(i'i)^* : \mathrm{Mod}_* \to \pi_* K$ 是同构, 进而得出 $[\Sigma^* K, K] = \mathrm{Mod}_* \oplus \ker(i'i)^*$. 显然 $\mathrm{Mod}_*\delta_0 \subset \ker(i'i)^*$, 另外任意 $f \in \mathrm{Der}_* \cap \mathrm{Mod}_*$ 必有 $f = 0$, 即 $\mathrm{Der}_* \cap \mathrm{Mod}_* = 0$, 从而 $\mathrm{Der}_* \subset \ker(i'i)^*$. 如果 $f \in \mathrm{Der}_*$, 则 $\mu(f \wedge 1_K)\nu + \mu(1_K \wedge f)\nu = f\mu\nu = 0$, 但是 $\mu(f \wedge 1_K)\nu = \mu T(f \wedge 1_K)\nu = \mu(1_K \wedge f)T\nu =$

$\mu(1_K\wedge f)\nu$, 从而 $\mu(f\wedge 1_K)\nu=0$. 这可导出 $\mathrm{Der}_*\cap\mathrm{Mod}_*\delta_0=0$. 下面我们定义同态

$$D:\pi_{rq+2+k}K\wedge K\to[\Sigma^k K,K],$$
$$D':[\Sigma^k K,K]\to\pi_{rq+2+k}K\wedge K$$

为 $D(g)=(jj'\mu\wedge 1_K)(g\wedge 1_K), D'(h)=(1_K\wedge h)\nu i'i$. 因此, 由引理 6.5.21, $D'D(g)=D'((jj'\mu\wedge 1_K)(1_K\wedge g))=(1_K\wedge jj'\mu\wedge 1_K)(1_K\wedge 1_K\wedge g)\nu i'i=g$, $DD'(h)=D((1_K\wedge h)\nu i'i)=(jj'\mu\wedge 1_K)(1_K\wedge(1_K\wedge h)\nu i'i)=h$, 即 $DD'=1, D'D=1$, D,D' 是互逆的两个同构 (实际上这是 [5] 第 14 章中的 Spanier 对偶同构). 对于 $f\in\ker(i'i)^*$, 存在 $g\in\pi_{rq+2+*}K\wedge K$ 使得 $f=D(g)=(jj'\mu\wedge 1_K)[1_K\wedge(i'i\wedge 1_K)\mu+1_K\wedge\nu_2\mu_2+1_K\wedge\nu(jj'\wedge 1_K)](1_K\wedge g)$ 使得第一项为零, 第三项等于 $\mu g\cdot jj'\in\mathrm{Mod}_*\delta_0$. 我们推断第二项必定属于 Der_*, 这是因为当 $h\in\mathrm{Der}_*$, 则 $D'(h)=(1_K\wedge h)\nu i'i=[(i'i\wedge 1_K)\mu+\nu_2\mu_2+\nu(jj'\wedge 1_K)](1_K\wedge h)\nu i'i=\nu_2\mu_2(1_K\wedge h)\nu i'i$. 这也就是说, 由 $K\wedge K=K\vee\Sigma L\wedge K\vee\Sigma^{rq+2}K$ 所导出的直和分解

$$\pi_*K\wedge K=\pi_*K\oplus\pi_{*-1}L\wedge K\oplus\pi_{*-rq-2}K$$

在同构 D 之下变成本定理所要得的直和分解:

$$[\Sigma^*K,K]=\mathrm{Mod}_*\delta_0\oplus\mathrm{Der}_*\oplus\mathrm{Mod}_*$$

最后, 由定理 6.5.16, 6.5.18 , 6.5.19,

$$\begin{aligned}\mu(i'j'\wedge 1_K)+\mu(1_K\wedge i'j')&=m_K(j'\wedge 1_K)+\mu(1_K\wedge i')(1_K\wedge j')\\&=(j''\wedge 1_K)\mu_2+m_KT(1_K\wedge j')\\&=(j''\wedge 1_K)\mu_2+m_K(j'\wedge 1_K)T\\&=(j''\wedge 1_K)[\mu_2+\mu_2T]\\&=(j''\wedge 1_K)\widetilde{\Delta}\mu=i'j'\mu\end{aligned}$$

从而有 $i'j'\in\mathrm{Der}_*$. 证毕.

定理 6.5.23(文献 [14] p.424) Mod_* 是 $[\Sigma^*K,K]$ 的交换子环, $[\mathrm{Der}_*,\mathrm{Mod}_*]\subset\mathrm{Mod}_*$ 且对具有偶次数的 $f\in\mathrm{Mod}_*$, 有 $\delta'f^p=f^p\delta'$, 其中 [,] 表示换位子.

证 对于 $f,g\in\mathrm{Mod}_*$, $f\cdot g=fg\mu(i'i\wedge 1_K)=f\mu(gi'i\wedge 1_K)=f\mu T(gi'i\wedge 1_K)=f\mu(1_K\wedge gi'i)=\mu(f\wedge 1_K)(1_K\wedge gi'i)=(-1)^{\deg f\cdot\deg g}\mu(1_K\wedge g)(f\wedge 1_K)(1_K\wedge i'i)=(-1)^{\deg f\cdot\deg g}g\mu(f\wedge 1_K)(1_K\wedge i'i)=(-1)^{\deg f\cdot\deg g}gf$. 对于 $f\in\mathrm{Mod}_*, h\in\mathrm{Der}_*$ $\mu(hf\wedge 1_K)=h\mu(f\wedge 1_K)-\mu(1_K\wedge h)(f\wedge 1_K)=hf\mu-\mu(1_K\wedge h)(f\wedge 1_K)$, 而 $\mu(fh\wedge 1_K)=f\mu(h\wedge 1_K)=fh\mu-f\mu(1_K\wedge h)=fh\mu-\mu(f\wedge 1_K)(1_K\wedge h)$, 因此有 $hf-(-1)^{\deg f\cdot\deg h}fh\in\mathrm{Mod}_*$, 得出 $[\mathrm{Der}_*,\mathrm{Mod}_*]\subset\mathrm{Mod}_*$. 最后, 由于 $\delta'=i'j'\in\mathrm{Der}_*$, $\delta'f-f\delta'\in\mathrm{Mod}_*$, 从而有 $f(\delta'f-f\delta')=(\delta'f-f\delta')f$, $\delta'f^2-f^2\delta'=2f(\delta'f-f\delta')$. 利用归纳法可得 $\delta'f^k-f^k\delta'=k\cdot f^{k-1}(\delta'f-f\delta')$, 从而有 $\delta'f^p-f^p\delta'=0$. 证毕.

定理 6.5.24(文献 [6] 命题 3.17) $\mathrm{Der}_*\delta'\subset\mathrm{Mod}_*\delta_0$ 且 $d(\mathrm{Der}_*)\subset\mathrm{Mod}_*$, $\mathrm{Der}_*\cap$

$(\ker d) \subset \mathrm{Mod}_*\delta'$.

证 对于 $g \in \mathrm{Der}_*$, 有 $gi'i = 0$, 从而 $gi' = \eta \cdot j$, 某个 $\eta \in \pi_* K$. η 可扩张为 $\overline{\eta} = \mu(\eta \wedge 1_K) \in \mathrm{Mod}_*$ 使得 $\overline{\eta}i'i = \eta$, 因此 $gi'j' = \overline{\eta}i'ijj' \in \mathrm{Mod}_*\delta_0$. 另一方面,

$$
\begin{aligned}
\overline{\eta} &= \mu(\overline{\eta}i'ijj' \wedge 1_K)\nu = \mu(gi'j' \wedge 1_K)\nu = \mu(1_K \wedge gi'j')\nu \\
&= \mu(1_K \wedge g)(i'i \wedge 1)\mu(1_K \wedge i'j')\nu \\
&\quad + \mu(1_K \wedge g)\nu_2\mu_2(1_K \wedge i'j')\nu + \mu(1_K \wedge g)\nu(jj' \wedge 1_K)(1_K \wedge i'j')\nu \\
&= \mu(1_K \wedge g)\nu_2\mu_2(1_K \wedge i'j')\nu \qquad \text{第 1, 3 项为零} \\
&= -\mu(1_K \wedge g)\nu_2\mu_2 T(1_K \wedge i'j')\nu \qquad \text{由 } \mu_2 T = -\mu_2 + \widetilde{\Delta}\mu \\
&= -\mu(1_K \wedge g)\nu_2\mu_2(i'j' \wedge 1_K)\nu \qquad \text{由 } T\nu = \nu \\
&= -\mu(1_K \wedge g)\nu_2(i'' \wedge 1_K) \qquad \text{由 } \mu_2(i' \wedge 1_K) = i''j \wedge 1_K \\
&= -\mu(1_K \wedge g)(i' \wedge 1_K)\overline{m}_K = -\mu(i' \wedge 1_K)(1_M \wedge g)\overline{m}_K = -d(g),
\end{aligned}
$$

因此有 $d(g) \in \mathrm{Mod}_*$. 更进一步, 如果 $d(g) = 0$, 则 $gi' = \overline{\eta}i'ij = -d(g)i'ij = 0$, 从而有 $g = \overline{g}j'$, 某个 $\overline{g} \in [\Sigma^* M, K]$. 由于 $g\delta_0 = gi'ijj' = 0$, 因此

$$
\begin{aligned}
0 &= \mu(1_K \wedge g\delta_0)\nu = \mu(1_K \wedge g)\nu(jj' \wedge 1_K)(1_K \wedge \delta_0)\nu \\
&\quad + \mu(1_K \wedge g)\nu_2\mu_2(1_K \wedge \delta_0)\nu + \mu(1_K \wedge g)(i'i \wedge 1_K)\mu(1_K \wedge \delta_0)\nu \\
&= \mu(1_K \wedge g)\nu_2\mu_2(1_K \wedge \delta_0)\nu + g \\
&= \mu(1_K \wedge g)\nu_2\mu_2 T(\delta_0 \wedge 1_K)\nu + g \qquad \text{由 } T\nu = \nu \\
&= -\mu(1_K \wedge g)\nu_2\mu_2(\delta_0 \wedge 1_K)\nu + \mu(1_K \wedge g)\nu_2\widetilde{\Delta}\mu(\delta_0 \wedge 1_K)\nu + g \\
&= g + \mu(1_K \wedge g)\nu_2\widetilde{\Delta} \quad \text{由 } \mu_2(\delta_0 \wedge 1_K) = (i''j \wedge 1_K)(ijj' \wedge 1_K) = 0 \\
&= g - \mu(g \wedge 1_K)\nu_2\widetilde{\Delta} \qquad \text{由 } \mu T = \mu, T\nu_2 = -\nu_2 + \nu\overline{\Delta} \\
&= g - \mu(\overline{g}j' \wedge 1_K)\nu_2\widetilde{\Delta} \qquad \text{由 } g = \overline{g}j' \\
&= g - \mu(\overline{g}i \wedge 1_K)(j'' \wedge 1_K)\widetilde{\Delta} = g - \mu(\overline{g}i \wedge 1_K)\delta'
\end{aligned}
$$

从而有 $g = \mu(\overline{g}i \wedge 1_K)\delta' \in \mathrm{Mod}_*\delta'$. 证毕.

定理 6.5.25(文献 [6] 命题 3.19) (1) 对于 $g \in \mathrm{Mod}_*$ 使得 $g\delta' = 0$ (相应的 $\delta' g = 0$), 则存在某个 $\eta \in \mathrm{Mod}_*$ 使得 $g = \eta(j\alpha^r i \wedge 1_K)$ (相应的 $g = (j\alpha^r i \wedge 1_K)\eta$).

(2) 对于 $\eta \in \mathrm{Mod}_*$, $\eta(j\alpha^r i \wedge 1_K) = 0$ 当且仅当 $\eta = d(u)$, 某个 $u \in \mathrm{Der}_*$.

证 (1) 由定理 6.5.18(2), $g\delta_0(j'' \wedge 1_K) = gi'ijj'(j'' \wedge 1_K) = g\delta'\overline{\Delta} = 0$, 则 $g\delta_0 = \overline{\eta}\phi$, 某个 $\overline{\eta} \in [\Sigma^* K, K]$, 其中记 $\phi = (j\alpha^r i \wedge 1_K) \in \mathrm{Mod}_*$. 由定理 6.5.22, $\overline{\eta} = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3\delta_0$, 某个 $\eta_1, \eta_3 \in \mathrm{Mod}_*, \eta_2 \in Der_*$. 因此 $g\delta_0 = \eta_1\phi + \eta_2\phi + \eta_3\delta_0\phi$, 从而 $g = \mu(g\delta_0 \wedge 1_K)\nu = \mu(\eta_2\phi \wedge 1_K)\nu + \mu(\eta_3\delta_0\phi \wedge 1_K)\nu = \mu(\eta_3\phi\delta_0 \wedge 1_K)\nu = \eta_3\phi$, 得出所要的结果, 其中和式的第一项由于 $\eta_2\phi = [\eta_2, \phi] + \phi\eta_2 \in \mathrm{Mod}_* \oplus \mathrm{Der}_*$ 而为零. 相

应地, 如果 $\delta' g = 0$, 有 $g\delta' = g\delta' - (-1)^{\deg g}\delta' g \in \mathrm{Mod}_* \cap \mathrm{Mod}_*\delta' \subset \mathrm{Mod}_* \cap \mathrm{Der}_* = 0$, 从而 $g = \eta\phi = \pm\phi\eta$, 某个 $\eta \in \mathrm{Mod}_*$.

(2) 由 (6.5.12), $d(u)(j\alpha^r i \wedge 1_K)m_K = m_K(1_M \wedge u)\overline{m}_K(j\alpha^r i \wedge 1_K)m_K = m_K(1_M \wedge u)(\alpha^r \wedge 1_K) = m_K(\alpha^r \wedge 1_K)(1_M \wedge u) = 0$, 从而 $d(u)(j\alpha^r i \wedge 1_K) = d(u)(j\alpha^r i \wedge 1_K)m_K(i \wedge 1_K) = 0$. 反之, 如果 $\eta(j\alpha^r i \wedge 1_K) = 0$, 则 $\eta i' i j \alpha^r i = \eta(j\alpha^r i \wedge 1_K)i' i = 0$, 从而 $\eta i' i j \alpha^r = w \cdot j$, 某个 $w \in \pi_* K$. w 可以扩张成 $\overline{w} \in \mathrm{Mod}_*$, 使得 $\overline{w} i' i = w$, 从而 $\eta i' i j \alpha^r = \overline{w} i' i j, \overline{w} i' i j j' = 0, \overline{w} = \mu(\overline{w} i' i j j' \wedge 1_K)\nu = 0$. 因此有 $\eta i' i j \alpha^r = 0, \eta i' i j = v i'$, 某个 $v \in [\Sigma^* K, K]$. 因此得出 $\eta = \mu(\eta\delta_0 \wedge 1_K)\nu = \mu(v\delta' \wedge 1_K)\nu = -d(v_2)$, 其中 v_2 为 v 在 Der_* 中的分量, 而 $\mu(v_2\delta' \wedge 1_K)\nu = -d(v_2)$ 已在定理 6.5.24 中证明. 证毕.

命题 6.5.26 设 $p \geqslant 5$, V, V' 任意谱, 则存在以下直和分解

$$[\Sigma^* V \wedge M, V' \wedge K] = (\ker d)(1_V \wedge i') \oplus (\ker d)(1_V \wedge i' i j)$$

其中 $(\ker d) = (\ker d) \cap [\Sigma^* V \wedge K, V' \wedge K]$

证 对任意 $f \in [\Sigma^* V \wedge M, V' \wedge K]$, $f(1_V \wedge i) = (1_{V'} \wedge \mu(1_K \wedge i' i))f(1_V \wedge i) = (1_{V'} \wedge \mu)(f(1_V \wedge i) \wedge 1_K)(1_V \wedge i' i)$, 其中 $\mu : K \wedge K \to K$ 是环谱 K 的乘法使满足 $\mu(i' i \wedge 1_K) = 1_K = \mu(1_K \wedge i' i)$. 因此, $f = (1_{V'} \wedge \mu)(f(1_V \wedge i) \wedge 1_K)(1_V \wedge i') + f_2(1_V \wedge j) = (1_{V'} \wedge \mu)(f(1_V \wedge i) \wedge 1_K)(1_V \wedge i') + (1_{V'} \wedge \mu)(f_2 \wedge 1_K)(1_V \wedge i' i j)$ 从而结论得出, 这是因为 $d(f_2 \wedge 1_K) = f_2 \wedge d(1_K) = 0$, $d(1_{V'} \wedge \mu) = 1_{V'} \wedge d(\mu) = 0$ (参见定理 6.5.19(G)). 证毕.

参 考 文 献

[1] Adams J F. 1966. On the groups J(X)IV. Topology, **5** 21~71

[2] Smith L. 1970. On realizing complex cobordism modules. Amer J.Math. **92**, 793~856

[3] Toda H. 1971. On realizing exterior parts of the Steenrod algebra. Topology. **10**, 53~65

[4] Brown E H, Peterson F P. 1966. A spectrum whose cohomology is the algebra of reduced p-th powers. Topology. **5**, 149~154

[5] Switzer R M. 1962. Algebraic Topology – Homotopy and Homology. Springer-Verlag

[6] Lin J K. 1992. Nonsplit ring spectra and products of β-elements in the stable homotopy of Moore spaces. Pacific J. Math. **v. 155**, 129~142

[7] Miller H R. 1981. On relations between Adams spectral sequence, with application' to the stable homotopy of Moore space. Journal Pure and Applied Algebra. **20**, 287~312

[8] Cohen R L. Odd primary infinite families in stable homotopy theory. Memoirs of A. M. S. No. 242

[9] Quillen D G. 1964. On the formal group laws of unoriented and complex cobordism thoery. Bull. A. M. S. **75**, 1293~1298

[10] Adams J F, Margolis H R. 1971. Modules over the Steenrod algebra. Topology, **10**, 271～282

[11] Toda H. 1971. Algebra of stable homotopy os Z_p-spaces and applications. J. Math. Kyoto Univ. **11**, 197～251

[12] Oka S. 1974. On the stable homotopy ring of Moore spaces. Hiroshima Math. J. **4**, 629～678

[13] Oka S. 1983. Small ring spectra and p-rank of the stable homotopy of spheres. Contemporary Mathematics. **19**, 267～308

[14] Oka S. 1984. Multiplicative structure of finite ring spectra and stable homotopy of spheres. Algebraic Topology (Aarhus), Lect. Notes in Math. v. 1051, Springer-Verlag, 418～441

[15] Ravenel D C. 1986. Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres. Academic Press, Inc

[16] Oka S. 1977. Module spectra over the Moore spectrum. Hiroshima Math. J. **7**, 93～118

第 7 章　广义 Adams 谱序列

7.1　上代数和上模

定义 7.1.1　域 K 上的上代数 (coalgebra)C 是分次 K 模 C 连同分次 K 模映照 $\psi: C \to C \otimes C$ 和 $\epsilon: C \to K$ 使以下图形可换：

$$\begin{array}{ccc} C\otimes C & \xrightarrow{\epsilon\otimes 1} & K\otimes C \\ & \psi\nwarrow \quad \nearrow\cong & \\ & C & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C\otimes C & \xrightarrow{1\otimes\epsilon} & C\otimes K \\ & \psi\nwarrow \quad \nearrow\cong & \\ & C & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\psi} & C\otimes C \\ \psi\downarrow & & \downarrow\psi\otimes 1 \\ C\otimes C & \xrightarrow{1\otimes\psi} & C\otimes C\otimes C \end{array}$$

其中 ψ 称为上乘法, ϵ 称为上单位. 最右边的图形表示 ψ 是可结合的上乘法. 可见上代数是代数的一种对偶.

例 7.1.2　Hopf 代数是具有乘法 ϕ 和单位 η 的代数, 又是具有上乘法 ψ 和上单位 ϵ 的上代数.

定义 7.1.3　设 C 为域 K 上的上代数, 分次 K 模 L 叫做 C- 上模若存在分次 K 模映照 $\psi_L: L \to C \otimes L$ 使以下图形可换：

$$\begin{array}{ccc} K\otimes L & \xleftarrow{\epsilon\otimes 1} & C\otimes L \\ & \cong\nwarrow \quad \nearrow\psi_L & \\ & L & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C\otimes C\otimes L & \xleftarrow{\psi_C\otimes 1} & C\otimes L \\ \uparrow 1\otimes\psi_L & & \uparrow\psi_L \\ C\otimes L & \xleftarrow{\psi_L} & L \end{array}$$

其中 ψ_L 称为上模作用. ψ_C 为 C 的上乘法, ϵ 为 C 的上单位.

设 E 为可交换环谱 (见命题 3.4.7), 即有乘法 $\mu: E \wedge E \to E$ 和单位 $\iota: S^0 \to E$ 使得 $\mu\tau = \mu, \mu(\iota \wedge 1_E) = 1_E$. 注意到 $E_*(E) = [\Sigma^* S^0, E \wedge E] = \pi_*(E \wedge E)$, 因此 $E_*(E)$ 可给予左 $E_*(S^0)$ 模和右 $E_*(S^0)$ 模结构如下：

$$\pi_*(E) \otimes \pi_*(E \wedge E) \to \pi_*(E \wedge E \wedge E) \xrightarrow{(\mu\wedge 1)_*} \pi_*(E \wedge E)$$

$$\pi_*(E \wedge E) \otimes \pi_*(E) \to \pi_*(E \wedge E \wedge E) \xrightarrow{(1\wedge \mu)_*} \pi_*(E \wedge E)$$

因此 $E_*(E)$ 是 $E_*(S^0)$ 双模 (bimodule). 这两个模作用一般的不相等. 以下关于 $E_*(E)$ 是 Hopf 代数的概念要注意区别这两种模结构.

定理 7.1.4(文献 [1] 定理 17.8)　设 E 为可交换环谱使 $E_*(E) = C$ 作为 $E_*(S^0) = R$ 模是平坦的 (见定义 4.1.7), 则 C 是具有乘法 $\phi: C \otimes C \to C$ 和左右单位 $\eta_L, \eta_R: R \to C$, 具有上乘法 $\psi_E: C \to C \otimes C$ 和上单位 $\epsilon: C \to R$ 的 Hopf 代数, 而且对任意谱 X, $E_*(X)$ 是 C 上模, 有 C 上模作用 $\psi_X: E_*(X) \to C \otimes_R E_*(X)$. 另外, ϕ, η_L, η_R, ϵ 满

足

(1) 对 $\lambda \in R$, $x \in C$ 有

$$\lambda x = \phi(\eta_L(\lambda) \otimes x),\ x\lambda = \phi(x \otimes \eta_R(\lambda))$$

(2) 存在典则反自同构 $c: C \to C$ 使 $c\eta_L = \eta_R$, $\epsilon c = \epsilon$ 且 $c^2 = 1$.

(3) $\epsilon\eta_L = 1 = \epsilon\eta_R$.

(4) $\psi_E(1) = 1 \otimes 1$, 从而有 $\psi_E\eta_L(\lambda) = \eta_L(\lambda) \otimes 1$.

证　$\phi: C \otimes C \to C$ 定义为

$$E_*(E) \otimes E_*(E) \xrightarrow{\wedge} E_*(E \wedge E) \xrightarrow{\mu_*} E_*(E)$$

而 η_L, η_R, ϵ 和 c 定义为

$$\begin{aligned}
\eta_L:&\quad \pi_*(E) \cong \pi_*(E \wedge S^0) \xrightarrow{(1\wedge\iota)_*} \pi_*(E \wedge E)\\
\eta_R:&\quad \pi_*(E) \cong \pi_*(S^0 \wedge E) \xrightarrow{(\iota\wedge 1)_*} \pi_*(E \wedge E)\\
\epsilon:&\quad \pi_*(E \wedge E) \xrightarrow{\mu_*} \pi_*(E)\\
c:&\quad \pi_*(E \wedge E) \xrightarrow{\tau_*} \pi_*(E \wedge E)
\end{aligned}$$

其中 $\tau: E \wedge E \to E \wedge E$ 为交换映射. 对任意谱 X, 由于 $E_*(E)$ 作为右 $E_*(S^0)$ 模是平坦的, 则

$$m: \pi_*(E \wedge E) \otimes_{\pi_*(E)} \pi_*(E \wedge X) \to \pi_*(E \wedge E \wedge E \wedge X) \xrightarrow{(1\wedge\mu\wedge 1)_*} \pi_*(E \wedge E \wedge X)$$

是一个同构 (参见文献 [1]13.75), 因此令 ψ_X 为以下合成

$$\pi_*(E \wedge X) \cong \pi_*(E \wedge S^0 \wedge X) \xrightarrow{(1\wedge\iota\wedge 1)_*} \pi_*(E \wedge E \wedge X) \overset{m}{\cong} C \otimes \pi_*(E \wedge X)$$

令 $X = E$, 则得出 ψ_E. 我们省略以下的验证过程. 证毕.

定义 7.1.5　设 C 为域 K 上的上代数, M, N 为 C 上模, 令

$$\cdots \to X_2 \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$$

为 M 的投射分解 (即 X_i 是投射的 C 上模, 关于投射的上模的定义完全类似于投射模), 定义

$$\mathrm{Ext}_C^{s,t}(M, N) = H^s(\mathrm{Hom}_C^t(X_*, N))$$

且 Ext 不依赖于 M 的投射分解的选择.

注　设 $E = KZ_p$ 为 E-M 谱, 则 $KZ_{p*}KZ_p = A^*$, $\bmod p$ Steenrod 代数 A 的对偶. 因此对任意谱 X, Y, Z_p 同调群 $H_*(X)$, $H_*(Y)$ 是 A^*- 上模, 从而可作出 $\mathrm{Ext}_{A^*}^{s,t}(H_*(X), H_*(Y))$. 特别地当 $X = Y = S^0$, 则它变成为

$$\mathrm{Ext}_{A^*}^{s,t}(Z_p, Z_p)$$

这个双分次 Z_p 向量空间和 Steenrod 代数 A 的上同调 $H^{s,t}(A) = \mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_p, Z_p)$ 是

同构的. 若令 $E=BP$, 则

$$\mathrm{Ext}^{s,t}_{BP_*BP}(BP_*(X),BP_*(Y))$$

将是本章 7.2 节中广义 Adams 谱序列的 E_2 项.

定义 7.1.6 设 C 为上代数, 具有上乘法 $\psi: C\to C\otimes C$, 而 V 为 K 模, 则 $C\otimes_K V$ 可给予如下的 C 上模结构

$$C\otimes_K V\xrightarrow{\psi\otimes 1}(C\otimes_K C)\otimes_K V\cong C\otimes_K(C\otimes_K V)$$

称$C\otimes_K V$ 为扩充上模 (试同定义 4.1.6 比较).

和定理 4.1.8 类似, 我们有以下关于环的改变的命题.

命题 7.1.7 对任意 K 模 V 和 C 上模 M, 有自然同构 $\Phi:\mathrm{Hom}^t_C(M,C\otimes_K V)\cong \mathrm{Hom}^t_K(M,V)$ $(t\in\mathbf{Z})$, 因此有同构

$$\mathrm{Ext}^{s,t}_C(M,C\otimes_K V)\cong\mathrm{Ext}^{s,t}_K(M,V)$$

证 互逆的同构 Φ,Ψ 可与定理 4.1.8(a) 中有类似的构造. 证明留给读者.

在一些特殊情况, $\mathrm{Ext}^{s,t}_C(M,N)$ 可用另一方式计算, 这将在 7.2 节广义 Adams 谱序列中用到.

命题 7.1.8 设 M 为 C 上模使作为 K 模是投射的, 则 $\mathrm{Ext}^{s,t}_C(M,N)$ 可构造如下. 设

$$0\to N\to C\otimes_K V_0\to C\otimes_K V_1\to\cdots$$

为 C 上模恰当序列 (V_i 为 K 模), 则

$$\mathrm{Ext}^{s,t}_C(M,N)\cong H^s(\mathrm{Hom}^t_C(M,C\otimes_K V_*))\quad s\geqslant 0,t\in Z$$

证 见 [1] p.463.

7.2 广义 Adams 谱序列

广义 Adams 谱序列

$$E_2^{s,t}=\mathrm{Ext}^{s,t}_{E_*(E)}(E_*(X),E_*(Y))\Rightarrow[X,Y]_{t-s}$$

首先由 Novikov[2] 对 $E=$Thom 谱 MU 得出. 下面我们对一般的环谱 E 和 $X=S^0$ 加以叙述并证明.

定理 7.2.1 (文献 [1] 定理 19.9) 设 E 为环谱使 $E_*(E)$ 在 $E_*(S^0)$ 上是平坦的, 则对任意谱 Y, 存在自然谱序列 $\{E_r^{s,t},d_r^{s,t}\}$ 使

(1) $E_2^{s,t}=\mathrm{Ext}^{s,t}_{E_*(E)}(E_*(S^0),E_*(Y))$.

(2) $d_r^{s,t}: E_r^{s,t}\to E_r^{s+r,t+r-1}$(所有 r, s, t).

(3) 当 $r>s+1$ 有 $E_{r+1}^{s,t}\subset E_r^{s,t}$ 且 $\bigcap\limits_{r>s+1}E_r^{s,t}=E_\infty^{s,t}$, 并存在滤子

$$\pi_n(Y) = [\Sigma^n S^0, Y] = F^{0,n} \supset F^{1,n+1} \supset \cdots \supset F^{s,n+s} \supset$$

(4) 有单同态 $0 \to F^{s,t}/F^{s+1,t+1} \to E_\infty^{s,t}$, 且边同态 $\pi_n(Y) \to E_\infty^{0,n} \to E_2^{0,n} = \mathrm{Hom}^n_{E_*E}(E_*S^0, E_*Y)$ 为 Hurewicz 同态.

证　令 $Y_0 = Y$, $f_0 \colon Y_0 \to E \wedge Y_0$ 定义为

$$Y_0 \simeq S^0 \wedge Y_0 \xrightarrow{\iota \wedge 1} E \wedge Y_0$$

令 $Y_0 \xrightarrow{f_0} E \wedge Y_0 \to Y_1$ 为上纤维序列. 若 Y_n 已作出, 取上纤维序列 $Y_n \xrightarrow{f_n} E \wedge Y_n \to Y_{n+1}$ 来作出 Y_{n+1}. 因此有 Adams 分解

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \xrightarrow{g_n} \Sigma^{-n}Y_n \to \cdots & \xrightarrow{g_2} \Sigma^{-2}Y_2 & \xrightarrow{g_1} \Sigma^{-1}Y_1 & \xrightarrow{g_0} Y_0 = Y \\
\downarrow f_n & \downarrow f_2 & \downarrow f_1 & \downarrow f_0 \\
\Sigma^{-n}E \wedge Y_n & \Sigma^{-2}E \wedge Y_2 & \Sigma^{-1}E \wedge Y_1 & E \wedge Y_0
\end{array}$$

使 $\Sigma^{-n-1}Y_{n+1} \xrightarrow{g_n} \Sigma^{-n}Y_n \xrightarrow{f_n} \Sigma^{-n}E \wedge Y_n$ 为上纤维序列. 因为以下图形可换:

$$\begin{array}{ccc}
\pi_*(E \wedge Y_n) & \xrightarrow{1} & \pi_*(E \wedge Y_n) \\
\cong\downarrow & \searrow f_{n*} & \uparrow (\mu \wedge 1)_* \\
\pi_*(E \wedge S^0 \wedge Y_n) & \xrightarrow{(1\wedge\iota\wedge 1)_*} & \pi_*(E \wedge E \wedge Y_n)
\end{array}$$

因此 f_{n*} 是单同态, 从而由上纤维序列导出的广义同调恰当序列

$$\cdots \to E_q(Y_n) \xrightarrow{f_{n*}} E_q(E \wedge Y_n) \to E_q(Y_{n+1}) \to E_{q-1}(Y_n) \to \cdots$$

化成为短恰当序列 $(n \geqslant 0)$

$$0 \to E_q(Y_n) \to E_q(E \wedge Y_n) \to E_q(Y_{n+1}) \to 0$$

合起来有长恰当序列

$$0 \to E_*(Y) \to E_*(E \wedge Y_0) \to E_*(E \wedge Y_1) \to \cdots$$

因为$E_*(E \wedge Y_n) \overset{m_*}{\cong} E_*(E) \otimes_{E_*(S^0)} E_*(Y_n)$(见 [1]13.75) 是扩充 $E_*(E)$- 上模, 由命题 7.1.8

$$\mathrm{Ext}^{s,t}_{E_*E}(E_*S^0, E_*Y) = H^s \mathrm{Hom}^t_{E_*E}(E_*S^0, E_*(E \wedge Y_*))$$

另外, 由上纤维序列导出的同伦群恰当序列

$$\cdots \to \pi_t(Y_s) \xrightarrow{f_{s*}} \pi_t(E \wedge Y_s) \xrightarrow{h_{s*}} \pi_t(Y_{s+1}) \xrightarrow{g_{s*}} \pi_{t-1}(Y_s) \to \cdots$$

得出恰当偶

$$\begin{array}{ccc}
\sum_{s,t} \pi_t(Y_{s+1}) & \xrightarrow{\Sigma g_{s*}} & \sum_{s,t} \pi_t(Y_s) \\
\Sigma h_{s*} \nwarrow & & \swarrow \Sigma f_{s*} \\
& \sum_{s,t} \pi_t(E \wedge Y_s) &
\end{array}$$

$\sum g_{s*}$ 有次数 $(-1,-1)$, $\sum f_{s*}$ 有次数 $(0,0)$, $\sum h_{s*}$ 有次数 $(1,0)$, 因此类似于第四章

定理 4.3.3, 有谱序列 $\{E_r^{s,t}, d_r^{s,t}\}$ 满足 (2)~(4), 其中 $F^{s,t} = \{\text{im}: \pi_t(Y_s) \to \pi_{t-s}(Y)\}$, 我们只要证明 (1).

以上谱序列的 E_1 项为 $E_1^{s,t} = \pi_t(E \wedge Y_s)$ 而微分算子 $d_1^{s,t}: E_1^{s,t} \to E_1^{s+1,t}$ 为 $d_1^{s,t} = f_{s+1*}h_{s*}$. 设 H 为 Hurewicz 同态, 则有可换图形

$$\begin{array}{ccc}
\pi_t(E \wedge Y_s) & \xrightarrow{H} & \text{Hom}_{E_*E}^t(E_*S^0, E_*(E \wedge Y_s)) \\
h_{s*} \downarrow & & \downarrow \\
\pi_t(Y_{s+1}) & \xrightarrow{H} & \text{Hom}_{E_*E}^t(E_*S^0, E_*Y_{s+1}) \\
f_{s+1*} \downarrow & & \downarrow \\
\pi_t(E \wedge Y_{s+1}) & \xrightarrow{H} & \text{Hom}_{E_*E}^t(E_*S^0, E_*(E \wedge Y_{s+1}))
\end{array}$$

因为对任意谱 Z 有以下可换图形:

$$\begin{array}{ccc}
\pi_t(E \wedge Z) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{E_*S^0}^t(E_*S^0, E_*Z) \\
\downarrow H & & \cong\downarrow \psi \\
\text{Hom}_{E_*E}^t(E_*S^0, E_*(E \wedge Z)) & \underset{\cong}{\xleftarrow{\text{Hom}(1,m_*)}} & \text{Hom}_{E_*E}^t(E_*S^0, E_*(E) \otimes_{E_*S^0} E_*Z)
\end{array}$$

其中上横行显然是同构, 右纵行由环的改变定理 (命题 7.1.7) 是同构. 由 m_* 平坦同构得出下横行同构, 因此 H 为同构, 从而有

$$\begin{aligned}
E_2^{s,t} &= \ker d_1^{s,t} / \text{im}\, d_1^{s,t} = H^s(\text{Hom}_{E_*E}^t(E_*S^0, E_*(E \wedge Y)) \\
&= \text{Ext}_{E_*E}^{s,t}(E_*S^0, E_*Y)
\end{aligned}$$

谱序列自然性的证明留给读者. 证毕.

命题 7.2.2 若环谱 E 的单位 $\iota: S^0 \to E$ 当 $q \leqslant 0$ 导出同构 $\iota_*: \pi_q(S^0) \to \pi_q(E)$ 而当 $q = 1$ 是满的, 且 Y 为连通谱, 则广义 Adams 谱序列收敛于 $\pi_*(Y)$: $E_2^{s,t} \Rightarrow \pi_{t-s}(Y)$.

证 因为 Y 是连通谱, 因此 $\pi_r(Y) = 0$ $(r < N)$. 我们先证明 $\pi_r(Y_n) = 0$ $(r < N + 2n)$. 当 $n = 0$ 是正确的. 归纳假设 $\pi_r(Y_n) = 0$ $(r < N + 2n)$ 已成立, 则有恰当序列

$$\begin{aligned}
&\pi_{2n+N+1}(Y_n) \xrightarrow{(\iota\wedge 1)_*} \pi_{2n+N+1}(E \wedge Y_n) \to \pi_{2n+N+1}(Y_{n+1}) \\
&\to \pi_{2n+N}(Y_n) \xrightarrow{(\iota\wedge 1)_*} \pi_{2n+N}(E \wedge Y_n) \to \pi_{2n+N}(Y_{n+1})
\end{aligned}$$

因为 Hurewicz 同态 $(\iota \wedge 1)_*: \pi_q(Y_n) \to \pi_q(E \wedge Y_n) = E_q(Y_n)$ 当 $q \leqslant N + 2n$ 为同构, 当 $q = N + 2n + 1$ 满, 因此 $\pi_{2n+N+1}(Y_{n+1}) = \pi_{2n+N}(Y_{n+1}) = 0$. 完成了归纳法. 因此 $\pi_{t+s}(Y_s) = 0$ 当 $s > t - N$, 从而当 t 固定有

$$\bigcap_{s \geqslant 0} F^{s,t+s} = \bigcap_{s \geqslant 0} \text{im}\,[\pi_{t+s}(Y_s) \to \pi_t(Y_s)] = 0$$

谱序列收敛. 证毕.

注 命题 7.2.2 中 E 的条件是

$$\pi_q(E)=\begin{cases}0, & \text{当 } q<0\\ Z, & \text{当 } q=0\\ Z \text{ 或 } Z_2, & \text{当 } q=1\end{cases}$$

这当 $E=MU, MSp$ 时是成立的. 另外, 根据第六章推论 6.3.13 后面的注, MU p 局部化是若干个 BP 谱 p 局部化的一点和, 因此有广义 Adams 谱序列

$$E_2^{s,t}=\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s,t}(BP_*(S^0),BP_*(Y))\Rightarrow \pi_{t-s}(Y)_p$$

这个谱序列也是计算球面稳定同伦群 $\pi_*(S^0)_p$ 的重要工具.

7.3 广义 Adams 谱序列中的边缘同态

设 $W\to X\to Y\xrightarrow{h}\Sigma W$ 为有限谱的上纤维序列使导出同态 $h_*=0\colon BP_*(Y)\to BP_*(\Sigma W)$, 因此有短恰当序列

(7.3.1) $$0\to BP_*(W)\to BP_*(X)\to BP_*(Y)\to 0$$

而 (7.3.1) 导出的 Ext 长恰当序列有边缘同态

$$\delta\colon \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s,t}(BP_*(K),BP_*(Y))\to \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s+1,t}(BP_*K,BP_*Y)$$

其中 K 为任意谱. Bruner[3] 证明了

定理 7.3.2 δ 和广义 Adams 谱序列中的微分算子可交换, 并且 δ 收敛到同态

$$h_*\colon [K,Y]\to[K,\Sigma W]$$

在证明定理7.3.2 之前, 先证明一个引理.

引理 7.3.3 以上的映射 $h\colon Y\to\Sigma W$ 导出 Y 和 ΣW 的 Adams 分解之间的映射 D, 但是其滤子有一个移动

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots\to & \Sigma^{-2}Y_2\to & \Sigma^{-1}Y_1\to & Y & \\ & \swarrow D & \swarrow D & \swarrow D & \downarrow h\\ \cdots\to\Sigma^{-2}W_3\to & \Sigma^{-1}W_2\to & W_1\to & \Sigma W &\end{array}$$

证 注意到广义 Adams 分解中

$$\Sigma^{-1}Y_{i+1}\to Y_i\to Y_i\wedge BP$$

是上纤维序列. 设 $h_*=0\colon BP_*(Y)\to BP_*(\Sigma W)$, 因此 $Y\xrightarrow{h}\Sigma W\to\Sigma W\wedge BP$ 零伦, 从而 h 有提升 $D\colon Y\to W_1$, 剩下的 D 的存在就像第四章命题 4.3.8 中经典的 Adams 谱序列自然性的证明一样. 证毕.

设 $E_r^{*,*}(K,Y)$ 为广义 Adams 谱序列的 E_r 项, 收敛到 $[K,Y]_*$, 其滤子

$$F^s[K,Y]=\{\mathrm{im}\colon[K,Y_s]\to[K,Y]\}$$

而 $E_\infty^{s,*} = F^s/F^{s+1}$.

引理 7.3.3 中的映射 D 导出两个恰当偶之间的映射, 从而导出广义 Adams 谱序列之间的映射

$$D_r\colon E_r^{s,t}(K,Y) \to E_r^{s+1,t}(K,W)$$

由引理 7.3.3, $h_*F^s[K,Y] \subset F^{s+1}[K,W]$, 因此也导出同态 $h_*\colon E_\infty^{s,t}(K,Y) \to E_\infty^{s+1,t}(K,W)$, 这恰好是 D_∞, 因此定理 7.3.2 的证明归结为以下命题的证明.

命题 7.3.4 $D_2 = \delta$ 而且和谱序列的微分算子可交换.

证 由同调代数的知识, Ext 群的每个元素可看作恰当序列的等价类, 而边缘同态 δ 将恰当序列 x 变成恰当序列 δx, 其中 δx 是恰当序列 x 和短恰当序列 (7.3.1) 的 Yoneda 合成.

另一方面, $D_2\colon \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s,t}(BP_*K, BP_*Y) \to \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s+1,t}(BP_*K, BP_*W)$ 是由同态 $D_*\colon BP_*Y \to BP_*W_1$ 所导出. 因为如果将Ext群元素的以下两种定义

(1) d_1 上循环 $\mathrm{mod}\, d_1$ 上边缘;

(2) 恰当序列的等价类

等同起来, 则以下可换图形说明了以上事实:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & \to & BP_*Y & \to & BP_*(Y\wedge BP) & \to & BP_*(Y_1\wedge BP) & \to & \cdots \\
 & & & & \downarrow D_* & & \downarrow D_* & & \downarrow D_* & & \\
0\to BP_*W & \to & BP_*(W\wedge BP) & \to & BP_*W_1 & \to & BP_*(W_1\wedge BP) & \to & BP_*(W_2\wedge BP) & \to & \cdots \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & & & & \\
 & & 0 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

因此要证明 $D_2 = \delta$, 只要证明存在以下可换图形

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to BP_*W & \to & BP_*X & \to & BP_*Y \to 0 \\
\| & & \downarrow & & \downarrow D_* \\
0 \to BP_*W & \to & BP_*(W\wedge BP) & \to & BP_*W_1 \to 0
\end{array}$$

而这直接由以下由 D 导出的上纤维序列的同伦可换图形

$$\begin{array}{ccccccc}
W & \to & X & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{h} & \Sigma W \\
\| & & \downarrow & & \downarrow D & & \| \\
W & \to & W\wedge BP & \to & W_1 & \longrightarrow & \Sigma W
\end{array}$$

得出.$D_2 = \delta$ 和微分算子可换的证明留给读者. 证毕.

下面叙述 Johnson 等 [4] 定理 1.7 得出的关于边缘同态 δ 的一个重要性质.

定理 7.3.5 $W \to X \to Y \xrightarrow{h} \Sigma W$ 为有限谱上纤维序列如上所述. 若 $\bar{x} \in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s,t}(BP_*, BP_*Y)$ 在广义 Adams 谱序列中留存 (survive) 到 $x \in \pi_{t-s}(Y)_p$, 则 $\delta\bar{x} \in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s+1,t}(BP_*, BP_*W)$ 留存到 $h_*x \in \pi_{t-s-1}(W)_p$.

证　对 s 作归纳. 当 $s=0$, $\bar{x}\in \mathrm{Ext}^{0,t}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*Y)$ 留存到 $x\in\pi_t(Y)_p$, 则 $\alpha_1D_1(x)=h_*x\neq 0$, 不然 $D_1(x)=\eta_1(x')$ 某个 $x'\in\pi_{t+1}(\Sigma W\wedge BP)$, 这将有 $\xi_1D_1(x)$ 代表的上同调类为零, 即 $\delta\bar{x}=0\in \mathrm{Ext}^{1,t}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*W)$, 矛盾. 因此 $\delta\bar{x}$ 留存到 $h_*(x)\in\pi_{t-1}(W)_p$.

设 $s>0$. 由假设, 有 $z\in\pi_k(Y_s)$ $(k=t-s)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\cdots\to\Sigma^{-s}Y_s & \xrightarrow{\beta_s} & \Sigma^{-s+1}Y_{s-1} & \to\cdots\xrightarrow{\beta_2} & \Sigma^{-1}Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Y\\
D_{s+1}\downarrow & & D_s\downarrow & & D_2\downarrow & & \\
\cdots\to\Sigma^{-s}W_{s+1} & \xrightarrow{\alpha_{s+1}} & \Sigma^{-s+1}W_s & \xrightarrow{\alpha_s}\cdots\xrightarrow{\alpha_3} & \Sigma^{-1}W_2 & & \\
\xi_{s+1}\downarrow & \eta_s\nwarrow & \downarrow\xi_s & & \xi_2\downarrow & & \\
\Sigma^{-s}W_{s+1}\wedge BP & & \Sigma^{-s+1}W_s\wedge BP & & \Sigma^{-1}W_2\wedge BP & &
\end{array}
$$

使 $\beta_1\beta_2\cdots\beta_s(z)=x$, 由自然性 $h_*x=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{s+1}D_{s+1}(z)$. 另外, 下图中 $A=1$, 图形显然可换:

$$
\begin{array}{ccccc}
\cdots\to\Sigma^{-s-1}W_{s+2} & \xrightarrow{\alpha_{s+2}} & \Sigma^{-s}W_{s+1} & \xrightarrow{\alpha_{s+1}} & \Sigma^{-s+1}W_s\\
\uparrow\alpha_{s+3} & \nwarrow A & \uparrow\alpha_{s+2} & \nwarrow A & \uparrow\alpha_{s+1}\\
\cdots\to\Sigma^{-s-2}W_{s+3} & \xrightarrow{\alpha_{s+3}} & \Sigma^{-s-1}W_{s+2} & \xrightarrow{\alpha_{s+2}} & \Sigma^{-s}W_{s+1}
\end{array}
$$

且易证 $(\alpha_{s+1})_*=0\colon BP_*(\Sigma^{-s}W_{s+1})\to BP_*(\Sigma^{-s+1}W_s)$, 因此有短恰当序列

$$0\to BP_*(\Sigma^{-s+1}W_s)\to BP_*(\Sigma^{-s+1}W_s\wedge BP)\xrightarrow{\eta_s} BP_*(\Sigma^{-s}W_{s+1})\to 0$$

其中 η_s 有次数 -1. 它导出的 Ext 长恰当序列的边缘同态为

$$
\begin{array}{ccc}
\delta'\colon \mathrm{Ext}^{0,k}(BP_*, BP_*(\Sigma^{-s}W_{s+1})) & \to & \mathrm{Ext}^{1,k+1}(BP_*, BP_*\Sigma^{-s+1}W_s)\\
\| & & \|\\
1\colon \mathrm{Ext}^{s+1,s+k}(BP_*, BP_*W) & \to & \mathrm{Ext}^{s+1,s+k}(BP_*, BP_*W)
\end{array}
$$

由引理 7.3.3 可知, δ' 由 $A=1$ 导出, 因此 δ' 实际上是恒等. 由 $\delta\bar{x}\neq 0$ 可得 $D_{s+1}(z)\neq 0$, 即 $\delta\bar{x}\in\mathrm{Ext}^{0,k}(BP_*, BP_*(\Sigma^{-s}W_{s+1}))$ 留存到 $D_{s+1}(z)\neq 0$, 因此由以上关于 $s=0$ 已证的结论, $\delta'\delta\bar{x}=\delta\bar{x}$ 留存到 $\alpha_{s+1}D_{s+1}(z)\neq 0$. 如此归纳下去, $\delta\bar{x}$ 留存到 $\alpha_1\cdots\alpha_s\alpha_{s+1}\cdot D_{s+1}(z)=h_*x\neq 0$. 证毕.

参 考 文 献

[1] Switzer R M. 1975. Algebraic topology—Homotopy and Homology. Springer-Verlag

[2] Novikov S P. 1967. The methods of algebraic topology from the view point of cobordism theories. Math. U.S.S.R. Izvestlia, 827~913

[3] Bruner R. 1977. Algebraic and geometric connecting homomorphisms in the Adams spectral sequence. Lect. Notes in Math. Vol. 658, 131~ 133

[4] Johnson D C. 1975. Miller H.R. and Wilson W.S., Adams spectral squence and the nontriviality of infinitely many γ_t in stable homotopy. Notas de Math. Symp. Num.1:Reunion Sobre teoria de Homotopia, ed. D.Davis 29~46. Soc. Mat. Mexi. Mexico. D.F.

[5] Miller H R, Ravenel D G, Wilson W S. 1977. Periodic phenomena in the Adams-Novikov spectral sequence. Ann. of Math. **106**, 469~516

第 8 章　球面稳定同伦群研究概况

设 S^n 为 n 维球面, 第 3 章例 3.1.1 中已指出, 当 $n > r+1$, $\pi_{n+r}(S^n)$ 叫做球面的 r 柄稳定同伦群. 用球谱 S^0 来描述, $\pi_r(S^0)$ 就是上述 r 柄球面同伦群. 文献中常简记为 π_r^s. J.P. Serre 已证明 π_r^s $(r>0)$ 是有限群, 因此它的 p 局部化 $\pi_r(S^0)_p = {}_p\pi_r^s$ 就是它的 p 分量群 (p-primary).

$\pi_*(S^0)_p$ 的计算是代数拓扑学的中心问题之一, 也是一个很困难的问题. 经典的 Adams 谱序列 (见第 4 章)

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_p, Z_p) \Rightarrow \pi_{t-s}(S^0)_p$$

和广义 Adams 谱序列 (见第 7 章)

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s,t}(BP_*, BP_*) \Rightarrow \pi_{t-s}(S^0)_p$$

是 $\pi_*(S^0)_p$ 的主要计算工具. 本章将以综合报告的形式叙述近代 (1990 年前) 关于用 Adams 谱序列计算 $\pi_*(S^0)_p$ 的部分结果. 由于编者所知道的范围以及篇幅所限, 这里的叙述不是全面的.

8.1　关于 BP 的一些结论

6.3 节中引进了 Brown-Peterson 谱 BP 使 $H^*(BP) \cong A/(Q_0)$, 而 $\pi_*(BP) = Z[v_1, v_2, \cdots]$, 其中 $|v_i| = 2(p^i - 1)$.

下面我们总是用 BP 表示 BP 的 p 局部化, 因此

$$BP_* = BP_*(S^0) = \pi_*(BP) = Z_{(p)}[v_1, v_2, \cdots]$$

而且对任意谱 X, 广义同调群 $BP_*(X)$ 在 $BP_* \otimes BP_*(X) \to BP_*(S^0 \wedge X) \cong BP_*X$ 模作用之下是 BP_* 模. 因为 BP 是环谱, 由第 7 章定理 7.1.5, BP_*BP 是 Hopf 代数, 而且 BP_*X 是 BP_*BP 上模.

首先, BP_*BP 可用 Atiyah-Hirzebruch 谱序列

$$E_2^{s,t} = H_s(BP, \pi_t(BP)) \Rightarrow BP_{s+t}(BP)$$

来计算. 因为这时A-H 谱序列是重合的, 因此

$$\begin{aligned} BP_*BP &= H_*(BP, \pi_*(BP)) \\ &= BP_* \otimes Z_{(p)}[t_1, t_2, \cdots] \end{aligned}$$

$$=BP_*[t_1,t_2,\cdots]$$

其中 t_i 由 $H_{2(p^i-1)}(BP)$ 而来 (Steerod 代数的对偶 $A^* = E[\tau_0,\tau_1,\cdots]\otimes P[\xi_1,\xi_2,\cdots]$, 而 $H_*(BP)\cong Z_{(p)}[\xi_1,\xi_2,\cdots]$, 因此 t_i 是与 ξ_i 相对应的生成元).

Quillen[1] 用形式群律引进谱 BP, 可以较容易地确定 BP_*BP 的 Hopf 代数构造.[1] 得出

$$H_*(BP)=Z_{(p)}[m_1,m_2,\cdots]$$

其中 $|m_i|=2(p^i-1)$, 在 Hurewicz 同态下 $\pi_*(BP)=Z_{(p)}[v_1,v_2,\cdots]$ 嵌入 $H_*(BP)$ 有以下关系:

$$v_n=pm_n-\sum_{i=1}^{n-1}v_{n-i}^{p^i}m_i$$

而 $C=BP_*BP$ 的上乘法 $\psi{:}\,C\to C\otimes_{BP_*}C$ 为

$$\sum_{i+j=n}m_i(\psi t_j)^{p^i}=\sum_{i+j+k=n}m_it_j^{p^i}\otimes t_k^{p^{i+j}}$$

左和右单位 $\eta_L,\eta_R{:}\,BP_*\to C$ 为

$$\eta_Lv_n=v_n$$
$$\eta_Rm_n=\sum_{i+j=n}m_it_j^{p^i}$$

其中$m_0=t_0=1$. 上单位 ϵ 和典则反自同构 c 为

$$\epsilon v_n=v_n,\ \epsilon t_n=0$$
$$\sum_{i+j+k=n}m_it_j^{p^i}(ct_k)^{p^{i+j}}=m_n$$

定义 8.1.1 理想 $I\subset BP_*$ 称为不变理想当且仅当 $I\cdot BP_*BP=BP_*BP\cdot I$. 元素 $a\in BP_*$ 称为 mod I 不变的, 如果

$$\eta_Ra=\eta_La \quad \mathrm{mod} \quad I\cdot BP_*BP$$

Landeweber[2] 证明了不变的素理想只有

$$I_n=(p,v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}) \qquad (1\leqslant n\leqslant\infty)$$

即由 $p,v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 生成的理想 (规定 $v_0=p$). 其他重要的不变理想有 $(p,v_1,\cdots,v_{n-1}^j)$, 适当的 j, 等等.

下面设 $p>2$. 若 $n\geqslant 0$, $s\geqslant 1$, 则 $v_1^{sp^n}$ 是 mod (p^{n+1}) 不变的, 因此以下同态

$$v_1^{sp^n}{:}\,BP_*\to BP_*/(p^{n+1})$$

将 $1\in BP_*$ 映成 $v_1^{sp^n}\in$ (mod (p^{n+1})) 是 BP_*BP 不变的同态, 即 $v_1^{sp^n}\in\mathrm{Ext}_C^{0,2sp^n(p-1)}(BP_*,BP_*/(p^{n+1}))$. 注意到以下短恰当序列

$$0\to BP_*\xrightarrow{p^{n+1}}BP_*\to BP_*/(p^{n+1})\to 0$$

导出的 Ext 长恰当序列 ($C = BP_*BP$) 有边缘同态

$$\delta\colon \mathrm{Ext}_C^{s,t}(BP_*, BP_*/(p^{n+1})) \to \mathrm{Ext}_C^{s+1,t}(BP_*, BP_*)$$

令

$$\alpha_{sp^n/n+1} = \delta v_1^{sp^n} \in \mathrm{Ext}_C^{1,*}(BP_*, BP_*)$$

Novikov[3] 和 Miller 等 [4] 得出了 $\mathrm{Ext}_C^{1,*}(BP_*, BP_*)$ 的全部生成元如下.

定理 8.1.2(Novikov[3] 或 Miller 等 [4] 定理 2.2)　(a) 当 $p > 2$, $\mathrm{Ext}_C^{1,*}(BP_*, BP_*)$ 由 $\alpha_{sp^n/n+1}(n \geqslant 0,\ p$ 不整除 $s,\ s \geqslant 1)$ 所生成, 而 $\alpha_{sp^n/n+1}$ 的阶数为 p^{n+1}.

(b) 对 $m, n > 0$ 和 $s, t \geqslant 1$ 有以下关系:

$$\alpha_{sp^m/m+1} \cdot \alpha_{tp^n/n+1} = 0$$

特别地, 当 $n = 0$, 记 $\alpha_{sp^n/n+1} = \alpha_{sp^n/1} = \alpha_{sp^n}$.

现在转到 Miller 等 [4] 得出的 $\mathrm{Ext}_C^{2,*}(BP_*, BP_*)$ 的结果. 设 $a_0 = 1$, $a_n = p^n + p^{n-1} - 1\ (n \geqslant 1)$, 元 $x_n \in v_2^{-1}BP_*$ 定义为

$$\begin{aligned}
x_0 &= v_2 \\
x_1 &= x_0^p - v_1^p v_2^{-1} v_3 \\
x_2 &= x_1^p - v_1^{p^2-1} v_2^{p^2-p+1} - v_1^{p^2+p-1} v_2^{p^2-2p} v_3 \\
x_n &= x_{n-1}^p - 2v_1^{b_n} v_2^{p^n-p^{n-1}+1}\ (n \geqslant 3)
\end{aligned}$$

其中 $b_n = (p+1)(p^{n-1} - 1)\ (n > 1)$. 今若 $s \geqslant 1$, $p^i | j \leqslant a_{n-i}$ 使 $j \leqslant p^n$ 当 $s = 1$, 则 (p^{i+1}, v_1^j) 是不变理想, 而 $x_n^s \in \mathrm{Ext}_C^{0,*}(BP_*, BP_*/(p^{i+1}, v_1^j))$. 令

$$\beta_{sp^n/j,i+1} = \delta'\delta'' x_n^s \in \mathrm{Ext}_C^{2,*}(BP_*, BP_*)$$

其中 δ', δ'' 分别为以下短恰当序列

$$E'\colon 0 \to BP_* \xrightarrow{p^{i+1}} BP_* \to BP_*/(p^{i+1}) \to 0$$

$$E''\colon 0 \to BP_*/(p^{i+1}) \xrightarrow{v_1^j} BP_*/(p^{i+1}) \to BP_*/(p^{i+1}, v_1^j) \to 0$$

的边缘同态, 则有如下定理

定理 8.1.3 (Milnor 等 [4] 定理 2.6)　当 $p > 2$, $\mathrm{Ext}_C^{2,*}(BP_*, BP_*)$ 是由 $\beta_{sp^n/j,i+1}$ 生成的循环群的直和, 其中 $n \geqslant 0$, p 不整除 $s \geqslant 1$, $j \geqslant 1$, $i \geqslant 0$ 且满足

(1) $j \leqslant p^n$ 当 $s = 1$.

(2) p^i 整除 $j \leqslant a_{n-i}$.

(3) $a_{n-i-1} < j$ 当 p^{i+1} 整除 j.

另外 $\beta_{sp^n/j,i+1}$ 的阶数为 p^{i+1}. 特别地, 当 $i = 0$, 记 $\beta_{sp^n/j,1} = \beta_{sp^n/j}$; 当 $i = 0$, $j = 1$, 记 $\beta_{sp^n/1,1} = \beta_{sp^n}$.

关于 $\mathrm{Ext}_C^{3,*}(BP_*, BP_*)$ 目前只有部分的信息. 由 $v_3^t \in \mathrm{Ext}_C^{0,*}(BP_*, BP_*/(p, v_1, v_2))$, 令 $\gamma_t = \delta'\delta''\delta''' v_3^t \in \mathrm{Ext}_C^{3,*}(BP_*, BP_*)$, 则有

定理 8.1.4(文献 [4] 定理 2.7) 当 $p>2$, $\gamma_t \neq 0$ 对所有 $t \geqslant 1$.

关于 α, β 之间的关系也已经得出, 我们这里不详述.

以上是广义 Adams 谱序列的 E_2 项:

$$E_2^{s,t}=\mathrm{Ext}_C^{s,t}(BP_*,BP_*)$$

当 $s=1,2$ 和部分的当 $s=3$ 的结果. 为了和经典的 Adams 谱序列的 E_2 项

$$E_2^{s,t}=\mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_p,Z_p)\cong \mathrm{Ext}_{A^*}^{s,t}(Z_p,Z_p)$$

作比较, 考虑 Thom 映射 $\Phi\colon BP\to KZ_p$, 它是对应于 $1\in H^0(BP)=[BP,KZ_p]$ 的一个映射. 因此 Φ 导出同态

$$\Phi\colon \mathrm{Ext}_C^{s,t}(BP_*,BP_*)\to \mathrm{Ext}_{A^*}^{s,t}(Z_p,Z_p)$$

回顾第 5 章关于 Steenrod 代数的上同调的计算结果, 我们有 (见定理 5.1.1, 5.3.2) $\mathrm{Ext}_{A^*}^{1,*}(Z_p,Z_p)$ 有生成元 a_0,h_i $(i\geqslant 0)$, $\mathrm{Ext}_{A^*}^{2,*}(Z_p,Z_p)$ 有生成元 h_ih_j $(i<j-1)$, $g_i,k_i,b_i,a_0h_j,a_0^2,\widetilde{\alpha}_2$.

定理 8.1.5(文献 [4] 定理 9.4) 当 $p>2$

(a) Φ 将 $\mathrm{Ext}_C^{1,*}(BP_*,BP_*)$ 的生成元映成零, 除了一个例外

$$\Phi\alpha_1=h_0$$

(b) Φ 将 $\mathrm{Ext}_C^{2,*}(BP_*,BP_*)$ 的生成元映成零, 除了几个例外

$$\begin{aligned}&\Phi\beta_2=k_0\\&\Phi\beta_{p^i/p^i-1}=h_0h_{i+1}\quad (i>0)\\&\Phi\beta_{p^i/p^i}=-b_i\quad (i\geqslant 0)\end{aligned}$$

现在我们转而叙述文献 [18] 中关于 $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,*}(BP_*,BP_*/I_n)$ 以及 $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{0,*}(BP_*,BP_*/(I_n,v_n^t))$ 的生成元的结果. 回顾 $BP_*BP=BP_*[t_1,t_2,\cdots]$, 其中 $|t_n|=2(p^n-1)$. 在 BP_*BP 的具有 BP_*/I_n 中系数的 cobar 构造中, $t_1^{p^i}$ 是一个循环, 它表示一个非零元素

$$h_i\in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,p^iq}(BP_*,BP_*/I_n)$$

其中 $q=2(p-1)$. 设 $p\geqslant 3, n\geqslant 0$ 或 $p=2,n\geqslant 2$. 对任意 $r>0$, 设 $r=ap^s$ 使得 a 与 p 互素. 记 $s=kn+i+1$ 使得 $0\leqslant i<n$. 若 $n=0$, 令 $q(r)=q_0(ap^s)=s+1$. 若 $n>0$, 令 $q(r)=q_n(ap^s)=p^s$ 若 $a=1$ 而令 $q(r)=q_n(ap^s)=p^s+(p-1)\Sigma_{l=0}^{k-1}p^{ln+i}$ 若 $a>1$.

定理 8.1.6(文献 [18] 定理 1.1) 设 $p\geqslant 3,n\geqslant 0$ 或 $p=2,n\geqslant 2$.

(a) $\{h_i:0\leqslant i<n\}$ 生成 $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,*}(BP_*,BP_*/I_n)$ 的秩为 n 的 $Z_p[v_n]$ 自由子模.

(b) $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,*}(BP_*,BP_*/I_n)$ 的 v_n 挠子模是一序列以 $c_n(r)$ 为生成元的 $Z_p[v_n]$

模 ($Z_{(p)}$ 模当 $n=0$) 的和, 其中和式取遍所有 $r=ap^s>0$ 使得 a 与 p 互素, 并且满足以下条件:

(i) $v_n^{q(r)}c_n(r)=0,\quad v_n^{q(r)-1}c_n(r)=\delta_n(v_{n+1}^r)\neq 0.$

(ii) $h_{s+n}=c_n(p^s)+v_n^{p^s(p-1)}h_s,\quad s\geqslant 0, n>0.$

(iii) $\rho_n(c_n(sp^s))=av_1^{r-1}h_0$ 若 $n=0$

$=h_{s+n}$ 若 $a=1$

$=av_{n+1}^{a-1}h_n$ 若 $s=0$

$=2av_2^{ap^s-p^{s-1}}h_0$ 若 $n=1, s>1, a\neq 1$

$=av_{n+1}^{ap^s-p^{n-1}}h_i$ 其他情况

其中 $s-1=i(\mathrm{mod}\, n), 0\leqslant i<n$, 而 $c_n(r)\in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,2r(p^{n+1}-1)-2q(r)(p^n-1)}(BP_*,BP_*/I_n)$ 是 cobar 构造出的某个元素, $\rho_n:\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,*}(BP_*,BP_*/I_n)\to \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,*}(BP_*,BP_*/I_{n+1})$ 为投射.

定理 8.1.7(文献 [18] 命题 6.3) 设 $p\geqslant 3, n\geqslant 0$ 或 $p=2, n\geqslant 2$, 则

$$\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{0,*}(BP_*,BP_*/(I_n,v_n^t))$$

是 $BP_*/(I_n,v_n^t)$ 的 $Z_p[v_n]/(v_n^t)$ 子模 ($Z_{(p)}/(p^t)$ 子模若 $n=0$), 由 1 和所有 $v_n^m\tilde{c}_n(r)$ 所生成, 其中 $m=\max\{0,t-q(r)\}, r>0$, $\tilde{c}_n(r)\in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{0,2r(p^{n+1}-1)}(BP_*,BP_*/(I_n,v_n^{q(r)}))$ 是与定理 8.1.6 中的 $c_n(r)$ 相关的元素.

8.2 J 同态和它的像

G.W.Whitehead 定义了 J 同态

$$J:\pi_r(SO(q))\to \pi_{r+q}(S^q)$$

其中 $SO(q)$为所有行列式等于 1 的 q 阶正交矩阵所成的拓扑群, S^q 为 q 维球面. 下面叙述 J 同态的定义 (8.2.1~8.2.4).

定义 8.2.1 两个空间 X,Y 的联合 $X*Y$ 是由 $X\times Y\times I$ 将点 $(x,y,0)$ 和 $(x,y_0,0)$, 点 $(x,y,1)$ 和 $(x_0,y,1)$ 叠合 (所有 $x\in X$, $y\in Y$) 所得空间, 其中 x_0, y_0 为 X,Y 的基点. 简化联合 $X*Y$ 还要将子空间 $(x_0\times Y\times I)\cup(X\times y_0\times I)$ 叠合成一点. 可以证明, 当 X,Y 是多面体, 简化联合 $X*Y\cong S(X\wedge Y)$(参见文献 [5]P.251 习题 3).

定义 8.2.2 对每个映射 $f:X\times Y\to Z$, Hopf 构造将 f 对应于映射 $H(f):X*Y\to SZ$ 使

$$H(f)\langle x,y,t\rangle=\langle f(x,y),t\rangle$$

可以证明若 $f\simeq f'$, 则 $H(f)\simeq H(f')$, 因此有对应 $H:[X\times Y,Z]\to[X*Y,SZ]$.

定义 8.2.3　设 $h: S^r \to SO(q)$ 为 $\alpha \in \pi_r(SO(q))$ 的代表, 因为 $SO(q)$ 可看作映射空间 $\mathrm{Map}(S^{q-1}, S^{q-1})$(具有紧致开拓扑, 恒等映射为基点) 的子空间, 因此 h 的伴随为 $f: S^r \times S^{q-1} \to S^{q-1}$, 从而有 Hopf 构造 $H(f): S^{r+q} \to S^q$, 令

$$J: \pi_r(SO(q)) \to \pi_{r+q}(S^q)$$

为 $J[h] = [H(f)]$.

定理 8.2.4　$J: \pi_r(SO(q)) \to \pi_{r+q}(S^q)$ 是同态.

证　设 $h_0, h_1, h_2: S^r \to SO(q)$ 为映射使 $[h_0] = [h_1] + [h_2]$, 则相应的伴随 $f_1, f_2: S^r \times S^{q-1} \to S^{q-1}$ 有 $f_i(*, y) = y$, 任意 $y \in S^{q-1}$. 不妨设 $h_1|_{S^r_-} = h_2|_{S^r_+} = *$($S^r_+$, S^r_- 为上下半球面), 则

$$h_0|_{S^r_+} = h_1|_{S^r_+}$$
$$h_0|_{S^r_-} = h_2|_{S^r_-}$$

而对应的 $H(f_0), H(f_1), H(f_2)$, 由于

$$H(f_i)\langle x, y, t\rangle = \langle h_i(x, y), t\rangle \ (x \in S^r,\ y \in S^{q-1})$$

因此有

$$H(f_0)|_{S^{r+q}_+} = H(f_1)|_{S^{r+q}_+}$$
$$H(f_0)|_{S^{r+q}_-} = H(f_2)|_{S^{r+q}_-}$$

从而 $[H(f_0)] = [H(f_1) + H(f_2)]$, 因此 J 是同态. 证毕.

因为有

$$SO(1) \subset \cdots \subset SO(q) \subset SO(q+1) \subset \cdots$$

令 $SO = \bigcup_{q \geqslant 1} SO(q)$, 将 J 同态稳定化, 得

$$J: \pi_r(SO) \to \pi_r^s$$

其中π_r^s 为球面的 r 柄稳定同伦群.

确定 J 同态的像 $\mathrm{im}\, J \subset \pi_r^s$ 中的非零元素可计算 π_r^s 的一部分元素.

关于 $\mathrm{im}\, J$, Adams[6] 用 e 不变量得出 (文献 [6] 定理 1.1~1.6).

定理 8.2.5　当 $r \equiv 0, 1 \pmod 8$ 时有 $\pi_r(SO) = Z_2$, $\mathrm{im}\, J$ 是 π_r^s 的一个生成元的 Z_2 直加项.

定理 8.2.6　当 $r = 4n - 1 \equiv 3 \pmod 8$, $\pi_r(SO) = Z$, $\mathrm{im}\, J$ 是 π_r^s 的一个生成元的 $Z_{m(2n)}$ 直加项, 其中 $m(2n)$ 为 $B_n/4n$ 的分母. 当这个分数表示成最低项, 则 B_n 是数论中的第 n 个 Bernoulli 数.

定理 8.2.7　当 $r = 4n - 1 \equiv 7 \pmod 8$, 从而 $\pi_r(SO) = Z$, 则 $\mathrm{im}\, J$ 是 π_r^s 的一个生成元的 $Z_{m(2n)}$ 或 $Z_{2m(2n)}$ 直加项.

Novikov[3] 或 Miller 等 [4] 注 2.3 对 $p > 2$ 完全确定了 $\mathrm{im}\, J$ 的 p 分量群.

定理 8.2.8 当 $p>2$, $\operatorname{im} J$ 的 p 分量群和 $\operatorname{Ext}^{1,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)$ 的所有生成元 (见本章定理 8.1.2) 一一对应.

8.3 球面稳定同伦群的 α,β,γ 元素族

在确定 $\operatorname{im} J$ 之后, 1970 年以来, 陆续发现了球面稳定同伦群 $\pi_*(S^0)_p$ 的无穷元素族 $\alpha_t,\beta_t,\gamma_t$. 这些元素族都是通过某些胞腔很少的 CW 谱的自映射的构造而得到, 而且具有某种周期性现象. 这些元素族的非零性由广义 Adams 谱序列的 E_2 项可直接得出, 并且有类似的周期性现象.

下面先介绍 $\alpha_t,\beta_t,\gamma_t$ 元素族, 然后再概括出它们的周期性性质.

6.2 节中当 $p>2n$ 已构造出谱 $V(n)$ $(n=0,1,2,3)$, 且存在自映射 ϕ: $\Sigma^{2(p^n-1)}V(n-1)\to V(n-1)$ 使

$$\Sigma^{2(p^n-1)}V(n-1)\xrightarrow{\phi_n}V(n-1)\to V(n)\xrightarrow{\tau_n}\Sigma^{2p^n-1}V(n-1)$$

为上纤维序列. 由于 $V(n)$ 的 BP_* 同调群

$$BP_*(V(n))\cong BP_*/(p,v_1,\cdots,v_n)$$

因此 ϕ_n 导出的 BP_* 同调群同态为用 v_n 乘的同态, 因此有短恰当序列 $(\phi_{n*}=v_n)$

$$0\to BP_*/(p,v_1,\cdots,v_{n-1})\xrightarrow{v_n}BP_*/(p,v_1,\cdots,v_{n-1})\to BP_*/(p,v_1,\cdots,v_n)\to 0$$

且ϕ_n 的 t 累次合成

$$\phi_n^t\colon\Sigma^{2t(p^n-1)}V(n-1)\to V(n-1)$$

不是零伦的 (因为 $\phi_{n*}^t=v_n^t\neq 0$).

定义 8.3.1 以下合成定义为 $\alpha_t,\beta_t,\gamma_t$:

$$\alpha_t\colon\Sigma^{2t(p-1)}S^0\xrightarrow{f}\Sigma^{2t(p-1)}V(0)\xrightarrow{\phi_1^t}V(0)\xrightarrow{\tau_0}\Sigma S^0$$

$$\beta_t\colon\Sigma^{2t(p^2-1)}S^0\xrightarrow{f}\Sigma^{2t(p^2-1)}V(1)\xrightarrow{\phi_2^t}V(1)\xrightarrow{\tau_0\tau_1}\Sigma^{2(p-1)+2}S^0$$

$$\gamma_t\colon\Sigma^{2t(p^3-1)}S^0\xrightarrow{f}\Sigma^{2t(p^3-1)}V(2)\xrightarrow{\phi_3^t}V(2)$$
$$\xrightarrow{\tau_0\tau_1\tau_2}\Sigma^{2(p^2-1)+2(p-1)+3}S^0$$

其中 f 为 $V(n)$ 最低维胞腔的内射.

定理 8.3.2 对任意 $t\geqslant 1$, α_t(当 $p\geqslant 3$), β_t(当 $p\geqslant 5$), γ_t (当 $p\geqslant 7$) 是 $\pi_*(S^0)_p$ 的非零元素, 其次数分别为 $2t(p-1)-1$, $2t(p^2-1)-2(p-1)-2$, $2t(p^3-1)-2(p^2-1)-2(p-1)-3$.

证 设 $n=0,1,2$, 则合成

$$\Sigma^{2t(p^{n+1}-1)}S^0\xrightarrow{f}\Sigma^{2t(p^{n+1}-1)}V(n)\xrightarrow{\phi_{n+1}^t}V(n)$$

导出的 BP_* 同调群同态是用 v_{n+1}^t 乘的同态

$$v_{n+1}^t \in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{0,*}(BP_*, BP_*/(p, v_1, \cdots, v_n))$$

当 $n=0$, 由定理 8.1.2

$$\delta v_1^t = \alpha_t \neq 0 \in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,*}(BP_*, BP_*/(p))$$

再将上纤维序列

$$S^0 \xrightarrow{p} S^0 \to V(0) \xrightarrow{\tau_0} \Sigma S^0$$

应用到第 7 章定理 7.3.5, 则 $\delta v_1^t = \alpha_t \neq 0$ 留存到同名元素

$$\alpha_t \neq 0: \Sigma^{2t(p-1)}S^0 \to \Sigma^{2t(p-1)}V(0) \to V(0) \xrightarrow{\tau_0} \Sigma S^0$$

当 $n=1$, 由定理 8.1.3

$$\delta'\delta'' v_2^t = \beta_t \neq 0 \in \mathrm{Ext}^{2,*}(BP_*, BP_*/(p, v_1))$$

其中 δ', δ'' 是相应于短恰当序列

$$E': 0 \to BP_* \xrightarrow{p} BP_* \to BP_*/(p) \to 0$$
$$E'': 0 \to BP_*/(p) \xrightarrow{v_1} BP_*/(p) \to BP_*/(p, v_1) \to 0$$

的边缘同态. 因此将上纤维序列

$$\Sigma^{2(p-1)}V(0) \xrightarrow{\phi_1} V(0) \to V(1) \xrightarrow{\tau_1} \Sigma^{2(p-1)+1}S(0)$$
$$S^0 \xrightarrow{p} S^0 \to V(0) \xrightarrow{\tau_0} \Sigma S^0$$

连续应用到第 7 章定理 7.3.5, 得出 $\delta'\delta'' v_2^t = \beta_t \neq 0$ 留存到非零同名元素

$$\beta_t \neq 0: \Sigma^{2t(p^2-1)}S^0 \xrightarrow{f} \Sigma^{2t(p^2-1)}V(1) \to V(1) \xrightarrow{\tau_0\tau_1} \Sigma^{2(p-1)+1}S^0$$

当 $n=2$, $\gamma_t \neq 0$ 的证明类似. 证毕.

以上的映射族 $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ 的构造, 左边的 f 是最低维数胞腔的内射, 右边的 $\tau_0\tau_1\tau_2$: $V(2) \to \Sigma^{2(p^2-1)+2(p-1)+3}S^0$ 等是 $V(2)$ 到它的最高维数胞腔的投射, 而中间的 $\phi_{n+1}^t: \Sigma^{2t(p^{n+1}-1)}V(n) \to V(n)$ 则是 $V(n)$ $(n=0,1,2)$ 谱的自映射 ϕ_{n+1} 的 t 次累次合成. 可见, ϕ_{n+1} 的构造是最关键的, 文献中称 ϕ_{n+1} 为 v_{n+1} 周期性算子. 用周期性算子来生成或发觉 (detect) 同伦类的方法是近代计算 $\pi_*(S^0)_p$ 的有效方法, 今概括如下.

定义 8.3.3 设 X 为有限谱, $v \in [\Sigma^k X, X]$ 为映射的同伦类, v^t 表示 v 的 t 次累次合成 $v^t: \Sigma^{tk}X \to X$. v 叫做周期性算子, 如果对所有 $t \geqslant 1$ 有 $v^t \neq 0 \in [\Sigma^{tk}X, X]$. 同伦类 $\alpha \in [X, Z]$ 叫做 v 周期性元素, 如果 $\alpha \cdot v^t \neq 0$ 对所有 $t \geqslant 1$. 同伦类 $\beta \in \pi_j(W)$ 叫做 v 周期性元素, 如果 β 可分解为以下合成 ($X^{(m-1)}$ 为 X 的 $m-1$ 维架, 某个 m)

$$\Sigma^m S^0 \to X/X^{(m-1)} \xrightarrow{\bar{\beta}} \Sigma^{m-j}W$$

而且对所有这样的 $\bar{\beta}$ 和 $t \geqslant 1$, 合成

$$\Sigma^{tk} X \xrightarrow{v^t} X \to X/X^{(m-1)} \xrightarrow{\bar{\beta}} \Sigma^{m-j} W$$

非零伦.

前面所述的 $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ 元素族中, 它们的构造是令 $X = V(n)(n = 0, 1, 2)$, 自投影 $v_{n+1}: \Sigma^{2(p^{n+1}-1)} V(n) \to V(n)$ 是周期性算子, 而取 m 为 $X = V(n)$ 的胞腔的最高维数, $\bar{\beta} = 1: X/X^{(m-1)} = \Sigma^m S^0 \to \Sigma^m S^0$. 因此, 按上述定义 8.3.3, $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ 分别是 $\pi_*(S^0)_p$ 的 v_1, v_2, v_3 周期性元素族, 或简称为第一、二, 三周期性元素族. 这些周期性元素族的构造和发觉归结为周期性算子 $v: \Sigma^k X \to X$ 的构造和相应的周期性元素 β 的非零性的发觉. 后者常用到 Adams 谱序列来解决, 而前者是和 Steenrod 模或 BP_* 模的几何实现问题相关联.

注 8.3.4　设 $V_{j+1}(0)$ 由上纤维序列

$$S^0 \xrightarrow{p^{j+1}} S^0 \to V_{j+1}(0) \to \Sigma S^0$$

所确定, 则 $V_{j+1}(0)$ 是有限谱且有周期性算子

$$v_1^{sp^n}: \Sigma^{2sp^n(p-1)} V_{j+1}(0) \to V_{j+1}(0)$$

从而由第 7 章定理 7.3.5, 决定了 v_1 周期性元素族

$$\alpha_{sp^j/j+1}: \Sigma^{sp^j q} S^0 \to \Sigma^{sp^j q} V_{j+1}(0) \to V_{j+1}(0) \to \Sigma S^0$$

其中 $q = 2(p-1)$. 它由定理 8.1.2 的

$$\alpha_{sp^j/j+1} \in \mathrm{Ext}^{1,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)$$

所发觉. 根据定理 8.2.8, v_1 周期性元素全部和 $\mathrm{im}\, J$ 的 p 分量群一一对应, 已经完全解决 (当 $j = 0$ $\alpha_{sp^j/j+1}$ 就是 α_s)

注 8.3.5　可以很自然地想到, 定理 8.1.3 中的

$$\beta_{sp^n/j,i+1} \in \mathrm{Ext}^{2,*}(BP_*, BP_*)$$

(当 $i = 0$ 记为 $\beta_{sp^n/j}$) 可能有一些发觉出 $\pi_*(S^0)_p$ 的 v_2 周期性元素. 但由于周期性算子的构造是较难的问题, 目前关于 v_2- 周期性元素只有部分的结果.

S.Oka[7~10] 得出, 当 $p \geqslant 5$

$$\beta_{sp/j} \quad 1 \leqslant j \leqslant p-1 \quad (s \geqslant 1)$$

$$\beta_{sp^2/j} \quad 1 \leqslant j \leqslant 2p \quad (s \geqslant 2)$$

$$\beta_{sp^n/j} \quad 1 \leqslant j \leqslant 2^{n-1}p \quad (s \geqslant 2,\ n \geqslant 3)$$

是 $\pi_*(S^0)_p$ 的 v_2 周期性元素 (当 $j = 1$ 是 β_t) 除了 γ_t 外, 目前还没有得出更多的 v_3 周期性元素.

8.4 经典 Adams 谱序列的滤子 $s=1,2$

上节已讨论广义 Adams 谱序列的滤子 $s=1,2$. 它们是 α,β 元素族, 或者是 v_1,v_2 周期性元素族. 下面讨论经典的 Adams 谱序列的滤子 $s=1,2$.

回顾一下 Steenrod 代数 A 的上同调 $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(Z_p,Z_p)$ 当 $s=1,2$ 的计算结果. 当 $p>2$, $\mathrm{Ext}_A^{1,*}(Z_p,Z_p)$ 有 Z_p 基 $a_0,h_i(i\geqslant 0)$, $\mathrm{Ext}_A^{2,*}(Z_p,Z_p)$ 有 Z_p 基 h_ih_j $(i<j-1),g_i,k_i,a_0h_j,b_i,a_0^2,\widetilde{\alpha}_2$.

设 A^* 为 A 的对偶, 则有

$$\mathrm{Ext}_{A^*}^{s,t}(Z_p,Z_p)\cong\mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_p,Z_p)$$

从而有相同的 Z_p 基.

用 Thom 映射 $\Phi\colon BP\to KZ_p$ 导出的广义和经典 Adams 谱序列之间的映射, 可以得出以下定理.

定理 8.4.1(文献 [4] 推论 9.6) 当 $p>2$, (1) $\mathrm{Ext}_{A^*}^{1,*}(Z_p,Z_p)$ 的生成元, 只有 a_0,h_0 能在 Adams 谱序列中留存到无穷 (survive to infinity).

(2) $\mathrm{Ext}_{A^*}^{2,*}(Z_p,Z_p)$ 的生成元, 只有 $\widetilde{\alpha}_2,b_i$ $(i\geqslant 0),k_0,a_0^2,h_0h_i(i\geqslant 2)$ 和 a_0h_1 (当 $p=3$) 能在 Adams 谱序列中留存到无穷.

证 Thom 映射 $\Phi\colon BP\to KZ_p$ 导出广义的和经典的 Adams 谱序列之间的映射

$$\Phi_*\colon E_r^{s,t}(BP)\to E_r^{s,t}(KZ_p)\qquad (r\geqslant 2)$$

特别当 $r=2$ 为

$$\Phi_*\colon \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s,t}(BP_*,BP_*)\to\mathrm{Ext}_{A^*}^{s,t}(Z_p,Z_p)$$

因此若 $\bar{x}\in\mathrm{Ext}_{A^*}^{2,*}(Z_p,Z_p)$ 留存到 $x\in\pi_*(S^0)_p$, 则必有 $\bar{y}\in\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s,*}(BP_*,BP_*)(0\leqslant s\leqslant 2)$ 留存到 x, 这只要用 Φ 导出的两个 Adams 分解之间的可换图形就可以得出. 因为 $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{0,*}(BP_*,BP_*)\cong Z_{(p)}$ 全部留存到 $\pi_0(S^0)_p\cong Z_{(p)}$, 因此 a_0^2 能留存. 因为 $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,*}(BP_*,BP_*)$ 全部生成元留存到 $\mathrm{im}\,J\subset\Pi_{2t(p-1)-1}(S^0)_p$, 因此由次数关系, 只有 $\mathrm{Ext}_{A^*}^{2,*}(Z_p,Z_p)$ 中的 $\widetilde{\alpha}_2$ 和当 $p=3$ 的 a_0h_1 能留存到 $\mathrm{im}\,J$. 其他 $\mathrm{Ext}_{A^*}^{2,*}(Z_p,Z_p)$ 生成元中的留存子只能在 Φ_* 的像中, 这样定理 8.4.1(2) 可由定理 8.1.5 得出. (1) 的证明类似. 证毕.

注 8.4.2 以上结果只证明了哪些生成元能够留存, 但是否肯定留存还需要进一步证明. 滤子 1 中, a_0,h_0 留存到

$$p\colon S^0\to S^0,\qquad \alpha_1\colon\Sigma^{2(p-1)-1}S^0\to S^0$$

这是 Novikov 在证明 $\mathrm{mod}\,p$ Hopf 不变量 1 问题中得出的. 关于滤子 2, Ravenel[12]

证明了, 在广义 Adams 谱序列中 $d_{2p-1}(\beta_{p^i/p^i}) \neq 0$(当 $i \geqslant 1$, $p \geqslant 3$), 因此由定理 8.1.5, b_i 当 $i \geqslant 1$, $p \geqslant 3$ 在经典 Adams 谱序列中死掉. 另外 $a_0^2, \widetilde{\alpha}_2, b_0, k_0$ 分别留存到以下四个映射:

$$p^2: S^0 \to S^0, \qquad \alpha_2: \Sigma^{4p-5}S^0 \to S^0$$
$$\beta_1: \Sigma^{2p(p-1)-2}S^0 \to S^0, \quad \beta_2: \Sigma^{4(p^2-1)-2(p-1)-2}S^0 \to S^0$$

这是容易证明的. 剩下的 h_0h_j $(j \geqslant 2)$ 的留存问题 (当 $p > 2$), 证明较难. 另外 R. Cohen 证明了以下结果.

定理 8.4.3(文献 [14] 定理 IVb) 对 $k \geqslant 1$, $h_0b_k \in \mathrm{Ext}_A^{3,m}(Z_p, Z_p)$ 在经典 Adams 谱序列中留存到

$$\zeta_k: \Sigma^{m-3}S^0 \to S^0$$

其中 $m = 2(p^{k+1}+1)(p-1)$.

到此为止, 对 $p > 2$, 经典 Adams 谱序列的滤子 $s = 1, 2$ 大部分已计算出来. 下面介绍 $p = 2$ 的情况. 因为

$$\mathrm{Ext}_A^{1,*}(Z_2, Z_2) \quad 有 Z_2 基 \quad h_i \ (i \geqslant 0)$$
$$\mathrm{Ext}_A^{2,*}(Z_2, Z_2) \quad 有 Z_2 基 \quad h_ih_j \ (j \geqslant i,\ j \neq i+1)$$

Ravenel(文献 [11] p.450) 猜想 $\mathrm{im}\,\Phi = 0$ 除了

$$\Phi(\beta_{2^i/2^i}) = h_{i+1}^2, \qquad \Phi(\beta_{2^i/2^i-1}) = h_1h_{i+2}$$

其中 $\Phi: \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{2,*}(BP_*, BP_*) \to \mathrm{Ext}_A^{2,*}(Z_2, Z_2)$ 为 Thom 映射. 因此, 类似于定理 8.4.1 可知, 在经典的 Adams 谱序列的滤子 $s = 2$ 中, 只有 h_{i+1}^2 和 h_1h_{i+2} $(i \geqslant 0)$ 能够留存. 后者的留存已经由 Mahowald[17] 所肯定, 下面是 Mahowald[17] 定理 1.1 的结果.

定理 8.4.4 当 $p = 2$, $j \neq 2$, $h_1h_j \in \mathrm{Ext}_A^{2,*}(Z_p, Z_p)$ 在经典 Adams 谱序列中留存到

$$\eta_j: S^{2^j} \to S^0$$

前面 R.Cohen 的定理 8.4.3 中 ζ_k 元素的构造方法是 Mahowald[17] 的 η_j 元素的构造方法在 $p > 2$ 的推广, 两者有一些类似之处. $h_{i+1}^2 \in \mathrm{Ext}_A^{2,*}(Z_p, Z_p)$ 的留存问题目前还没得出. 它和 Kervaire 不变量问题密切相关. 更进一步深入地了解可参阅 Ravenel 的综合报告 [11].

参 考 文 献

[1] Quillen D G. 1969. On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory. Bull. A.M.S. **75**, 1293~1298

[2] Landeweber P S. 1973. Annihilator ideals and primitive elements in complex cobor-

dism. Ill. J. Math. **17**, 272～284

[3] Novikov S P. 1967. The method of algebraic topology from the viewpoint of cobordism theories. Math. U.S.S.R. Izvestlia., 827～913

[4] Miller H R, Ravenel D C, Wilson W S. 1977. Periodic phenomena in the Adams-Novikov spectral sequence. Ann. of Math. **106**, 469～516

[5] Maunder . Algebraic topology. Camb. Univ. Press

[6] Adams J F. 1966. On the groups J(X). IV. Topology. **5**, 21～71

[7] Oka S. 1975. A new family in the stable homology groups of spheres. Hiroshima Math. J. **5**, 87～114

[8] Oka S. 1977. Realizing some cyclic BP_* modules and applications to stable homotopy of spheres. ibid **7**, 427～447.

[9] Oka S. 1983. Small ring spectra and p-rank of the stable homotopy of spheres. Proc. Northwestern Homotopy conf. (Evanston Ill 1982) 227～231 Contemp, Math. 19 A.M.S.

[10] Oka S. 1984. Multiplicative structure of finite ring spectra and stable homotopy of spheres. Algebraic topology (Aarhus 1982) 418～441. Lect Notes in Math. V.1051. Springer-Verlag

[11] Ravenel D C. A novice's guide to Adams-Novikov spectral sequence. Lect Notes in Math. V.654 P, 404～475.

[12] Ravenel D C. 1978 The nonexistence of odd primary Avf invariant elements in stable homotopy. Math. Camb. Phil Soc. **83**, 429～443

[13] Cohen R L. 1984. Secondary cohomology operations that detect homotopy classes. Topology. **23**, 177～194

[14] Cohen R L. 1981. Odd primary infinite families in stable homotopy theory. Memoirs A.M.S. **242**

[15] Snaith V P. 1974. A stable decomposition for $\Omega^n S^n X$, J.Lond. Math. Soc. **2**, 577～582

[16] Cohen F R, Mahowald M, Milgram R J.1978. The stable decomposition of the double loop space of sphere. A.M.S. Proc. Symp. Pure Math. **32**, 225～228.

[17] Mahowald M. 1977. A new infinite family in ${}_2\pi_*^s$. Topology. **16**, 249～256

[18] Miller H R, Wilson W S. 1976. On Novikov's Ext^1 modulo an invariant prime ideal. Topology **15**, 131～141

第 9 章　球面稳定同伦群的一序列新元素族

在本章, 我们将以编著者多年来的研究成果 (特别是文献 [7]~[9], [24]) 为基础, 叙述和证明球面稳定同伦群的一序列新元素族的存在性. 首先, 作为预备知识, 在 9.1 节叙述一些与 Moore 谱和 Smith-Toda 谱 $V(1)$ 密切相关的谱及其性质. 9.2 节叙述和证明 a_0 相关的一对元素 σ, σ' 及有关 $h_0\sigma, h_0\sigma'$ 元素的收敛性的一般结果 (文献 [8] 定理 A 的推广). 9. 3 节证明由 $(i'i)_*(h_0\sigma)$ 的收敛性导出 $(i'i)_*(g_0\sigma)$ 的收敛性的一般结果 (文献 [7] 定理 II 的推广). 9.4~9.5 节证明 Adams 谱序列中的一个回拖定理 (文献 [24] 定理 A 的推广) 并进而得出一序列 $h_0h_n, h_0b_n, h_0h_nh_m, h_0(h_nb_{m-1}-h_mb_{n-1})$ 等新元素族的收敛性. 9.6 节是关于一序列 $h_0\sigma\widetilde{\gamma}_s, g_0\sigma\widetilde{\gamma}_s$ 的收敛性. 9.7 节证明 h_n 定理并进而得出球面稳定同伦群第三周期性 $\gamma_{p^n/s}$ 元素 (文献 [24] 定理 I 和定理 II). 最后在 9.8 节证明球面稳定同伦群第二周期性 $\beta_{tp^n/j,i+1}$ 元素的收敛性.

9.1　与 Moore 谱和 Smith-Toda 谱 $V(1)$ 密切相关的一些谱

设 M 为 Moore 谱, 由以下上纤维序列

(9.1.1) $$S \xrightarrow{p} S \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} \Sigma S$$

所给出. 设 K 是 Adams 映射 $\alpha : \Sigma^q M \to M$ 的上纤维, 由以下上纤维序列

(9.1.2) $$\Sigma^q M \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{i'} K \xrightarrow{j'} \Sigma^{q+1} M$$

所给出. 上面的谱 K 实际上就是第六章 §2 中的 Smith-Toda 谱 $V(1)$.

下面我们引进一些与谱 S, M 或 K 密切相关的谱. 设 L 为 $\alpha_1 = j\alpha i : \Sigma^{q-1}S \to S$ 的上纤维, 由以下上纤维序列

(9.1.3) $$\Sigma^{q-1}S \xrightarrow{\alpha_1} S \xrightarrow{i''} L \xrightarrow{j''} \Sigma^q S$$

所给出. 设 Y 为 $i'i : S \to K$ 的上纤维, 由以下上纤维序列

(9.1.4) $$S \xrightarrow{i'i} K \xrightarrow{\overline{r}} Y \xrightarrow{\epsilon} \Sigma S$$

所给出. Y 实际上是 Toda 谱 $V(1\frac{1}{2})$, 而且它也是 $j\alpha : \Sigma^q M \to \Sigma S$ 的上纤维, 由以下上纤维序列

(9.1.5) $$\Sigma^q M \xrightarrow{j\alpha} \Sigma S \xrightarrow{\overline{w}} Y \xrightarrow{\overline{u}} \Sigma^{q+1} M$$

所给出. 这可通过以下稳定同伦范畴中的 3×3 引理的同伦可换图形看出 (参见 3.7 节)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
S & & \xrightarrow{i'i} & & K & & \xrightarrow{j'} & & \Sigma^{q+1}M \\
& \searrow i & & \nearrow i' & & \searrow \overline{r} & & \nearrow \overline{u} & \\
& & M & & & & Y & & \\
& \nearrow \alpha & & \searrow j & & \nearrow \overline{w} & & \searrow \epsilon & \\
\Sigma^q M & & \xrightarrow{j\alpha} & & \Sigma S & & \xrightarrow{p} & & \Sigma S
\end{array}
\tag{9.1.6}
$$

注意到 $\alpha_1 \cdot p = p \cdot \alpha_1 = 0$, 因此有 $p = j''\pi$ 以及 $p = \xi i''$, 其中 $\pi \in [\Sigma^q S, L]$, $\xi \in [L, S]$. 由于 $\pi_q S = 0$, 因此 $\pi_q L \cong Z_{(p)}\{\pi\}$. 更进一步有 $i''\xi i'' = i'' \cdot p = (p \wedge 1_L)i''$, 因此 $p \wedge 1_L = i''\xi + \lambda\pi j''$, 某个 $\lambda \in Z_{(p)}$. 以上等式合成 j'' 之后有 $p \cdot j'' = j''(p \wedge 1_L) = \lambda j''\pi \cdot j'' = \lambda p \cdot j''$, 因此 $\lambda = 1$, 从而有

$$
p \wedge 1_L = i''\xi + \pi j''. \tag{9.1.7}
$$

由以下稳定同伦范畴中的 3×3 的同伦可换图

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\Sigma^q S & & \xrightarrow{p} & & \Sigma^q S & & \xrightarrow{\alpha_1} & & \Sigma S \\
& \searrow \pi & & \nearrow j'' & & \searrow i & & \nearrow j\alpha & & \searrow i'' \\
& & L & & & & \Sigma^q M & & & & \Sigma^{q+1}L \\
& \nearrow i'' & & \searrow \overline{h} & & \nearrow \overline{u} & & \searrow j & & \nearrow \pi \\
S & & \xrightarrow{\overline{w}} & & \Sigma^{-1}Y & & \xrightarrow{j\overline{u}} & & \Sigma^{q+1}S
\end{array}
\tag{9.1.8}
$$

可得出以下上纤维序列

$$
\Sigma^q S \xrightarrow{\pi} L \xrightarrow{\overline{h}} \Sigma^{-1}Y \xrightarrow{j\overline{u}} \Sigma^{q+1}S \tag{9.1.9}
$$

并且有等式

$$
\overline{u}\overline{h} = i \cdot j'', \quad \overline{h}i'' = \overline{w}, \quad \pi \cdot j = i''j\alpha
$$

由 $2\alpha ij\alpha = ij\alpha^2 + \alpha^2 ij$ (参见 (6.5.3)), 则 $\alpha_1\alpha_1 = 0$, 从而存在 $\phi \in [\Sigma^{2q-1}S, L]$ 以及 $(\alpha_1)_L \in [\Sigma^{q-1}L, S]$ 使得

$$
j''\phi = \alpha_1 = (\alpha_1)_L \cdot i'' \tag{9.1.10}
$$

设 W 为 $\phi : \Sigma^{2q-1}S \to L$ 的上纤维, 则 W 也是 $(\alpha_1)_L : \Sigma^{q-1}L \to S$ 的上纤维, 这可由以下稳定同伦范畴中的 3×3 引理的同伦可换图形得出

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\Sigma^{2q-1}S & & \xrightarrow{\alpha_1} & & \Sigma^q S & & \xrightarrow{\alpha_1} & & \Sigma S \\
& \searrow \phi & & \nearrow j'' & & \searrow i'' & & \nearrow (\alpha_1)_L & \\
& & L & & & & \Sigma^q L & & \\
& \nearrow i'' & & \searrow w & & \nearrow u & & \searrow j'' & \\
S & & \xrightarrow{wi''} & & W & & \xrightarrow{j''u} & & \Sigma^{2q}S
\end{array}
\tag{9.1.11}
$$

即有两个上纤维序列

$$
\Sigma^{2q-1}S \xrightarrow{\phi} L \xrightarrow{w} W \xrightarrow{j''u} \Sigma^{2q}S \tag{9.1.12}
$$

$$
\Sigma^{q-1}L \xrightarrow{(\alpha_1)_L} S \xrightarrow{wi''} W \xrightarrow{u} \Sigma^q L \tag{9.1.13}
$$

下面我们将 Toda 谱 $V(\frac{1}{2})$ 记为 K', 它是 $jj' : \Sigma^{-1}K \to \Sigma^{q+1}S$ 的上纤维, 由以下上纤维序列

(9.1.14) $$\Sigma^{-1}K \xrightarrow{jj'} \Sigma^{q+1}S \xrightarrow{z} K' \xrightarrow{x} K$$

所给出. K' 也是 $\alpha i:\Sigma^q S\to M$ 的上纤维, 由以下上纤维序列

(9.1.15) $$\Sigma^q S \xrightarrow{\alpha i} M \xrightarrow{v} K' \xrightarrow{y} \Sigma^{q+1}S$$

所给出. 这可由以下稳定同伦范畴中的 3×3 引理的同伦可换图形看出

(9.1.16)
$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^q S & \xrightarrow{\alpha i} & M & \xrightarrow{i'} & K \\
& \searrow i \quad \nearrow \alpha & & \searrow v \quad \nearrow x & \\
& \Sigma^q M & & K' & \\
& \nearrow j' \quad \searrow j & & \nearrow z \quad \searrow y & \\
\Sigma^{-1}K & \xrightarrow{jj'} & \Sigma^{q+1}S & \xrightarrow{p} & \Sigma^{q+1}S
\end{array}$$

由 $\alpha_1\wedge 1_M = ij\alpha-\alpha ij$, 令 $\alpha'=\alpha_1\wedge 1_K\in[\Sigma^{q-1}K,K]$, 则 $j'\alpha'=-(\alpha_1\wedge 1_M)j'=\alpha ijj'\in[\Sigma^{-2}K,M]$. 由 (9.1.16), $y\cdot z=p$, 因此 $y\cdot z\cdot y=p\cdot y=y(1_{K'}\wedge p)$, 从而有 $z\cdot y=1_{K'}\wedge p$. 这是因为 $[K',M]=0$, 可由以下 (9.1.15) 导出的恰当序列

$$0=[\Sigma^{q+1}S,M]\xrightarrow{y^*}[K',M]\xrightarrow{v^*}[M,M]\xrightarrow{(\alpha i)^*}$$

得出, 其中 $[M,M]\cong Z_p\{1_M\}$ 使得以上的 $(\alpha i)^*$ 单射. 通过下面稳定同伦范畴中的 3×3 引理的同伦可换图形 (9.1.18) 可知 $\alpha ijj':\Sigma^{-1}K\to\Sigma M$ 的上纤维是 $K'\wedge M$, 由以下上纤维序列

(9.1.17) $$\Sigma^{-1}K \xrightarrow{\alpha ijj'} \Sigma M \xrightarrow{\psi} K'\wedge M \xrightarrow{\rho} K$$

所给出.

(9.1.18)
$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^{-1}K & \xrightarrow{\alpha ijj'} & \Sigma M & \xrightarrow{v} & \Sigma K' \\
& \searrow jj' \quad \nearrow \alpha i & & \searrow \psi \quad \nearrow 1_{K'\wedge j} & \\
& \Sigma^{q+1}S & & K'\wedge M & \\
& \nearrow y \quad \searrow z & & \nearrow 1_{K'\wedge i} \quad \searrow \rho & \\
K' & \xrightarrow{1_{K'\wedge p}} & K' & \xrightarrow{x} & K
\end{array}$$

由 $(1_{K'}\wedge j)(v\wedge 1_M)\overline{m}_M=v(1_M\wedge j)\overline{m}_M=v=(1_{K'}\wedge j)\psi$ 可得 $(v\wedge 1_M)\overline{m}_M=\psi$ 和 $d(\psi)\in[\Sigma^2 M,K'\wedge M]=0$. 由 $m_K(x\wedge 1_M)(1_{K'}\wedge i)=m_K(1_K\wedge i)x=x=\rho(1_{K'}\wedge i)$ 可得 $\rho=m_K(x\wedge 1_M)$. 另一方面, 导数算子 $d(\rho)\in[\Sigma K'\wedge M,K]=0$. 总之, 相差符号我们有

(9.1.19) $$\rho=m_K(x\wedge 1_M),\quad \psi=(v\wedge 1_M)\overline{m}_M \text{ 以及 } d(\rho)=0, d(\psi)=0.$$

设 $\alpha'=\alpha_1\wedge 1_K\in[\Sigma^{q-1}K,K]$, 其中 $\alpha_1=j\alpha i\in\pi_{q-1}S$, 则 $j'\alpha'\alpha'=0$. 从而由 (9.1.17), 存在 $\alpha'_{K'\wedge M}\in[\Sigma^{q-1}K,K'\wedge M]$ 使得 $\rho\alpha'_{K'\wedge M}=\alpha'$. 而且 $d(\alpha'_{K'\wedge M})\in[\Sigma^q K,K'\wedge M]=0$. 因此 $\rho\alpha'_{K'\wedge M}i'=\alpha' i'=i'(\alpha_1\wedge 1_M)=\rho(vi\wedge 1_M)(\alpha_1\wedge 1_M)$, 从而有 $\alpha'_{K'\wedge M}i'=(vi\wedge 1_M)(\alpha_1\wedge 1_M)+\lambda\psi(ij\alpha ij)$ 某个 $\lambda\in Z_p$, 这是因为 $[\Sigma^{q-2}M,M]\cong Z_p\{ij\alpha ij\}$. 由于导数算子 $d(\alpha'_{K'\wedge M})=0, d(i')=0, d(vi\wedge 1_M)=0, d(\alpha_1\wedge 1_M)=0, d(\psi)=0$ 以及 $d(ij\alpha ij)=-\alpha_1\wedge 1_M$, 则对以上等式作用于 d 可得 $\lambda\psi(\alpha_1\wedge 1_M)=$

0, 从而 $\lambda=0$. 总之我们有

(9.1.20) $$\rho\alpha'_{K'\wedge M}=\alpha',\quad \alpha'_{K'\wedge M}i'=(vi\wedge 1_M)(\alpha_1\wedge 1_M),\quad d(\alpha'_{K'\wedge M})=0$$
$$\rho(1_{K'}\wedge ij)\alpha'_{K'\wedge M}=-\alpha''\in[\Sigma^{q-2}K,K],$$

其中用到 $d(\alpha'')=-\alpha'$ (参见 (6.5.5)).

命题 9.1.21 设 $p\geqslant 5$, V 为任意谱而 $f:\Sigma^tK'\to V\wedge K$ 为映射, 则 $f\cdot z=0\in[\Sigma^{t+q+1}S,V\wedge K]$.

证 由定理 6.5.16 及定理 6.5.19, 存在交换乘法 $\mu:K\wedge K\to K$ 使得 $\mu(i'i\wedge 1_K)=1_K=\mu(1_K\wedge i'i)$ 且存在内射 $\nu:\Sigma^{q+2}K\to K\wedge K$ 使得 $(jj'\wedge 1_K)\nu=1_K$. 因此由 (9.1.14) 我们有 $z\wedge 1_K=(z\wedge 1_K)(jj'\wedge 1_K)\nu=0$, 从而 $f\cdot z=(1_V\wedge\mu)(1_{V\wedge K}\wedge i'i)f\cdot z=(1_V\wedge\mu)(f\cdot z\wedge 1_K)i'i=0$. 证毕.

由 (9.1.6) 我们有 $\epsilon\cdot\overline{w}=p$(相差正负号), 因此容易证明 $\overline{w}\cdot\epsilon=(1_Y\wedge p)$. 由以下稳定同伦范畴中的 3×3 引理的同伦可换图形

(9.1.22)
$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^qM & \xrightarrow{\alpha'i'} & & \Sigma K & \xrightarrow{r} & & \Sigma Y\\
& \searrow j\alpha & \nearrow i'i & & \searrow^{(r\wedge 1_M)\overline{m}_K} & \nearrow_{1_Y\wedge j} & \\
& & \Sigma S & & Y\wedge M & & \\
& \nearrow \epsilon & & \searrow \overline{w} & \nearrow_{1_Y\wedge i} & \searrow^{m_M(\overline{u}\wedge 1_M)} & \\
Y & \xrightarrow{1_Y\wedge p} & & Y & \xrightarrow{\overline{u}} & & \Sigma^{q+1}M
\end{array}$$

可知 $\alpha'i':\Sigma^qM\to\Sigma K$ 的上纤维是 $Y\wedge M$, 由以下上纤维序列

(9.1.23) $$\Sigma^qM\xrightarrow{\alpha'i'}\Sigma K\xrightarrow{(r\wedge 1_M)\overline{m}_K}Y\wedge M\xrightarrow{m_M(\overline{u}\wedge 1_M)}\Sigma^{q+1}M.$$

所给出.

由 (9.1.10), $\alpha_1=j''\cdot\phi$, 其中 $\phi\in\pi_{2q-1}L$. 因此有

(9.1.24) $$m_M(\overline{u}\bar{h}\wedge 1_M)(\phi\wedge 1_M)=m_M(ij''\wedge 1_M)(\phi\wedge 1_M)=\alpha_1\wedge 1_M$$

由于 $\alpha'i'\cdot\alpha=0$, 因此由上纤维序列 (9.1.23), 存在 $\alpha_{Y\wedge M}\in[\Sigma^{2q+1}M,Y\wedge M]$ 使得 $\alpha=m_M(\overline{u}\wedge 1_M)\alpha_{Y\wedge M}$. 另外, $m_M(\overline{u}\wedge 1_M)\alpha_{Y\wedge M}m_M(\overline{u}\wedge 1_M)=\alpha m_M(\overline{u}\wedge 1_M)=m_M(\overline{u}\wedge 1_M)(1_Y\wedge\alpha)$, 从而由 (9.1.23) 我们有 $\alpha_{Y\wedge M}m_M(\overline{u}\wedge 1_M)=1_Y\wedge\alpha$ 模 $(r\wedge 1_M)\overline{m}_K*[\Sigma^{q-1}Y\wedge M,K]=0$, 这是因为 $[\Sigma^qK,K]=0=[\Sigma^{2q}M,K]$ (参见定理 6.5.9 及定理 6.2.11). 注意到 $d(\alpha_{Y\wedge M})\in[\Sigma^{2q+2}M,Y\wedge M]=0$, 这是因为 $[\Sigma^{q+1}M,M]=0$ 以及 $[\Sigma^{2q+1}M,K]=0$ (参见定理 6.2.11), 因此 $(j\overline{u}\wedge 1_M)\alpha_{Y\wedge M}\in[\Sigma^{q-1}M,M]\cap(\ker d)\cong Z_p\{\alpha_1\wedge 1_M\}$, 从而有 $(j\overline{u}\wedge 1_M)\alpha_{Y\wedge M}=\alpha_1\wedge 1_M$ (相差系数). 注意到 $m_M(\overline{u}\wedge 1_M)\alpha_{Y\wedge M}\cdot(\alpha_1\wedge 1_M)=\alpha(\alpha_1\wedge 1_M)=(\alpha_1\wedge 1_M)\alpha=m_M(\overline{u}\wedge 1_M)(\bar{h}\phi\wedge 1_M)\alpha$, 因此由 (9.1.23) 有 $\alpha_{Y\wedge M}(\alpha_1\wedge 1_M)=(\bar{h}\phi\wedge 1_M)\alpha$, 这是因为 $[\Sigma^{3q-1}M,K]=0$. 更进一步, 有 $(1_Y\wedge\alpha)(\bar{h}\phi\wedge 1_M)=\alpha_{Y\wedge M}m_M(\overline{u}\wedge 1_M)(\bar{h}\phi\wedge 1_M)=\alpha_{Y\wedge M}(\alpha_1\wedge 1_M)$. 总之, 我们有以下关系:

(9.1.25) $$m_M(\overline{u}\wedge 1_M)\alpha_{Y\wedge M}=\alpha,\quad \alpha_{Y\wedge M}m_M(\overline{u}\wedge 1_M)=1_Y\wedge\alpha$$

$$(j\overline{u} \wedge 1_M)\alpha_{Y\wedge M} = \alpha_1 \wedge 1_M (\text{相差系数})$$

$$\alpha_{Y\wedge M}(\alpha_1 \wedge 1_M) = (1_Y \wedge \alpha)(\bar{h}\phi \wedge 1_M) = (\bar{h}\phi \wedge 1_M)\alpha$$

其中 $\alpha_{Y\wedge M} \in [\Sigma^{2q+1}M, Y \wedge M] \cap (\mathrm{ker} d)$ 而 $\phi \in \pi_{2q-1}L$.

现在我们回顾谱 K 的环谱性质. 由定理 6.5.16 及 (6.5.17), 存在同伦等价 $K \wedge K = K \vee \Sigma L \wedge K \vee \Sigma^{q+2}K$ 并且存在投射和内射:

(9.1.26) $\mu : K \wedge K \to K, \quad \mu_2 : K \wedge K \to \Sigma L \wedge K, \quad jj' \wedge 1_K : K \wedge K \to \Sigma^{q+2}K$

$i'i \wedge 1_K : K \to K \wedge K, \quad \nu_2 : \Sigma L \wedge K \to K \wedge K, \quad \nu : \Sigma^{q+2}K \to K \wedge K$

使得 (参见定理 6.5.16, 定理 6.5.19)

$$\mu(i'i \wedge 1_K) = 1_K = \mu(1_K \wedge i'i), \quad (jj' \wedge 1_K)\nu = 1_K = (1_K \wedge jj')\nu \;,$$

$$(i'i \wedge 1_K)\mu + \nu_2\mu_2 + (jj' \wedge 1_K)\nu = 1_{K\wedge K}, \quad \mu_2(i'i \wedge 1_K) = 0$$

因此, 由 (9.1.4), 存在 $\overline{\mu}_2 \in [Y \wedge K, \Sigma L \wedge K]$ 使得 $\overline{\mu}_2(r \wedge 1_K) = \mu_2$ 并且 $d(\overline{\mu}_2) = 0 \in [Y \wedge K, L \wedge K]$, 这可以由 $d(\overline{\mu}_2(r \wedge 1_K)) = d(\mu_2) = 0$ (参见定理 6.5.19(H)) 得出. 由 (9.1.25) 的第一个等式, (9.1.23), (9.1.3) 以及以下稳定同伦范畴中的 3×3 引理的同伦可换图形 (9.1.28) 可知 $\alpha_{Y\wedge M} : \Sigma^{2q+1}M \to Y \wedge M$ 的上纤维是 $\Sigma L \wedge K$, 由以下上纤维序列

(9.1.27) $\Sigma^{2q+1}M \xrightarrow{\alpha_{Y\wedge M}} Y \wedge M \xrightarrow{\overline{\mu}_2(1_Y\wedge i')} \Sigma L \wedge K \xrightarrow{j'(j''\wedge 1_K)} \Sigma^{2q+2}M$

所给出.

(9.1.28)

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^q M & \xrightarrow{\alpha' i'} & \Sigma K & \xrightarrow{i''\wedge 1_K} & \Sigma L \wedge K \\
& \searrow i' \quad \nearrow \alpha' & & \searrow^{(r\wedge 1_M)\overline{m}_K} \nearrow \overline{\mu}_2(1_Y \wedge i') & \\
& \Sigma^q K & & Y \wedge M & \\
& \nearrow_{(j''\wedge 1_K)} \searrow j' & & \nearrow_{\alpha_{Y\wedge M}} \searrow^{m_M(\overline{u}\wedge 1_M)} & \\
L \wedge K & \xrightarrow{j'(j''\wedge 1_K)} & \Sigma^{2q+1}M & \xrightarrow{\alpha} & \Sigma^{q+1}M
\end{array}$$

由于 $\epsilon \wedge 1_K = \mu(i'i \wedge 1_K)(\epsilon \wedge 1_K) = 0$, 因此上纤维序列 (9.1.4) 导出分裂的上纤维序列 $K \xrightarrow{i'i\wedge 1_K} K \wedge K \xrightarrow{r\wedge 1_K} Y \wedge K$. 即存在同伦等价 $K \wedge K = K \vee Y \wedge K$, 从而有 $Y \wedge K = \Sigma L \wedge K \vee \Sigma^{q+2}K$ 并且存在投射 $\overline{\mu}_2 : Y \wedge K \to \Sigma L \wedge K$, $j\overline{u} \wedge 1_K : Y \wedge K \to \Sigma^{q+2}K$ 和内射 $\nu_Y : \Sigma^{q+2}K \to Y \wedge K$, $\overline{\nu}_2 : \Sigma L \wedge K \to Y \wedge K$, 使得 $\nu_Y = (r \wedge 1_K)\nu$ 并且

(9.1.29) $(j\overline{u} \wedge 1_K)\nu_Y = 1_K, \quad \overline{\mu}_2\overline{\nu}_2 = 1_{L\wedge K}, \quad \nu_Y(j\overline{u} \wedge 1_K) + \overline{\nu}_2\overline{\mu}_2 = 1_{Y\wedge K}$

由 (9.1.1), (9.1.15), (9.1.3) 和稳定同伦范畴中的 3×3 引理的同伦可换图形可知 $vi : S \to K'$ 的上纤维是 ΣL, 由以下上纤维序列

(9.1.30) $S \xrightarrow{vi} K' \xrightarrow{k} \Sigma L \xrightarrow{\xi} \Sigma S$

所给出, 并且有关系 $\xi \cdot i'' = p$ 使得 $\xi i'' \wedge 1_M = p \wedge 1_M = 0$, 从而 $\xi \wedge 1_M = \alpha(j'' \wedge 1_M)$. 另外, $\xi i'' \wedge 1_K = p \wedge 1_K = 0$, 从而 $\xi \wedge 1_K \in (j'' \wedge 1_K)^*[\Sigma^q K, K] = 0$. 因此, 上纤维序列 (9.1.30) 导出分裂的上纤维序列 $K \xrightarrow{vi\wedge 1_K} K' \wedge K \xrightarrow{k\wedge 1_K} \Sigma L \wedge K$. 这就是说 $K' \wedge K$

分裂成为 $K \vee \Sigma L \wedge K$, 从而存在 $\nu_2' : \Sigma L \wedge K \to K' \wedge K$ 使得 $(k \wedge 1_K)\nu_2' = 1_{L\wedge K}$, 并且 $\mu(x \wedge 1_K)(vi \wedge 1_K) = 1_K$, $(vi \wedge 1_K)\mu(x \wedge 1_K) + \nu_2'(k \wedge 1_K) = 1_{K'\wedge K}$. 更进一步, $x(1_{K'} \wedge \epsilon) = (1_K \wedge \epsilon)(x \wedge 1_Y) = 0 \in [\Sigma^{-1}K' \wedge Y, K]$. 因此, 由 (9.1.14), $1_{K'} \wedge \epsilon = z \cdot \omega$, 其中 $\omega \in [K' \wedge Y, \Sigma^{q+2}S]$. 我们推断 $K' \wedge Y$ 将分裂成为 $\Sigma^{q+2}S \vee \Sigma L \wedge K$, 这可由以下稳定同伦范畴中的 3×3 引理的同伦可换图形得出

$$\begin{array}{ccccccc} K' \wedge Y & \xrightarrow{1_{K'}\wedge\epsilon} & & \Sigma K' & \xrightarrow{x} & & \Sigma K \\ & \searrow \widetilde{\nu} & & \nearrow z \quad \searrow^{1_{K'}\wedge i'i} & & \nearrow^{\mu(x\wedge 1_K)} & \\ & & \Sigma^{q+2}S & & \Sigma K' \wedge K & & \\ & \nearrow jj' & & \searrow 0 \quad \nearrow \nu_2' & & \searrow^{1_{K'}\wedge r} & \\ K & \xrightarrow{0} & & \Sigma^2 L \wedge K & \xrightarrow{\widetilde{\nu}_2} & & \Sigma K' \wedge Y \end{array} \tag{9.1.31}$$

即我们有分裂的上纤维序列 $\Sigma L \wedge K \xrightarrow{\widetilde{\nu}_2} K' \wedge Y \xrightarrow{\widetilde{\nu}} \Sigma^{q+2}S$, 从而存在 $\widetilde{\tau} : \Sigma^{q+2}S \to K' \wedge Y, \widetilde{\mu}_2 : K' \wedge Y \to \Sigma L \wedge K$ 使得

(9.1.32) $$\widetilde{\nu} \cdot \widetilde{\tau} = 1_S, \quad \widetilde{\mu}_2\widetilde{\nu}_2 = 1_{L\wedge K}, \quad \widetilde{\tau}\widetilde{\nu} + \widetilde{\nu}_2\widetilde{\mu}_2 = 1_{K'\wedge Y}$$

命题 9.1.33 设 V 为任意谱, 则存在直和分解

$$[\Sigma^* M, V \wedge K] = (\mathrm{ker}d)i' \oplus (\mathrm{ker}d)i'ij$$

其中 $\mathrm{ker}d = [\Sigma^* K, V \wedge K] \cap (\mathrm{ker}d)$.

证 对任意 $f \in [\Sigma^* M, V \wedge K]$, $(1_V \wedge \mu)(fi \wedge 1_K)i'i = (1_V \wedge \mu(1_K \wedge i'i))fi = fi$, 其中 $\mu : K \wedge K \to K$ 是 K 的乘法使满足 $\mu(i'i \wedge 1_K) = 1_K = \mu(1_K \wedge i'i)$ (参见 (9.1.26)). 因此 $f = (1_V \wedge \mu)(fi \wedge 1_K)i' + f_2 \cdot j$, 某个 $f_2 \in [\Sigma^{*+1}S, V \wedge K]$. 随之我们有 $f = (1_V \wedge \mu)(fi \wedge 1_K)i' + (1_V \wedge \mu)(f_2 \wedge 1_K)i'ij$, 从而结论得证. 这是因为 $d(fi \wedge 1_K) = fi \wedge d(1_K) = 0$, $d(1_V \wedge \mu) = 1_V \wedge d(\mu) = 0$ (参见定理 6.5.19(G)). 证毕.

9.2 a_0 相关元素收敛性的一般结果

由 [12] 第 11 页定理 1.2.14, 有一个 Adams 谱序列中的非零二阶微分 $d_2(h_n) = a_0 b_{n-1}, n \geqslant 1$, 其中 $d_2 : \mathrm{Ext}_A^{1,p^n q}(Z_p, Z_p) \to \mathrm{Ext}_A^{3,p^n q+1}(Z_p, Z_p)$ 为 Adams 谱序列的二阶微分算子. 我们称 $h_n \in \mathrm{Ext}_A^{1,p^n q}(Z_p, Z_p)$ 与 $b_{n-1} \in \mathrm{Ext}_A^{2,p^n q}(Z_p, Z_p)$ 为 a_0 相关的一对元素. 本节将证明一般的 a_0 相关元素分别在球谱和 Moore 谱中收敛的结果.

定义 9.2.1 设 $p \geqslant 7, s \leqslant 4$, 且有 Adams 谱序列的非零二阶微分 $d_2(\sigma) = a_0\sigma'$, 我们称 $\sigma \in \mathrm{Ext}_A^{s,tq}(Z_p, Z_p)$ 与 $\sigma' \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq}(Z_p, Z_p)$ 为一对 a_0 相关元素. 我们有以下的一般结果.

主要定理 A (文献 [8] 定理 A 的推广) 设 $p \geqslant 7, s \leqslant 4$, σ 是 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(Z_p, Z_p)$ 的唯一生成元, 而且有非零的二阶微分 $d_2(\sigma) = a_0\sigma'$, 其中 σ' 是 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq}(Z_p, Z_p)$ 的唯一生成元或者是它的两个生成元 σ_1', σ_2' 的线性组合. 更进一步, 假设

(I) $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq-u}(Z_p, Z_p) = 0 (r = 2, 3, 4, u = 1, 2)$.

$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{h_0\sigma\}$, $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+1}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{a_0\sigma\}$,
$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq-q}(Z_p,Z_p)=0$
$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+kq+r-1}(Z_p,Z_p)=0(k=2,3,4,r=0,1)$,
$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+kq+r-2}(Z_p,Z_p)=0(k=1,2,3,r=0,1)$.

(II) $\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+rq+u}(Z_p,Z_p)=0,\ r=2,3,4,u=-1,0$ 或 $r=3,4,u=1$,
$\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq}(Z_p,Z_p)=0$ 或有唯一生成元 ι 使满足 $a_0^2\iota\neq 0$,
$\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+q}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{h_0\sigma'\}$ 或 $Z_p\{h_0\sigma_1',h_0\sigma_2'\}$.

(III) $\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+rq+1}(Z_p,Z_p)=0(r=1,3,4)$,
$\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+rq}(Z_p,Z_p)=0(r=2,3)$
$\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+2q+1}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{\widetilde{\alpha}_2\sigma'\}$ 或 $Z_p\{\widetilde{\alpha}_2\sigma_1',\widetilde{\alpha}_2\sigma_2'\}$
$\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+2}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{a_0^2\sigma'\}$ 或 $Z_p\{a_0^2\sigma_1',a_0^2\sigma_2'\}$
$\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+1}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{a_0\iota\}$ 或 0,

则 $h_0\sigma'\in\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+q}(Z_p,Z_p)$ 以及 $i_*(h_0\sigma)\in\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*M,Z_p)$ 在 Adams 谱序列中都是永久循环.

为了证明主要定理 A, 我们需要一些预备知识.

对于 (9.1.10) 中的 $(\alpha_1)_L\in[\Sigma^{q-1}L,S]$, 我们有 $\alpha_1\cdot(\alpha_1)_L\in[\Sigma^{2q-2}L,S]=0$ 由 $\pi_{rq-2}S=0$ $(r=2,3)$ 所得出. 因此存在 $\bar\phi\in[\Sigma^{2q-1}L,L]$ 使得 $j''\bar\phi=(\alpha_1)_L\in[\Sigma^{q-1}L,S]$ 并且 $\bar\phi\cdot i''\in\pi_{2q-1}L$. 由于 $\pi_{rq-1}S$ 分别当 $r=1,2$ 时有唯一生成元 $\alpha_1=j\alpha i,\alpha_2=j\alpha^2 i$ 并且 $j''\phi\cdot p=\alpha_1\cdot p=0$, 因此 $\phi\cdot p=i''\alpha_2$ (相差系数). 即 $i''_*\pi_{2q-1}S$ 也由 ϕ 所生成, 从而有 $\pi_{2q-1}L\cong Z_{p^s}\{\phi\}$, 某个 $s\geqslant 1$. 因此, $\overline{\phi}i''=\lambda\phi$, 某个 $\lambda\in Z_{(p)}$ 并且有 $\lambda\alpha_1=\lambda j''\phi=j''\overline{\phi}i''=(\alpha_1)_L i''=\alpha_1$, 从而 $\lambda=1\ (\mathrm{mod}\ p)$. 更进一步, $(\alpha_1)_L\bar\phi\in[\Sigma^{3q-2}L,S]=0$, 这是因为 $\pi_{rq-2}S=0$ $(r=3,4)$, 因此由 (9.1.13), 存在 $\bar\phi_W\in[\Sigma^{3q-1}L,W]$ 使得 $u\bar\phi_W=\bar\phi$. 总之, 我们有元素 $\overline{\phi}\in[\Sigma^{2q-1}L,L],\overline{\phi}_W\in[\Sigma^{3q-1}L,W]$, 使得

(9.2.2) $\qquad j''\bar\phi=(\alpha_1)_L,\quad \overline{\phi}i''=\lambda\phi,\ \lambda=1\ (\mathrm{mod}\ p),\quad u\overline{\phi}_W=\overline{\phi}$

命题 9.2.3 设 $p\geqslant 7$, 则

(1) 相差系数有 $\phi\cdot p=i''\alpha_2=\pi\cdot\alpha_1\neq 0$, $(\alpha_1)_L\cdot\pi=\alpha_2$, $p\cdot(\alpha_1)_L=\alpha_2\cdot j''=(\alpha_1)_L\pi j''\neq 0$, $[\Sigma^{2q-1}L,L]$ 有唯一生成元 $\overline{\phi}$ 模一些 filtration $\geqslant 2$ 元素.

(2) $\bar h\bar\phi(p\wedge 1_L)\neq 0\in[\Sigma^{2q}L,Y]$.

(3) $\bar h\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)(p\wedge 1_L)\neq 0\in[\Sigma^{3q}L,Y]$, $j''\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi=j\alpha^3 i\in\pi_{3q-1}S$ (相差 mod p 非零系数), 并且 $\bar h\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi\neq 0\in\pi_{4q}Y$, 其中 $\widetilde{\phi}\in[\Sigma^{2q-1}L\wedge L,L]$ 使得 $\widetilde{\phi}(1_L\wedge i'')=\bar\phi$.

(4) $\pi_{4q}Y$ 有唯一生成元 $\bar h\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi$ 使得 $\bar h\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi\cdot p=0$.

证 (1) 由于 $j''\phi\cdot p=\alpha_1\cdot p=0=j''\pi\cdot\alpha_1$, 并且 $\pi_{2q-1}S\cong Z_p\{\alpha_2\}$, 因此 $\phi\cdot p=i''\alpha_2=\pi\cdot\alpha_1$ (相差系数). 我们推断 $\phi\cdot p\neq 0$, 这可证明如下. 观察以下由

(9.1.3) 导出的恰当序列

$$Z_p\{j\alpha^2\} \cong [\Sigma^{2q-1}M,S] \xrightarrow{i''_*} [\Sigma^{2q-1}M,L] \xrightarrow{j''_*} [\Sigma^{q-1}M,S] \xrightarrow{(\alpha_1)_*}$$

右边的群有唯一生成元 $j\alpha$ 使满足 $(\alpha_1)_*j\alpha = j\alpha ij\alpha = \frac{1}{2}j\alpha\alpha ij \neq 0$, 因此以上 $(\alpha_1)_*$ 单射, $\mathrm{im}j''_* = 0$, 从而有 $[\Sigma^{2q-1}M,L] \cong Z_p\{i''j\alpha^2\}$. 反设 $\phi\cdot p = 0$, 则 $\phi \in i^*[\Sigma^{2q-1}M,L]$, 从而 $\phi = i''j\alpha^2 i$, $\alpha_1 = j''\phi = j''i''\alpha_2 = 0$, 这是一个矛盾. 这证明了 $\phi\cdot p \neq 0$, 从而以上的系数是 (mod p) 非零.

第二个结果的证明类似. 为证明最后一个结果, 令 x 为 $[\Sigma^{2q-1}L,L]$ 的任一元素, 则 $j''x \in [\Sigma^{q-1}L,S] \cong Z_{p^s}\{(\alpha_1)_L\}$, 某个 $s \geqslant 2$. 因此, $j''x = \lambda j''\overline{\phi}$, 某个 $\lambda \in Z_{p^s}$, 从而 $x = \lambda\overline{\phi} + i''x'$, 其中 $x' \in [\Sigma^{2q-1}L,S]$. 由于 $x'i'' \in \pi_{2q-1}S \cong Z_p\{j\alpha^2 i\}$ 并且 $\pi_{3q-1}S \cong Z_p\{j\alpha^3 i\}$, 因此 x' 是 filtration $\geqslant 2$ 元素. 结果得证.

(2) 反设 $\bar{h}\bar{\phi}(p\wedge 1_L) = 0$, 则由 (9.1.9) 有 $\bar{\phi}(p\wedge 1_L) = \lambda'\pi\cdot(\alpha_1)_L$, 其中 $\lambda' \in Z_{(p)}$. 因为 $j''\pi\wedge 1_M = p\wedge 1_M = 0$, 因此有 $\pi\wedge 1_M = (i''\wedge 1_M)\alpha$, 从而得出 $\lambda'(\pi\wedge 1_M)i\cdot(\alpha_1)_L = \lambda'(1_L\wedge i)\pi(\alpha_1)_L = 0$. 更进一步可得 $\lambda'(i''\wedge 1_M)\alpha i(\alpha_1)_L = \lambda'(\pi\wedge 1_M)i(\alpha_1)_L = 0$, 因此 $\lambda'\alpha i(\alpha_1)_L \in (\alpha_1\wedge 1_M)_*[\Sigma^q L,M]$, 从而 $\lambda'\alpha i\alpha_1 \in (\alpha_1\wedge 1_M)(i'')^*[\Sigma^q L,M] = 0$. 最后为零可由以下 (9.1.3) 导出的恰当序列

$$[\Sigma^{2q}S,M] \xrightarrow{(j'')^*} [\Sigma^q L,M] \xrightarrow{(i'')^*} [\Sigma^q S,M] \xrightarrow{(\alpha_1)^*}$$

得出, 其中右边的群有唯一生成元 αi 使满足 $(\alpha_1)^*\alpha i = \alpha ij\alpha i \neq 0$, 从而有 $(i'')^*[\Sigma^q L, M] = 0$. 以上等式蕴涵 $\lambda' = 0$, 从而得出 $\bar{\phi}(p\wedge 1_L) = 0$, 这和 (1) 中的结果 $j''\overline{\phi}(p\wedge 1_L) = p\cdot(\alpha_1)_L \neq 0$ 相矛盾. 这证明了 $\bar{h}\bar{\phi}(p\wedge 1_L) \neq 0$.

(3) 由于 $\pi_{rq-2}S = 0$($r = 2,3,4$), 因此有 $\bar{\phi}(1_L\wedge\alpha_1) \in [\Sigma^{3q-2}L,L] = 0$, 从而存在 $\widetilde{\phi} \in [\Sigma^{2q-1}L\wedge L,L]$ 使得 $\widetilde{\phi}(1_L\wedge i'') = \bar{\phi}$. 我们首先证明 $\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)(p\wedge 1_L) \neq 0$. 不然的话, 如果它为零, 则 $\overline{\phi}\pi\cdot p = \widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)(p\wedge 1_L)i'' = 0$, 从而 $\overline{\phi}\pi \in i^*[\Sigma^{3q-1}M,L]$. 可是, $(j'')_*[\Sigma^{3q-1}M,L] \subset [\Sigma^{2q-1}M,S]$ 后者有唯一生成元 $j\alpha^2$ 使满足 $(\alpha_1)_*(j\alpha^2) = j\alpha ij\alpha^2 \neq 0$, 因此 $(j'')_*[\Sigma^{3q-1}M,L] = 0$, 从而有 $(\alpha_1)_L\pi = j''\overline{\phi}\pi \in i^*(j'')_*[\Sigma^{3q-1}M,L] = 0$, 这和 (1) 的结果相矛盾.

现在反设 $\bar{h}\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)(p\wedge 1_L) = 0$, 因此由 (9.1.9), $\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)(p\wedge 1_L) = \pi\cdot\omega$, 其中 $\omega \in [\Sigma^{2q-1}L,S]$ 满足 $\omega i'' = \lambda_1\alpha_2$, 某个 $\lambda_1 \in Z_p$. 随之有 $(i''\wedge 1_M)\alpha i\omega = (1_L\wedge i)\pi\cdot\omega = 0$, 因此 $\alpha i\omega \in (\alpha_1\wedge 1_M)_*[\Sigma^{2q}L,M]$, 从而有 $\lambda_1\alpha i\alpha_2 = \alpha i\omega i'' \in (\alpha_1\wedge 1_M)_*(i'')^*[\Sigma^{2q}L,M] = (\alpha_1)^*(i'')^*[\Sigma^{2q}L.M] = 0$. 这证明了 $\lambda_1 = 0$ (因为 $\alpha i\alpha_2 = \alpha ij\alpha^2 i \neq 0$). 因此, $\omega = \lambda_2 j\alpha^3 i\cdot j''$ 并且 $\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)(p\wedge 1_L) = \lambda_2\pi\cdot j\alpha^3 i\cdot j''$, 某个 $\lambda_2 \in Z_{(p)}$. 随之有 $\overline{\phi}\pi\cdot p = \widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)(p\wedge 1_L)i'' = 0$, 因此 $\overline{\phi}\pi \in i^*[\Sigma^{3q-1}M,L]$, 从而 $(\alpha_1)_L\pi = j''\overline{\phi}\pi \in i^*(j'')_*[\Sigma^{3q-1}M,L] = 0$. 这和 (1) 中关于 $(\alpha_1)_L\pi \neq 0$ 的结果相矛盾.

对第二个结果, 由 (9.1.9) 有 $\pi\cdot j = i''j\alpha$, 因此 $j''\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi\cdot j = j''\widetilde{\phi}(\pi\wedge$

$1_L)i''j\alpha = j''\overline{\phi}\pi j\alpha = (\alpha_1)_L\pi j\alpha = \alpha_2 j\alpha = j\alpha^3 ij$ (相差 mod p 非零系数). 最终我们有 $j''\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi = j\alpha^3 i$ (相差非零系数), 这是因为 $\pi_{3q-1}S \cong Z_p\{\alpha_3\}$, 从而使得 $p^*\pi_{3q-1}S = 0$.

对最后一个结果, 我们先证明 $\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi \neq 0$. 不然的话, 如果它为零, 则 $0 = \widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi\cdot j = \widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)i''j\alpha = \overline{\phi}\pi j\alpha$, 从而 $\alpha_2 j\alpha = (\alpha_1)_L\pi j\alpha = j''\overline{\phi}\pi j\alpha = 0$, 这是一个矛盾 (因为 $\alpha_2 j\alpha = j\alpha^2 ij\alpha \neq 0 \in [\Sigma^{3q-2}M, S]$). 现在反设 $\bar{h}\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi = 0$, 因此, 由 (9.1.9) 以及 $\pi_{3q-1}S \cong Z_p\{\alpha_3\}$ 我们有 $\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi = \lambda\pi\cdot j\alpha^3 i = \lambda i''j\alpha^4 i$, 某个 $\lambda \in Z_p$, 从而有 $j''\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi = 0$, 这和第二个结果相矛盾.

(4) 由于 $(\overline{u})_*\pi_{4q}Y \subset \pi_{3q-1}M$ 而后者有唯一生成元 $ij\alpha^3 i = ij''\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi = \overline{u}\bar{h}\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi$(相差非零系数) 且 $\pi_{4q-1}S \cong Z_p\{j\alpha^4 i\}$ 使得 $(\overline{w})_*\pi_{4q-1}S = 0$, 因此 $\pi_{4q}Y$ 有唯一生成元 $\bar{h}\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi$. 更进一步由 (9.1.7), $\bar{h}\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi\cdot p = \bar{h}(p\wedge 1_L)\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi = \bar{h}i''\xi\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi = \overline{w}j\alpha^4 i = 0$. 证毕.

命题 9.2.4　在 $p \geqslant 7$ 和主要定理 A 的假设之下, 我们有

$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*L, Z_p) = 0$, $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq}(H^*L, H^*L) \cong Z_p\{(\sigma')_L\}$ 或者 $Z_p\{(\sigma'_1)_L, (\sigma'_2)_L\}$, 其中 L 为 (9.1.3) 中的谱, 并且有关系式 $(i'')^*(\sigma')_L = (i'')_*(\sigma')$ 或者 $(i'')^*(\sigma'_1)_L = (i'')_*(\sigma'_1), (i'')^*(\sigma'_2)_L = (i'')_*(\sigma'_2)$.

证　考查以下由 (9.1.3) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(Z_p, Z_p) \xrightarrow{i''_*} \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*L, Z_p) \xrightarrow{j''_*} \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq}(Z_p, Z_p) \xrightarrow{(\alpha_1)_*}$$

右边的群有唯一生成元 σ' 或者两个生成元 σ'_1, σ'_2 使满足 $(\alpha_1)_*(\sigma') = h_0\sigma' \neq 0$ 或者 $(\alpha_1)_*(\sigma'_1) = h_0\sigma'_1 \neq 0, (\alpha_1)_*(\sigma'_2) = h_0\sigma'_2 \neq 0 \in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+q}(Z_p, Z_p)$ (参见假设 II), 因此以上 $(\alpha_1)_*$ 单射, 从而 $\mathrm{im}\, j''_* = 0$. 更进一步, 左边的群有唯一生成元 $h_0\sigma = (\alpha_1)_*(\sigma)$, 因此 $\mathrm{im}\, i''_* = 0$ 从而 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*L, Z_p) = 0$. 再考查以下由 (9.1.3) 导出的恰当序列

$$0 = \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*L, Z_p) \xrightarrow{(j'')^*} \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq}(H^*L, H^*L) \xrightarrow{(i'')^*} \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq}(H^*L, Z_p) \xrightarrow{(\alpha_1)^*}$$

由于 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq}(Z_p, Z_p) \cong Z_p\{\sigma'\}$ 或者 $Z_p\{\sigma'_1, \sigma'_2\}$ 而 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq-q}(Z_p, Z_p) = 0$, 因此右边的群有唯一生成元 $(i'')_*(\sigma')$ 或者两个生成元 $(i'')_*(\sigma'_1)$, $(i'')_*(\sigma'_2)$, 它们在 $(\alpha_1)^*$ 之下的象为零. 因此, 关于中间的群的结果得出. 证毕.

命题 9.2.5　在 $p \geqslant 7$ 以及主要定理 A 的假设之下, 我们有

(1) $\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+3q+1}(H^*L, Z_p) \cong Z_p\{\overline{\phi}_*\pi_*(\sigma'_1), \overline{\phi}_*\pi_*(\sigma'_2)\}$ 或唯一生成元 $\overline{\phi}_*\pi_*\sigma'$.

(2) $\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+3q+2}(H^*Y, H^*L) \cong Z_p\{\bar{h}_*\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*(\sigma'_1)_L, \bar{h}_*\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*(\sigma'_2)_L\}$ 或唯一生成元 $\bar{h}_*\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*(\sigma')_L$, 其中 $\widetilde{\phi} \in [\Sigma^{2q-1}L\wedge L, L]$ 使得 $\widetilde{\phi}(1_L\wedge i'') = \overline{\phi} \in [\Sigma^{2q-1}L, L]$ (参见命题 9.2.3(3)).

证 (1) 考查以下由 (9.1.3) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+3q+1}(Z_p,Z_p) \xrightarrow{i''_*} \mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+3q+1}(H^*L,Z_p)$$
$$\xrightarrow{j''_*} \mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+2q+1}(Z_p,Z_p) \xrightarrow{(\alpha_1)_*}$$

左边的群为零而右边的群有唯一生成元 $\widetilde{\alpha}_2\sigma'$ 或者两个生成元 $\widetilde{\alpha}_2\sigma'_1,\widetilde{\alpha}_2\sigma'_2$(参见假设 III). 注意到 $j\alpha\alpha i=(\alpha_1)_L\cdot\pi=j''\bar{\phi}\cdot\pi\in\pi_{2q-1}S$ (参见命题 9.2.3), 因此 $\widetilde{\alpha}_2\sigma'_1=j_*\alpha_*\alpha_*i_*(\sigma'_1)=j''_*\bar{\phi}_*\pi_*(\sigma'_1)$ 以及 $\widetilde{\alpha}_2(\sigma'_2)=j''_*\bar{\phi}_*\pi_*(\sigma'_2)$, 从而关于中间的群的结果得出.

(2) 考查以下由 (9.1.3) 导出的恰当序列

$$0=\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+4q+1}(H^*L,Z_p) \xrightarrow{(j'')^*} \mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+3q+1}(H^*L,H^*L)$$
$$\xrightarrow{(i'')^*} \mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+3q+1}(H^*L,Z_p) \xrightarrow{(\alpha_1)^*}$$

由假设 III, $\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+rq+1}(Z_p,Z_p)=0$ ($r=3,4$). 由 (1) 以及 $\bar{\phi}=\widetilde{\phi}(1_L\wedge i'')$, 右边的群有唯一生成元 $\bar{\phi}_*\pi_*(\sigma')=(i'')^*(\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*(\sigma')_L$ 或者有两个生成元 $\bar{\phi}_*\pi_*(\sigma'_1)=(i'')^*\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*(\sigma'_1)_L,\bar{\phi}_*\pi_*(\sigma'_2)=(i'')^*\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*(\sigma'_2)_L$ 它们在 $(\alpha_1)^*$ 的像都为零, 因此中间的群有唯一生成元 $\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*(\sigma')_L$ 或者有两个生成元 $\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*(\sigma'_1)_L,\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*(\sigma'_2)_L$. 更进一步由 $\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+rq}(Z_p,Z_p)$ =0($r=2,3$) 可知 $\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+2q}(Z_p,H^*L)=0$, 因此由 (9.1.9), $\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+3q+2}(H^*Y,H^*L)=\bar{h}_*\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+3q+1}(H^*L,H^*L)$ 并得出所要的结果. 证毕.

命题 9.2.6 在 $p\geqslant 7$ 和主要定理 A 的假设之下, 我们有

(1) $\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+3q+1}(H^*Y,H^*L)=0,\quad \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+4q+2}(H^*Y,Z_p)=0$.

(2) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q+r}(H^*Y,H^*L)=0$, $r=0,1$.

证 (1) 考查以下由 (9.1.9) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+3q}(H^*L,H^*L) \xrightarrow{(\bar{h})_*} \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+3q+1}(H^*Y,H^*L)$$
$$\xrightarrow{(j\overline{u})_*} \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+2q-1}(Z_p,H^*L) \xrightarrow{(\pi)_*}$$

由假设 II: $\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+rq}(Z_p,Z_p)=0$($r=2,3,4$) 可知左边的群为零. 由假设 II: $\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+rq-1}(Z_p,Z_p)=0(r=2,3)$ 可知右边的群也为零. 因此中间的群如所求的为零.

对于第二个结果, 考查以下由 (9.1.9) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+4q+1}(H^*L,Z_p) \xrightarrow{(\bar{h})_*} \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+4q+2}(H^*Y,Z_p)$$
$$\xrightarrow{(j\overline{u})_*} \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+3q}(Z_p,Z_p)$$

由假设 II: $\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+rq+1}(Z_p,Z_p)=0$ ($r=3,4$) 可知左边的群为零. 类似地, 右边的群也为零, 因此中间的群如所求的为零.

(2) 考查以下由 (9.1.9) 导出的恰当序列 ($r=0,1$)

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q+r-1}(H^*L,H^*L) \xrightarrow{(\bar{h})_*} \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q+r}(H^*Y,H^*L)$$
$$\xrightarrow{(j\overline{u})_*} \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q+r-2}(Z_p,H^*L)$$

由假设 I: $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+kq+r-1}(Z_p,Z_p)=0\ (k=2,3,4,r=0,1)$ 可知左边的群为零. 由假设 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+kq+r-2}(Z_p,Z_p)=0\ (k=2,3,r=0,1)$ 可知右边的群也为零, 从而中间的群如所求的为零. 证毕.

命题 9.2.7 在 $p\geqslant 7$ 和主要定理 A 的假设之下, 我们有

(1) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q}(H^*W,H^*L)\cong Z_p\{(\overline{\phi}_W)_*(\sigma)_L\}$, 其中 $\overline{\phi}_W\in[\Sigma^{3q-1}L,W]$ 满足 $u\overline{\phi}_W=\overline{\phi}\in[\Sigma^{2q-1}L,L]$, 而 $(\sigma)_L\in \mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*L,H^*L)$ 使得 $(i'')^*(\sigma)_L=(i'')_*(\sigma)\in \mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*L,Z_p)$.

(2) $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+3q}(H^*Y,H^*L)=0,\quad \mathrm{Ext}_A^{s,tq+q-1}(H^*M,H^*L)=0.$

证 (1) 考查以下由 (9.1.11) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q}(H^*L,H^*L)\xrightarrow{w_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q}(H^*W,H^*L)$$
$$\xrightarrow{(j''u)_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(Z_p,H^*L)\xrightarrow{\phi_*}$$

由假设 I: $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+rq}(Z_p,Z_p)=0\ (r=2,3,4)$ 可知左边的群为零. 由 $(i'')^*\cdot \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(Z_p,H^*L)\subset \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(Z_pZ_p)$ 而后者有唯一生成元 $h_0\sigma=(\alpha_1)^*\cdot(\sigma)=(i'')^*((\alpha_1)_L)^*(\sigma)$ 并且 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(Z_p,Z_p)$=0, 因此右边的群有唯一生成元 $((\alpha_1)_L))^*(\sigma)=((\alpha_1)_L)_*(\sigma)_L=(j''u)_*(\overline{\phi}_W)_*(\sigma)_L$, 其中 $(\sigma)_L\in\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*L,H^*L)$ 使满足 $(i'')^*(\sigma)_L$=$(i'')_*(\sigma)\in\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*L,Z_p)$. 更进一步, $\phi_*((\alpha_1)_L)_*(\sigma)_L$=$0\in\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+3q}(H^*L,H^*L)$, 因此中间的群有唯一生成元 $(\overline{\phi}_W)_*(\sigma)_L$.

(2) 考查以下分别由 (9.1.9) 和 (9.1.1) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+3q-1}(H^*L,H^*L)\xrightarrow{\bar{h}_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq+3q}(H^*Y,H^*L)$$
$$\xrightarrow{(j\overline{u})_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq+2q-2}(Z_p,H^*L)$$
$$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q-1}(Z_p,H^*L)\xrightarrow{i_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q-1}(H^*M,H^*L)$$
$$\xrightarrow{j_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q-2}(Z_p,H^*L)$$

由假设 I:$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq-1}(Z_p,Z_p)=0(\ r=2,3,4)$ 可知上面左边的群为零. 而由假设 I: $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq-2}(Z_p,Z_p)=0\ (\ r=2,3\ )$ 上面右边的群为零, 因此上面中间的群如所求的为零. 类似地, 下面中间的群也为零. 证毕.

命题 9.2.8 在 $p\geqslant 7$ 和主要定理 A 的假设 (I), (III) 之下, 我们有

$\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+2}(H^*M,Z_p)=0$

$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*M\wedge L,Z_p)\cong Z_p\{(i\wedge 1_L)_*\pi_*(\sigma)\}$

证 考查以下由 (9.1.1) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+2}(Z_p,Z_p)\xrightarrow{i_*}\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+2}(H^*M,Z_p)$$
$$\xrightarrow{j_*}\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+1}(Z_p,Z_p)\xrightarrow{p_*}$$

由假设 III, 右边的群为零或有唯一生成元 $a_0\iota$ 使满足 $p_*(a_0\iota)=a_0^2\iota\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{s+4,tq+2}(Z_p,Z_p)$, 因此 $\mathrm{im}\ j_*=0$. 由假设 III, 左边的群有唯一生成元 $a_0^2\sigma'$ 或有两个生成元 $a_0^2\sigma_1'=p_*(a_0\sigma_1'),a_0^2\sigma_2'=p_*(a_0\sigma_2')$, 从而有 $\mathrm{im}\ i_*=0$. 因此, 中间的群如所求的为零.

对于第二个结果, 考查以下由 (9.1.1) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*L,Z_p) \xrightarrow{(i\wedge 1_L)_*} \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*M\wedge L,Z_p)$$
$$\xrightarrow{(j\wedge 1_L)_*} \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*L,Z_p)$$

由命题 (9.2.4), 右边的群为零. 由于 $(j'')_*\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*L,Z_p)\subset \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+1}(Z_p, Z_p)\cong Z_p\{a_0\sigma=(j'')_*\pi_*(\sigma)\}$ 并且 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(Z_p,Z_p)=0$ 因此左边的群有唯一生成元 $\pi_*(\sigma)$ 从而结论得出. 证毕.

下面开始着手证明主要定理 A. 它将通过在与球谱相关的谱的 Adams 分解中进行推理来证明. 设

(9.2.9)
$$\begin{array}{ccccccc}\cdots\xrightarrow{\bar a_2} & \Sigma^{-2}E_2 & \xrightarrow{\bar a_1} & \Sigma^{-1}E_1 & \xrightarrow{\bar a_0} & E_0=S \\ & \downarrow\bar b_2 & & \downarrow\bar b_1 & & \downarrow\bar b_0 \\ & \Sigma^{-2}KG_2 & & \Sigma^{-1}KG_1 & & KG_0\end{array}$$

为球谱 S 的极小 Adams 分解, 使满足

(1) $E_s\xrightarrow{\bar b_s}KG_s\xrightarrow{\bar c_s}E_{s+1}\xrightarrow{\bar a_s}\Sigma E_s$ 是上纤维序列 $(s\geqslant 0)$, 它们导出 Z_p 上同调群的短恰当序列 $0\to H^*E_{s+1}\xrightarrow{\bar c_s^*}H^*KG_s\xrightarrow{\bar b_s^*}H^*E_s\to 0$.

(2) KG_s 是有限个 KZ_p 型的 Eilenberg-Maclane 谱的分次一点和.

(3) π_tKG_s 是 Adams 谱序列的 $E_1^{s,t}$ 项, $(\bar b_s\bar c_{s-1})_*:\pi_tKG_{s-1}\to\pi_tKG_s$ 是 Adams 谱序列的 $d_1^{s-1,t}$ 微分, 并且 $\pi_tKG_s\cong\mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_p,Z_p)$ (参见文献 [3] p.180). 因此, 任意谱 V 的 Adams 分解可由对 (9.2.9) 与 V 作压挤乘积 (smash product) 而得出. 下面先证明一些引理.

引理 9.2.10 在 $p\geqslant 7$ 和主要定理 A 的假设之下, 我们有

$$\bar c_{s+1}\cdot h_0\sigma=(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha_1)\kappa\qquad(\text{相差一个系数})$$

其中 $\kappa\in\pi_{tq+1}E_{s+2}$ 使得 $\bar c_{s+1}\cdot\sigma=\bar a_{s+1}\cdot\kappa$ 并且 $\bar b_{s+2}\cdot\kappa=a_0\sigma'\in\pi_{tq+1}KG_{s+2}\cong \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+1}(Z_p,Z_p)$.

证 d_1 循环 $(1_{KG_{s+1}}\wedge i'')h_0\sigma\in\pi_{tq+q}KG_{s+1}\wedge L$ 表示 $\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+q}(H^*L,Z_p)$ 中的元素, 而这个群由命题 9.2.4 为零, 因此它是一个 d_1 边缘, 从而 $(\bar c_{s+1}\wedge 1_L)(1_{KG_{s+1}}\wedge i'')h_0\sigma=0$, $\bar c_{s+1}\cdot h_0\sigma=(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha_1)f''$, 某个 $f''\in\pi_{tq+1}E_{s+2}$. 随之有 $\bar a_{s+1}\cdot(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha_1)f''=0$, 因此 $\bar a_{s+1}\cdot f''=(1_{E_{s+1}}\wedge j'')f_2''$, 某个 $f_2''\in\pi_{tq+q}(E_{s+1}\wedge L)$. d_1 循环 $(\bar b_{s+1}\wedge 1_L)f_2''\in\pi_{tq+q}KG_{s+1}\wedge L$ 表示 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*L,Z_p)$ 中的一个元素, 而这个群为零, 因此有 $(\bar b_{s+1}\wedge 1_L)f_2''=(\bar b_{s+1}\bar c_s\wedge 1_L)g''$, 某个 $g''\in\pi_{tq+q}(KG_s\wedge L)$. 因此 $f_2''=(\bar c_s\wedge 1_L)g''+(\bar a_{s+1}\wedge 1_L)f_3''$, 某个 $f_3''\in\pi_{tq+q+1}E_{s+2}\wedge L$, 并且有 $\bar a_{s+1}\cdot f''=\bar a_{s+1}(1_{E_{s+2}}\wedge j'')f_3''+\bar c_s(1_{KG_s}\wedge j'')g''=\bar a_{s+1}(1_{E_{s+2}}\wedge j'')f_3''+\lambda\bar c_s\cdot\sigma=\bar a_{s+1}(1_{E_{s+2}}\wedge j'')f_3''+\lambda\bar a_{s+1}\cdot\kappa$, 某个 $\lambda\in Z_p$, 这是因为 $(1_{KG_s}\wedge j'')g''\in\pi_{tq}KG_s\cong\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{\sigma\}$. 因此, $f''=(1_{E_{s+2}}\wedge j'')f_3''+\lambda\kappa+\bar c_{s+1}\cdot g_2''$, 某个 $g_2''\in\pi_{tq+1}KG_{s+1}$ 从而有 $\bar c_{s+1}\cdot h_0\sigma=(1_{E_{s+1}}\wedge\alpha_1)\kappa$ (相差一个系数). 证毕.

由于 $\bar{h}\phi\cdot p = \bar{h}i''j\alpha^2 i = 0$ (参见命题 9.2.3(1) 和 (9.1.9), (9.1.5)), 因此 $\bar{h}\phi = (1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M}i$, 其中 $\alpha_{Y\wedge M}\in[\Sigma^{2q+1}M, Y\wedge M]$. 设 ΣU 为 $\bar{h}\phi = (1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M}i : \Sigma^{2q}S\to Y$ 的上纤维, 由以下上纤维序列所给出:

(9.2.11) $$\Sigma^{2q}S \xrightarrow{\bar{h}\phi} Y \xrightarrow{w_2} \Sigma U \xrightarrow{u_2} \Sigma^{2q+1}S$$

更进一步由 $w_2(1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M} = \widetilde{w}\cdot j$, 其中 $\widetilde{w}:\Sigma^{2q}S\to U$, 它的上纤维是 X, 由上纤维序列 $\Sigma^{2q}S \xrightarrow{\widetilde{w}} U \xrightarrow{\widetilde{u}} X \xrightarrow{j\widetilde{\psi}} \Sigma^{2q+1}S$ 所给出. 因此, ΣX 也是 $\omega = (1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M}:\Sigma^{2q}M\to Y$ 的上纤维, 由以下上纤维序列

(9.2.12) $$\Sigma^{2q}M \xrightarrow{(1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M}} Y \xrightarrow{\tilde{u}w_2} \Sigma X \xrightarrow{\tilde{\psi}} \Sigma^{2q+1}M$$

所给出. 这可由以下 3×3 引理的同伦可换图形看出:

(9.2.13) $$\begin{array}{ccccccccccc}
\Sigma^{2q}S & & \xrightarrow{\bar{h}\phi} & & Y & & \xrightarrow{\tilde{u}w_2} & & \Sigma X & & \\
& \searrow i & & \nearrow_{(1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M}} & & \searrow w_2 & & \nearrow \widetilde{u} & & \searrow \widetilde{\psi} & \\
& & \Sigma^{2q}M & & & & \Sigma U & & & & \Sigma^{2q+1}M \\
& \nearrow \widetilde{\psi} & & \searrow j & & \nearrow \widetilde{w} & & \searrow u_2 & & \nearrow i & \\
X & & \xrightarrow{j\tilde{\psi}} & & \Sigma^{2q+1}S & & \xrightarrow{p} & & \Sigma^{2q+1}S & &
\end{array}$$

由于 $j\overline{u}(\bar{h}\phi) = 0$, 因此, 由 (9.2.11), $j\overline{u} = u_3w_2$, 某个 $u_3\in[U,\Sigma^{q+1}S]$. 因此, (9.2.11) 中的谱 U 也是 $w\pi:\Sigma^qS\to W$ 的上纤维, 由以下上纤维序列

(9.2.14) $$\Sigma^qS \xrightarrow{w\pi} W \xrightarrow{w_3} U \xrightarrow{u_3} \Sigma^{q+1}S$$

所给出. 这可由以下 3×3 引理的同伦可换图形看出:

(9.2.15) $$\begin{array}{ccccccccccc}
\Sigma^{-1}Y & & \xrightarrow{j\overline{u}} & & \Sigma^{q+1}S & & \xrightarrow{w\pi} & & \Sigma W & & \\
& \searrow w_2 & & \nearrow u_3 & & \searrow \pi & & \nearrow w & & \searrow w_3 & \\
& & U & & & & \Sigma L & & & & \Sigma U \\
& \nearrow w_3 & & \searrow u_2 & & \nearrow \phi & & \searrow \bar{h} & & \nearrow w_2 & \\
W & & \xrightarrow{j''u} & & \Sigma^{2q}S & & \xrightarrow{\bar{h}\phi} & & Y & &
\end{array}$$

更进一步由 $u_3\widetilde{w} = \alpha_1$, $\widetilde{u}w_3 : W\to X$ 的上纤维是 $\Sigma^{q+1}L$, 由以下上纤维序列

(9.2.16) $$W \xrightarrow{\tilde{u}w_3} X \xrightarrow{u''} \Sigma^{q+1}L \xrightarrow{w'(\pi\wedge 1_L)} \Sigma W$$

所给出, 其中 $w'\in[L\wedge L, W]$ 使得 $w'(1_L\wedge i'') = w$. 这可由以下 3×3 引理的同伦可换图形看出:

(9.2.17) $$\begin{array}{ccccccccc}
W & & \xrightarrow{\tilde{u}w_3} & & X & & \xrightarrow{j\tilde{\psi}} & & \Sigma^{2q+1}S \\
& \searrow w_3 & & \nearrow \widetilde{u} & & \searrow u'' & & \nearrow j'' & \\
& & U & & & & \Sigma^{q+1}L & & \\
& \nearrow \widetilde{w} & & \searrow u_3 & & \nearrow i'' & & \searrow^{w'(\pi\wedge 1_L)} & \\
\Sigma^{2q}S & & \xrightarrow{\alpha_1} & & \Sigma^{q+1}S & & \xrightarrow{w\pi} & & \Sigma W
\end{array}$$

引理 9.2.18 (1) 设 $\overline{\phi}_W\in[\Sigma^{3q-1}L, W]$ 为命题 9.2.7 中的映射使满足 $u\overline{\phi}_W = \overline{\phi}\in[\Sigma^{2q-1}L, L]$, 则

(1) $\widetilde{u}w_3\overline{\phi}_W(p\wedge 1_L)\neq 0\in[\Sigma^{3q-1}L,X]$.

(2) $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+3q-1}(H^*X,H^*L)=0$,

$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q}(H^*X,H^*L)=(\widetilde{u}w_3)_*\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q}(H^*W,H^*L)$

证 (1) 反设 $\widetilde{u}w_3\overline{\phi}_W(p\wedge 1_L)=0$, 则由 (9.2.16) 和命题 9.2.3(1) 中关于 $[\Sigma^{2q-1}L,L]$ 的结果我们有

(9.2.19) $\overline{\phi}_W(p\wedge 1_L)=\lambda w'(\pi\wedge 1_L)\overline{\phi}\quad \text{modulo } F_3[\Sigma^{3q-1}L,W]$

某个 $\lambda\in Z_{(p)}$, 其中 $F_3[\Sigma^{3q-1}L,W]$ 表示 $[\Sigma^{3q-1}L,W]$ 的所有 filtration $\geqslant 3$ 的元素所组成的子群. 更进一步注意到 $uw'(\pi\wedge 1_L)\in[L,L]$, 而这个群有两个 filtration 1 的生成元 $(p\wedge 1_L),\pi j''$, 因此 $uw'(\pi\wedge 1_L)=\lambda_1(p\wedge 1_L)+\lambda_2\pi j''$, 某个 $\lambda_1,\lambda_2\in Z_{(p)}$. 由 (9.1.13) 可得 $\lambda_1 p\cdot(\alpha_1)_L+\lambda_2(\alpha_1)_L\pi j''=0$, 从而有 $\lambda_2=\lambda_0\lambda_1$, 这里我们用到了等式 $(\alpha_1)_L\pi j''=-\lambda_0 p\cdot(\alpha_1)_L$, $\lambda_0\neq 0\in Z_p$. 因此, 对 (9.2.19) 合成 u 之后我们有 $\overline{\phi}(p\wedge 1_L)=u\overline{\phi}_W(p\wedge 1_L)=\lambda uw'(\pi\wedge 1_L)\overline{\phi}=\lambda\lambda_1\overline{\phi}(p\wedge 1_L)+\lambda\lambda_0\lambda_1\pi j''\overline{\phi}$ (mod $F_3[\Sigma^{2q-1}L,L]$), 从而由 (9.1.9) 有 $\bar{h}\overline{\phi}(p\wedge 1_L)=\lambda\lambda_1\bar{h}\overline{\phi}(p\wedge 1_L)$ (mod $F_3[\Sigma^{2q}L,Y]$). 这蕴涵 $\lambda\lambda_1=1$ (mod p) (参见以下注 9.2.20). 因此我们有 $\lambda\lambda_1\lambda_0\pi j''\overline{\phi}=0$ (mod $F_3[\Sigma^{2q-1}L,L]$), 而由类似如以下注 9.2.20 的理由, 这蕴涵 $\lambda\lambda_1\lambda_0=0$ (mod p), 从而产生了矛盾.

(2) 考查以下由 (9.2.12) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+3q}(H^*Y,H^*L)\xrightarrow{(\tilde{u}w_2)_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq+3q-1}(H^*X,H^*L)\xrightarrow{(\tilde{\psi})_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q-1}(H^*M,H^*L)$$

由命题 9.2.7(2), 两边的群为零, 从而中间的群如所求的为零. 再考查以下由 (9.2.16) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q}(H^*W,H^*L)\xrightarrow{(\tilde{u}w_3)_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q}(H^*X,H^*L)\xrightarrow{(u'')_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q-1}(H^*L,H^*L)$$

由假设 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+rq-1}(Z_p,Z_p)=0$ ($r=1,2,3$) 可知右边的群为零. 因此结论得出. 证毕.

注 9.2.20 这里我们给出解释, 为什么等式 $(1-\lambda\lambda_1)\bar{h}\overline{\phi}(p\wedge 1_L)=0$ (mod $F_3[\Sigma^{2q}L,Y]$) 中的系数必为零 (mod p). 不然的话, 如果 $1-\lambda\lambda_1\neq 0$ (mod p), 则 $(1-\lambda\lambda_1)\bar{h}\overline{\phi}(p\wedge 1_L)$ 在 Adams 谱序列中必由某个非零元素 $x\in\mathrm{Ext}_A^{2,2q+2}(H^*Y,H^*L)$ 所表示. 可是, 另一方面它又等于一个 filtration $\geqslant 3$ 的元素, 因此 x 必是某个 d_2 边缘: $x=d_2(x')\in d_2\mathrm{Ext}_A^{0,2q+1}(H^*Y,H^*L)=0$, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{0,2q+1}(H^*Y,H^*L)=\mathrm{Hom}_A^{2q+1}(H^*Y,H^*L)=0$, 由 $H^rL\neq 0$ 仅当 $r=0,q$ 得出. 这发生了矛盾, 从而有 $1-\lambda\lambda_1=0$ (mod p).

引理 9.2.21 对于引理 9.2.10 中的 $\kappa\in\pi_{tq+1}E_{s+2}$, 已知它满足 $\bar{a}_{s+1}\cdot\kappa=\bar{c}_s\cdot\sigma$ 以及 $\bar{b}_{s+2}\cdot\kappa=a_0\sigma'\in\pi_{tq+1}KG_{s+2}\cong\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+1}(Z_p,Z_p)$, 则存在 $f\in\pi_{tq+3}E_{s+4}\wedge M$

和 $g \in \pi_{tq+1}(KG_{s+1} \wedge M)$ 使得

$$\text{(A)} \qquad (1_{E_{s+2}} \wedge i)\kappa = (\bar{c}_{s+1} \wedge 1_M)g + (\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3} \wedge 1_M)f$$

并且

$$\text{(B)} \qquad (1_{E_{s+4}} \wedge (1_Y \wedge j)\alpha_{Y\wedge M})f \cdot (\alpha_1)_L = 0 \in [\Sigma^{tq+4q+2}L, E_{s+4} \wedge Y],$$

其中 $\alpha_{Y\wedge M} \in [\Sigma^{2q+1}M, Y \wedge M]$ 使满足 $(1_Y \wedge j)\alpha_{Y\wedge M}i = \bar{h}\phi \in \pi_{2q}Y$.

证 注意到 d_1 循环 $(\bar{b}_{s+2} \wedge 1_M)(1_{E_{s+2}} \wedge i)\kappa \in \pi_{tq+1}KG_{s+2} \wedge M$ 表示一个元素 $i_*(a_0\sigma') = i_*p_*(\sigma') = 0 \in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+1}(H^*M, Z_p)$, 从而它是一个 d_1 边缘. 即 $(\bar{b}_{s+2} \wedge 1_M)(1_{E_{s+2}} \wedge i)\kappa = (\bar{b}_{s+2}\bar{c}_{s+1} \wedge 1_M)g$, 某个 $g \in \pi_{tq+1}KG_{s+1} \wedge M$. 因此由 $\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+2}(H^*M, Z_p) = 0$ (参见命题 9.2.8), 我们有 $(1_{E_{s+2}} \wedge i)\kappa = (\bar{c}_{s+1} \wedge 1_M)g + (\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3} \wedge 1_M)f$, 某个 $f \in \pi_{tq+3}E_{s+4} \wedge M$. 这证明了 (A). 对于 (B), 注意到命题 9.2.3(1) 有 $\phi \cdot p = i''j\alpha^2 i$ (相差非零系数), 因此 $\bar{h}\phi \cdot p = \bar{h}i''j\alpha^2 i = 0$, 从而 $\bar{h}\phi = (1_Y \wedge j)\alpha_{Y\wedge M}i$, 某个 $\alpha_{Y\wedge M} \in [\Sigma^{2q+1}M, Y \wedge M]$. 因此, 对等式 (A) 合成于 $1_{E_{s+2}} \wedge (1_Y \wedge j)\alpha_{Y\wedge M}$ 可得

$$\textbf{(9.2.22)} \qquad \begin{aligned}(1_{E_{s+2}} \wedge \bar{h}\phi)\kappa &= (1_{E_{s+2}} \wedge (1_Y \wedge j)\alpha_{Y\wedge M}i)\kappa \\ &= (\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3} \wedge 1_Y)(1_{E_{s+4}} \wedge (1_Y \wedge j)\alpha_{Y\wedge M})f\end{aligned}$$

其中 $(1_Y \wedge j)\alpha_{Y\wedge M}$ 导出 Z_p- 上同调群的零同态从而 $(\bar{c}_{s+1} \wedge 1_Y)(1_{KG_{s+1}} \wedge (1_Y \wedge j)\alpha_{Y\wedge M})g = 0$.

通过对 (9.2.22) 合成于 $(\alpha_1)_L$ 之后我们有 $(\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_Y)(1_{E_{s+4}}\wedge(1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M})f\cdot(\alpha_1)_L = (1_{E_{s+2}} \wedge \bar{h})(\kappa \wedge 1_L)\phi \cdot (\alpha_1)_L = 0$, 这是因为 $\phi \cdot (\alpha_1)_L \in [\Sigma^{3q-2}L, L] = 0$, 由 $\pi_{rq-2}S = 0(\ r = 2, 3, 4)$ 所得出. 因此我们有

$$(\bar{a}_{s+3} \wedge 1_Y)(1_{E_{s+4}} \wedge (1_Y \wedge j)\alpha_{Y\wedge M})f \cdot (\alpha_1)_L = (\bar{c}_{s+2} \wedge 1_Y)g_1 = 0$$

其中 d_1 循环 $g_1 \in [\Sigma^{tq+3q+1}L, KG_{s+2}\wedge Y]$ 表示 $\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+3q+1}(H^*Y, H^*L)$ 中的元素, 而这个群为零 (参见命题 9.2.6(1)), 因此它是一个 d_1 边缘, 从而有 $(\bar{c}_{s+2} \wedge 1_Y)g_1 = 0$. 简记 $(1_Y \wedge j)\alpha_{Y\wedge M} = \omega$, 并且令 V 为 $(1_Y \wedge (\alpha_1)_L)(\omega \wedge 1_L) = \omega \cdot (1_M \wedge (\alpha_1)_L)$: $\Sigma^{3q-1}M \wedge L \to Y$ 的上纤维, 由以下上纤维序列

$$\textbf{(9.2.23)} \qquad \Sigma^{3q-1}M \wedge L \xrightarrow{(1_Y\wedge(\alpha_1)_L)(\omega\wedge 1_L)} Y \xrightarrow{w_4} V \xrightarrow{u_4} \Sigma^{3q}M \wedge L$$

所给出. 随之有 $(\bar{a}_{s+3}\wedge 1_Y)(1_{E_{s+4}}\wedge 1_Y\wedge(\alpha_1)_L)(\omega\wedge 1_L)(f\wedge 1_L) = (\bar{a}_{s+3}\wedge 1_Y)(1_{E_{s+4}}\wedge (1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M})f\cdot(\alpha_1)_L = 0$, 因此由 (9.2.23) 我们有 $(\bar{a}_{s+3}\wedge 1_{M\wedge L})(f\wedge 1_L) = (1_{E_{s+3}}\wedge u_4)f_2$, 某个 $f_2 \in [\Sigma^{tq+3q+2}L, E_{s+3} \wedge V]$. 随之有 $(\bar{b}_{s+3} \wedge 1_{M\wedge L})(1_{E_{s+3}} \wedge u_4)f_2 = 0$, 从而有

$$\textbf{(9.2.24)} \qquad (\bar{b}_{s+3} \wedge 1_V)f_2 = (1_{KG_{s+3}} \wedge w_4)g_2$$

某个 $g_2 \in [\Sigma^{tq+3q+2}L, KG_{s+3} \wedge Y]$. 因此, $(\bar{b}_{s+4}\bar{c}_{s+3} \wedge 1_V)(1_{KG_{s+3}} \wedge w_4)g_2 = 0$, 从而 $(\bar{b}_{s+4}\bar{c}_{s+3} \wedge 1_Y)g_2 \in (1_{KG_{s+4}} \wedge (1_Y \wedge (\alpha_1)_L(\omega \wedge 1_L))_*[\Sigma^*L, KG_{S+4} \wedge M \wedge L] = 0$. 即 g_2 是一个 d_1 循环, 它表示一个元素 $[g_2] \in \mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+3q+2}(H^*Y, H^*L)$, 而这个群有

两个生成元, (参见命题 9.2.5(2)), 因此有

(9.2.25) $$[g_2]=\bar{h}_*\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*(\lambda_1[\sigma_1'\wedge 1_L]+\lambda_2[\sigma_2'\wedge 1_L])$$

某个 $\lambda_1,\lambda_2\in Z_p$. 由 (9.2.24) 可知

$$(w_4)_*[g_2]\in E_2^{s+3,tq+3q+2}(V)=\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+3q+2}(H^*V,H^*L)$$

在 Adams 谱序列中是一个永久循环. 可是, $(1_Y\wedge(\alpha_1)_L)(\omega\wedge 1_L)$ 是一个 filtration 2 的映射, 因此上纤维序列 (9.2.23) 导出一个 Z_p- 上同调群的短恰当序列, 而且这个序列作为 A 模是分裂的恰当序列. 即它导出 Adams 谱序列的 E_1- 项的分裂的恰当序列: $E_1^{s+3,*}(Y)\xrightarrow{(w_4)_*}E_1^{s+3,*}(V)\xrightarrow{(u_4)_*}E_1^{s+3,*-3q}(M\wedge L)$. 随之, 它导出 Adams 谱序列的 E_r- 项的分裂恰当序列 $(r\geqslant 2)$

(9.2.26) $$E_r^{s+3,*}(Y)\xrightarrow{(w_4)_*}E_r^{s+3,*}(V)\xrightarrow{(u_4)_*}E_r^{s+3,*-3q}(M\wedge L)$$

因此, $d_r((w_4)_*[g_2])=0$ 蕴涵 $d_r([g_2])=0(\,r\geqslant 2)$. 即 (9.2.24) 蕴涵 $[g_2]$ 在 Adams 谱序列中是一个永久循环. 由 Adams 谱序列二阶微分为零: $d_2[g_2]=0$ 以及 $d_2(\sigma)=a_0\sigma'$, 而 σ' 是 σ_1',σ_2' 的线性组合, 可知 λ_1,λ_2 线性相关. 即 (9.2.25) 变成

$$[g_2]=\lambda_1\bar{h}_*\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*[\sigma'\wedge 1_L]$$

现在分别讨论 λ_1 非零或为零的两种情况.

若 $\lambda_1\neq 0$, (9.2.24) 蕴涵 $[g_2]$, 从而 $\bar{h}_*\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*[\sigma'\wedge 1_L]\in E_2^{s+3,tq+3q+2}(Y)=\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+3q+2}(H^*Y,H^*L)$ 在 Adams 谱序列中是一个永久循环. 更进一步, 由 $(\bar{a}_{s+3}\wedge 1_Y)(1_{E_{s+4}}\wedge(1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M})f\cdot(\alpha_1)_L=0$, 我们有

$$(1_{E_{s+4}}\wedge(1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M})f\cdot(\alpha_1)_L=(\bar{c}_{s+3}\wedge 1_Y)g_3$$

某个 d_1 循环 $g_3\in[\Sigma^{tq+3q+2}L,KG_{s+3}\wedge Y]$, 而它表示元素 $[g_3]\in\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+3q+2}(H^*Y,H^*L)$, 从而有 $[g_3]=\bar{h}_*\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*(\lambda_3[\sigma_1'\wedge 1_L]+\lambda_4[\sigma_2'\wedge 1_L])$, 某个 $\lambda_3,\lambda_4\in Z_p$. 由以上等式以及 $(1_Y\wedge(\alpha_1)_L)(\omega\wedge 1_L)$ 具有 filtration 2 可知二阶微分 $d_2([g_3])=0$, 从而由和以上类似的理由可知 λ_3,λ_4 线性相关. 即 $[g_3]=\lambda_3\bar{h}_*\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*[\sigma'\wedge 1_L]$, 从而有 $(1_{E_{s+4}}\wedge(1_Y\wedge(\alpha_1)_L)(\omega\wedge 1_L))(f\wedge 1_L)=(\bar{c}_{s+3}\wedge 1_Y)g_3=0$, 结论得证.

若 $\lambda_1=0$, 则 $g_2=(\bar{b}_{s+3}\bar{c}_{s+2}\wedge 1_Y)g_4$, 某个 $g_4\in[\Sigma^{tq+3q+2}L,KG_{s+2}\wedge Y]$, 而 (9.2.24) 变成 $(\bar{b}_{s+3}\wedge 1_V)f_2=(\bar{b}_{s+3}\bar{c}_{s+2}\wedge 1_V)(1_{KG_{s+2}}\wedge w_4)g_4$. 最终我们有 $f_2=(\bar{c}_{s+2}\wedge 1_V)(1_{KG_{s+2}}\wedge w_4)g_4+(\bar{a}_{s+3}\wedge 1_V)f_3$, 某个 $f_3\in[\Sigma^{tq+3q+3}L,E_{s+4}\wedge V]$, 从而有 $(\bar{a}_{s+3}\wedge 1_{M\wedge L})(f\wedge 1_L)=(1_{E_{s+3}}\wedge u_4)f_2=(\bar{a}_{s+3}\wedge 1_{M\wedge L})(1_{E_{s+4}}\wedge u_4)f_3$. 因此, $(f\wedge 1_L)=(1_{E_{s+4}}\wedge u_4)f_3+(\bar{c}_{s+3}\wedge 1_{M\wedge L})g_5$, 某个 $g_5\in[\Sigma^{tq+3q+3}L,KG_{s+3}\wedge M\wedge L]$, 从而由 (9.2.23) 我们有 $(1_{E_{s+4}}\wedge(1_Y\wedge(\alpha_1)_L)(\omega\wedge 1_L))(f\wedge 1_L)=(\bar{c}_{s+3}\wedge 1_Y)(1_{KG_{s+3}}\wedge(1_Y\wedge(\alpha_1)_L)(\omega\wedge 1_L))g_5=0$ (这是因为 $(\alpha_1)_L$ 导出 Z_p- 上同调群的零同态). 证毕.

主要定理 A 的证明 我们将继续引理 9.2.21 中的推理. 注意到 (9.2.23) 中的谱 V 也是 $(1_M\wedge wi'')\widetilde{\psi}:X\to\Sigma^{2q}M\wedge W$ 的上纤维, 由以下上纤维序列

(9.2.27) $$X \xrightarrow{(1_M\wedge wi'')\widetilde{\psi}} \Sigma^{2q}M\wedge W \xrightarrow{w_5} V \xrightarrow{u_5} \Sigma X$$
所给出. 这可由以下 3×3 引理的同伦可换图形看出:

(9.2.28)
$$\begin{array}{ccccccccc}
\Sigma^{3q-1}M\wedge L & & \longrightarrow & & Y & & \xrightarrow{\tilde{u}w_2} & & \Sigma X \\
& \searrow^{1_M\wedge(\alpha_1)_L} & & \nearrow\omega & & \searrow w_4 & & \nearrow u_5 & & \searrow\widetilde{\psi} \\
& & \Sigma^{2q}M & & & & V & & & & \Sigma^{2q+1}M \\
& \nearrow\widetilde{\psi} & & \searrow^{1_M\wedge wi''} & & \nearrow w_5 & & \searrow u_4 & & \nearrow_{1_M\wedge(\alpha_1)_L} \\
X & & \longrightarrow & & \Sigma^{2q}M\wedge W & & \xrightarrow{1_M\wedge u} & & \Sigma^{3q}M\wedge L
\end{array}$$

由引理 9.2.21(B) 和 (9.2.23), $f\wedge 1_L=(1_{E_{s+4}}\wedge u_4)f_5$, 某个 $f_5\in[\Sigma^{tq+3q+3}L, E_{s+4}\wedge V]$, 从而由引理 9.2.21(A), 我们有

(9.2.29)
$$\begin{aligned}(\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_{M\wedge L})(1_{E_{s+4}}\wedge u_4)f_5 &= (\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_{M\wedge L})(f\wedge 1_L)\\ &= (1_{E_{s+2}}\wedge i\wedge 1_L)(\kappa\wedge 1_L)-(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_{M\wedge L})(g\wedge 1_L)\end{aligned}$$

随之有 $(\bar{a}_s\bar{a}_{s+1}\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_{M\wedge L})(1_{E_{s+4}}\wedge u_4)f_5=0$, 从而 $(\bar{a}_s\bar{a}_{s+1}\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_V)f_5=(1_{E_s}\wedge w_4)f_6$, 某个 $f_6\in[\Sigma^{tq+3q-1}L, E_s\wedge Y]$. 显然有 $(\bar{b}_s\wedge 1_V)(1_{E_s}\wedge w_4)f_6=0$, 因此 $(\bar{b}_s\wedge 1_Y)f_6=0$, 并且由 $\mathrm{Ext}_A^{s+1+r,tq+3q+r}(H^*Y,H^*L)=0$($r=0,1$, 参见命题 9.2.6) 我们有 $(\bar{a}_s\bar{a}_{s+1}\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_V)f_5=(\bar{a}_s\bar{a}_{s+1}\bar{a}_{s+2}\wedge 1_V)(1_{E_{s+3}}\wedge w_4)f_7$, 某个 $f_7\in[\Sigma^{tq+3q+2}L, E_{s+3}\wedge Y]$. 随之我们有

(9.2.30) $$(\bar{a}_{s+1}\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_V)f_5=(\bar{a}_{s+1}\bar{a}_{s+2}\wedge 1_V)(1_{E_{s+3}}\wedge w_4)f_7+(\bar{c}_s\wedge 1_V)g_6$$
某个 d_1 循环 $g_6\in[\Sigma^{tq+3q}L, KG_s\wedge V]$, 它表示一个元素 $[g_6]\in\mathrm{Ext}_A^{s,tq+3q}(H^*V,H^*L)$. 注意到 d_1 循环 $(\bar{b}_{s+3}\wedge 1_Y)f_7\in[\Sigma^{tq+3q+2}L, KG_{s+3}\wedge Y]$ 表示一个元素 $[(\bar{b}_{s+3}\wedge 1_Y)f_7]\in\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+3q+2}(H^*Y,H^*L)$ 有两个生成元 (参见命题 9.2.5)(2)), 因此 $[(\bar{b}_{s+3}\wedge 1_Y)f_7]=\lambda'\bar{h}_*\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*[\sigma_1'\wedge 1_L]+\lambda''\bar{h}_*\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*[\sigma_2'\wedge 1_L]$, 某个 $\lambda',\lambda''\in Z_p$. 由二阶微分为零: $0=d_2[(\bar{b}_{s+3}\wedge 1_Y)f_7]$ 可得出 λ',λ'' 线性相关. 因此我们有

(9.2.31) $$[(\bar{b}_{s+3}\wedge 1_Y)f_7]=\lambda'\bar{h}_*\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*[\sigma'\wedge 1_L]\in\mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+3q+2}(H^*Y,H^*L)$$
我们推断, (9.2.31) 中的 λ' 为零. 这可证明如下.

等式 (9.2.30) 意味着 Adams 谱序列的二阶微分 $d_2[g_6]=0\in E_2^{s+2,tq+3q+1}(L,V)=\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+3q+1}(H^*V,H^*L)$, 因此 $[g_6]\in E_3^{s,tq+3q}(L,V)$ 并且三阶微分

(9.2.32) $$d_3[g_6]=(w_4)_*[(\bar{b}_{s+3}\wedge 1_Y)f_7]\in E_3^{s+3,tq+3q+2}(L,V)$$
注意到 $(\omega\wedge 1_L)(1_M\wedge(\alpha_1)_L)(i\wedge 1_L)\pi=(1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M}i(\alpha_1)_L\pi=\bar{h}\phi(\alpha_1)_L\pi=0$. 这是因为 $\phi(\alpha_1)_L\in[\Sigma^{3q-2}L,L]=0$, 由 $\pi_{rq-2}S=0$ $(r=2,3,4)$ 所得出. 因此, 由 (9.2.23), $(i\wedge 1_L)\pi=u_4\tau$, 某个 $\tau\in[\Sigma^{4q}S,V]$ 而且它具有 filtration 1. 更进一步, $u_4\tau\cdot p=(i\wedge 1_L)\pi\cdot p=0$, 因此, 由命题 9.2.3(4), $\tau\cdot p=\widetilde{\lambda}w_4\bar{h}\widetilde{\phi}(\pi\wedge 1_L)\pi$, 某个 $\widetilde{\lambda}\in Z_{(p)}$. 这个系数 $\widetilde{\lambda}$ 必为零 (mod p), 这是因为等式左边具有 filtration 2, 而右边具有 filtration 3 (参见注 9.2.20 以及 $\mathrm{Ext}_A^{0,4q+1}(H^*V,Z_p)=0$, 由 $\mathrm{Ext}_A^{0,4q+1}(H^*Y,Z_p)=0=\mathrm{Ext}_A^{0,q+1}(H^*M\wedge L,Z_p)$ 所得出). 最终, 由命题 9.2.3(4) 我们有 $\tau\cdot p=0$, 从而 $\tau=\bar{\tau}i$, 某个 $\bar{\tau}\in$

$[\Sigma^{4q}M, V]$. 由于 $(u_4)_*(\pi)^*[g_6] \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*M\wedge L, Z_p) \cong Z_p\{(i\wedge 1_L)_*(\pi)_*(\sigma)\}$ (参见命题 9.2.8), 因此 $(u_4)_*\pi^*[g_6] = \lambda_0(i\wedge 1_L)_*\pi_*(\sigma) = \lambda_0(u_4)_*(\overline{\tau}i)_*(\sigma)$, 某个 $\lambda_0 \in Z_p$, 从而由 (9.2.23) 我们有 $\pi^*[g_6] = \lambda_0\overline{\tau}_*i_*(\sigma) \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q+1}(H^*V, Z_p)$, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q+1}(H^*Y, H^*L) = 0$ (参见命题 9.2.6). 由假设 $d_2(\sigma) = a_0\sigma' = p_*(\sigma') \in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+1}(Z_p, Z_p)$, 因此 $d_2i_*(\sigma) = 0$, 从而 $i_*(\sigma) \in E_3^{s+2,tq+1}(S, M)$. 更进一步, $E_2^{s+3,tq+2}(S,M) = \mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+2}(H^*M, Z_p) = 0$ (参见命题 9.2.8) 因此 $E_3^{s+3,tq+2}(S,M) = 0$, 从而三阶微分 $d_3i_*(\sigma) \in E_3^{s+3,tq+2}(S,M) = 0$. 由于 $\pi^*[g_6] = \lambda_0(\overline{\tau})_*i_*(\sigma) \in E_2^{s+1,tq+4q+1}(S,V)$, 因此 $\pi^*[g_6] = \lambda_0\overline{\tau}_*(i_*(\sigma)) \in E_3^{s+1,tq+4q+1}(S,V)$, 从而有

$$d_3\pi^*[g_6] = \lambda_0 d_3(\overline{\tau})_*(i_*(\sigma)) = \lambda_0(\overline{\tau})_*d_3(i_*(\sigma)) = 0 \in E_3^{s+4,tq+4q+3}(S,V)$$

由 (9.2.32), $(w_4)_*\pi^*[(\bar{b}_{s+3}\wedge 1_Y)f_7] = d_3\pi^*[g_6] = 0 \in E_3^{s+4,tq+4q+2}(S,V)$. 另外, 由分裂恰当序列 (9.2.26) 我们有 $\pi^*[(\bar{b}_{s+3}\wedge 1_Y)f_7] = 0 \in E_3^{s+4,tq+4q+3}(S,Y)$. 因此, 在 E_2- 项中, $\pi^*[(\bar{b}_5\wedge 1_Y)f_7]$ 必是一个 d_2 边缘, 即

$$\pi^*[(\bar{b}_{s+3}\wedge 1_Y)f_7] \in d_2E_2^{s+2,tq+4q+2}(S,Y) = d_2\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+4q+2}(H^*Y, Z_p) = 0$$

(参见命题 9.2.6(1)). 因此, 由 (9.2.31), $\lambda'\bar{h}_*\widetilde{\phi}_*(\pi\wedge 1_L)_*\pi_*(\sigma') = 0$. 这蕴涵了系数 λ' 为零 (参见命题 9.2.9(3)), 证明了以上推断.

因此, (9.2.30) 变成 $(\bar{a}_{s+1}\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_V)f_5 = (\bar{a}_{s+1}\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_V)(1_{E_{s+4}}\wedge w_4)f_8 + (\bar{c}_s\wedge 1_V)g_6$, 某个 $f_8 \in [\Sigma^{tq+3q+3}L, E_{s+4}\wedge Y]$. 通过合成 $1_{E_{s+1}}\wedge u_5$ 于以上等式我们有 $(\bar{a}_{s+1}\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_X)(1_{E_{s+4}}\wedge u_5)f_5 = (\bar{a}_{s+1}\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_X)(1_{E_{s+4}}\wedge \widetilde{u}w_2)f_8$ (参见 (9.2.28)), 这是因为 $(\bar{c}_s\wedge 1_X)(1_{KG_s}\wedge u_5)g_6 = 0$ 由 $(1_{KG_s}\wedge u_5)g_6 \in [\Sigma^{tq+3q-1}L, KG_s\wedge X]$ 表示 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+3q-1}(H^*X, H^*L) = 0$ (参见引理 9.2.18(2)) 中的元素所得出. 最终我们有

$$\begin{aligned}(9.2.33)\qquad &(\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_X)(1_{E_{s+4}}\wedge u_5)f_5 \\ &= (\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_X)(1_{E_{s+4}}\wedge \widetilde{u}w_2)f_8 + (\bar{c}_{s+1}\wedge 1_X)g_7\end{aligned}$$

某个 d_1 循环 $g_7 \in [\Sigma^{tq+3q+1}L, KG_{s+1}\wedge X]$ 使得 $[g_7] \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q}(H^*X, H^*L)$.

现在证明 $(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_X)g_7 = 0$ 如下. 由引理 9.2.18(2) 以及命题 9.2.7(1), $[g_7] = \lambda_3(\widetilde{u}w_3)_*(\overline{\phi}_W)_*[\sigma\wedge 1_L]$, 而等式 (9.2.32) 意味着二阶微分 $d_2[g_7] = 0$. 由于 $d_2(\sigma) = a_0\sigma' = p_*(\sigma') \in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+1}(Z_p, Z_p)$, 因此 $\lambda_3(\widetilde{u}w_3)_*(\overline{\phi}_W)_*(p\wedge 1_L)_*[\sigma'\wedge 1_L] = d_2[g_7] = 0 \in \mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+3q+1}(H^*X, H^*L)$. 由引理 9.2.18(1), 这蕴涵了 $\lambda_3 = 0$, 从而 g_7 是一个 d_1 边缘使得 $(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_X)g_7 = 0$.

因此, (9.2.33) 变成 $(\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_{Y\wedge W})(1_{E_{s+4}}\wedge u_5)f_5 = (\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_X)(1_{E_{s+4}}\wedge \widetilde{u}w_2)f_8$, 从而由 (9.2.28), (9.2.12), 有 $(\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_M)(1_{E_{s+4}}\wedge (1_M\wedge(\alpha_1)_L)u_4)f_5 = (\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_M)(1_{E_{s+4}}\wedge \widetilde{\psi}u_5)f_5 = 0$. 另一方面, 通过合成 $(1_{E_{s+2}}\wedge 1_M\wedge(\alpha_1)_L)$ 于等式 (9.2.29) 我们有 $(1_{E_{s+2}}\wedge i)\kappa\cdot(\alpha_1)_L = (1_{E_{s+2}}\wedge 1_M\wedge(\alpha_1)_L)(1_{E_{s+2}}\wedge i\wedge 1_L)(\kappa\wedge 1_L) = (\bar{a}_{s+2}\bar{a}_{s+3}\wedge 1_M)(1_{E_{s+4}}\wedge(1_M\wedge(\alpha_1)_L)u_4)f_5 = 0$.

随之我们有

(9.2.34) $\kappa\cdot(\alpha_1)_L=(1_{E_{s+2}}\wedge p)f_9$

某个 $f_9\in[\Sigma^{tq+q}L,E_{s+2}]$. 因为 $\bar{b}_{s+2}\cdot\kappa=a_0\sigma'=p_*(\sigma')\in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+1}(Z_p,Z_p)$, 因此 $\kappa\cdot(\alpha_1)_L$ 提升为映射 $\tilde{f}\in[\Sigma^{tq+q+1}L,E_{s+3}]$ 使得 $\bar{b}_{s+3}\cdot\tilde{f}$ 表示 $p_*((\alpha_1)_L)_*[\sigma'\wedge 1_L]\neq 0\in \mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+q+1}(Z_p,H^*L)$ (参见命题 9.2.3(1)). 因此, 由 (9.2.34), $p_*[\bar{b}_{s+2}\cdot f_9]=p_*((\alpha_1)_L)_*[\sigma'\wedge 1_L]$, 从而 $[\bar{b}_{s+2}\cdot f_9]\in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+q}(Z_p,H^*L)$ 必等于 $((\alpha_1)_L)_*[\sigma'\wedge 1_L]$, 这是因为所在的群有两个生成元 $((\alpha_1)_L)_*[\sigma_1'\wedge 1_L]$, $((\alpha_1)_L)_*[\sigma_2'\wedge 1_L]$. 记 $\xi_{n,s+2}=f_9i''$, 则

(9.2.35) $\kappa\cdot\alpha_1=(1_{E_s+2}\wedge p)\xi_{n,s+2}$

使得 $\bar{b}_{s+2}\cdot\xi_{n,s+2}=h_0\sigma'\in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+q}(Z_p,Z_p)$ 并且由引理 9.2.10 我们有 $(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_M)(1_{KG_{s+1}}\wedge i)h_0\sigma=(1_{E_{s+2}}\wedge i)\kappa\cdot\alpha_1=0$. 这证明了主要定理的第二个结果. 另外, 由 (9.2.35) 和引理 9.2.10(2), $\bar{a}_0\bar{a}_1\cdots\bar{a}_{s+1}(1_{E_{s+2}}\wedge p)\xi_{n,s+2}=0$, 证明了 $\xi_n=\bar{a}_0\bar{a}_1\cdots\bar{a}_{s+1}\cdot\xi_{n,s+2}\in\pi_{tq+q-s-2}S$ 是一个 p 阶元素并且它在 Adams 谱序列中由 $h_0\sigma'\in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+q}(Z_p,Z_p)$ 所表示. 证毕.

注 9.2.36 主要定理 A 还可以得出更进一步的结果. 由 (9.2.34), $\kappa\cdot(\alpha_1)_L=(1_{E_{s+2}}\wedge p)f_9$, 因此有 $(1_{E_{s+2}}\wedge i)\kappa\cdot(\alpha_1)_L=0$, 从而 $(1_{E_{s+2}}\wedge 1_L\wedge i)(\kappa\wedge 1_L)\phi=(1_{E_{s+2}}\wedge 1_L\wedge i)(\kappa\wedge 1_L)((\alpha_1)_L\wedge 1_L)\widetilde{i''}=0$, 其中 $\widetilde{i''}\in\pi_qL\wedge L$ 使得 $((\alpha_1)_L\wedge 1_L)\widetilde{i''}=\phi$. 容易证明, $(\kappa\wedge 1_L)\phi=(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_L)\sigma\phi$, 其中 $\sigma\phi\in\pi_{tq+2q}(KG_{s+1}\wedge L)$ 是表示 $(\phi)_*(\sigma)\in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(H^*L,Z_p)$ 的 d_1 循环. 因此我们得出 $(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_{L\wedge M})(1_{KG_{s+1}}\wedge i)\sigma\phi=0$. 这就是说, $(1_L\wedge i)_*(\phi)_*(\sigma)\in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(H^*L\wedge M,Z_p)$ 在 Adams 谱序列中是永久循环. 另外, 由 (9.2.35) 有 $\xi_{n,s+2}=f_9i''$, 因此 $(1_{KG_{s+2}}\wedge\alpha_1)\xi_{n,s+2}=(1_{KG_{s+2}}\wedge\alpha_1)f_9i''=f_9i''\cdot\alpha_1\doteq 0$ 从而 $\xi_{n,s+2}=(1_{E_{s+2}}\wedge j'')\tilde{f}_9$, 某个 $\tilde{f}_9\in\pi_{tq+2q}E_{s+2}\wedge L$. 由于 $\xi_{n,s+2}$ 在 Adams 谱序列中由 $h_0\sigma'=(j'')_*\phi_*(\sigma')$ 所表示, 因此 $\tilde{f}_9$ 在 Adams 谱序列中由 $(\phi)_*(\sigma')\in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+2q}(H^*L,Z_p)$ 所表示. 也就是说 $(\phi)_*(\sigma')\in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+2q}(H^*L,Z_p)$ 在 Adams 谱序列中是永久循环. 这些是主要定理 A 的更强的结果.

9.3 $V(1)$ 谱中收敛性的一般结果

在本节我们将证明, 在一定的假设之下, 元素 $i_*'i'*(h_0\sigma)\in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*V(1),Z_p)$ 在 $V(1)$ 谱的同伦群中的收敛性可以导出元素 $i_*'i_*(g_0\sigma)\in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+pq+2q}(H^*V(1),Z_p)$ 的收敛性. 我们有以下主要定理.

主要定理 B (文献 [7] 定理 II 的推广) 设 $p\geqslant 5, s\leqslant 4$, $\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{\sigma\}$, $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{h_0\sigma\}$, $\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+2q+1}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{\widetilde{\alpha}_2\sigma\}$ 并且有

(I) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+rq+u}(Z_p,Z_p)=0$, 当 $r=1,u=-1,1,2,3$ 或 $r=2,u=-1,0,1,2,3$.

$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq}(Z_p,Z_p)$ 为零或有 (一个或两个) 生成元 σ' 使 (都) 满足 $a_0\sigma'\neq 0$.

$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+r}(Z_p,Z_p)=0$ 当 $r=-2,-1,2,3$ 而当 $r=1$ 有唯一生成元 $a_0\sigma$ 使满足 $a_0^2\sigma\neq 0$.

$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q}(Z_p,Z_p)=0$ 或 $z_p\{h_0\tau'\}$, $\mathrm{Exts}_A^{s,tq+1}(Z_p,Z_p)=0$ 或 $z_p\{a_0\tau'\}$.

$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq+u}(Z_p,Z_p)=0$, $u=1,2,r=1$ 或 $u=-1,0,r=-1$.

(II) $i'_*i_*(h_0\sigma)\in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*K,Z_p)$ 在 Adams 谱序列中是永久循环, 则 $i'_*i_*(g_0\sigma)\in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+pq+2q}(H^*K,Z_p)$ 在 Adams 谱序列中也是永久循环, 并且它收敛到 $\pi_{tq+pq+2q-s-2}K$ 的一个非零元素.

为了证明主要定理, 我们需要有关 M 模谱之间映射的导数算子 (参见定理 6.4.3, 定理 6.4.8, 定理 6.4.14) 以及一些低维 Ext 群的知识, 这些结果将在主要定理 B(特别是以下的定理 9.3.9) 的证明中用到.

命题 9.3.0 在 $p\geqslant 5, s\leqslant 4$ 及主要定理 B 的假设之下, 我们有

(1) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+r}(H^*M,Z_p)=0$, 当 $r=1,2,3$,

$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+r}(H^*M,H^*M)=0$, 当 $r=1,2$.

(2) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+r}(Z_p,H^*M)=0$ 当 $r=0,1$,

$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+r}(H^*M,Z_p)=0$ 当 $r=1,2$,

证 (1) 考查以下由 (9.1.1) 导出的恰当序列 ($r=1,2,3$)

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+r}(Z_p,Z_p)\xrightarrow{i_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+r}(H^*M,Z_p)\xrightarrow{j_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+r-1}(Z_p,Z_p)\xrightarrow{p_*}$$

由设, 左边的群当 $r=2,3$ 为零而当 $r=1$ 时有唯一生成元 $a_0\sigma=p_*(\sigma)$ 使得 $\mathrm{im}\ i_*=0$. 由设, 右边的群当 $r=3$ 为零, 当 $r=2$ 有唯一生成元 $a_0\sigma$ 使满足 $p_*(a_0\sigma)=a_0^2\sigma\neq 0$. 由设, 右边的群当 $r=1$ 为零或有 (一个或两个) 生成元 σ' 使 (都) 满足 $p_*(\sigma')=a_0\sigma'\neq 0$. 因此, 以上的 p_* 单射从而有 $\mathrm{im}\ j_*=0$. 这证明了中间的群为零, 从而得出第一个结果. 第二个结果可由第一个结果直接得出.

(2) 考查以下由 (9.1.1) 导出的恰当序列 ($r=0,1$)

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+r+1}(Z_p,Z_p)\xrightarrow{j^*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+r}(Z_p,H^*M)\xrightarrow{i^*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+r}(Z_p,Z_p)\xrightarrow{p^*}$$

由设, 左边的群当 $r=1$ 为零而当 $r=0$ 有唯一生成元 $a_0\sigma=p^*(\sigma)$, 从而 $\mathrm{im}\ j^*=0$. 右边的群当 $r=1$ 有唯一生成元 $a_0\sigma$ 使满足 $p^*(a_0\sigma)=a_0^2\sigma\neq 0$. 右边的群当 $r=0$ 为零或有 (一个或两个) 生成元 σ' 使满足 $p^*(\sigma')=a_0\sigma'\neq 0$. 因此 $\mathrm{im}\ i^*=0$, 从而中间的群如所求的为零. 第二个结果的证明类似. 证毕.

命题 9.3.1 在 $p\geqslant 5, s\leqslant 4$ 以及主要定理 B 的假设之下, 我们有

(1) $\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*M,H^*M)\cong Z_p\{\tilde{\sigma}\}$ 使满足

$$i^*(\tilde{\sigma})=i_*(\sigma)\in \mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*M,Z_p), j_*(\tilde{\sigma})=j^*(\sigma)\in \mathrm{Ext}_A^{s,tq-1}(Z_p,H^*M).$$

(2) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*M,H^*M)\cong Z_p\{(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma}),\ \alpha_*(ij)^*(\tilde{\sigma})\}$,

(3) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*M,H^*M)\cong Z_p\{\alpha_*(\tilde{\sigma})=\alpha^*(\tilde{\sigma})\}$,

(4) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*K,H^*M)\cong Z_p\{i'_*(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma})=i'_*(\alpha_1\wedge 1_M)_*(\tilde{\sigma})\}$,
其中 $\alpha_1=j\alpha i:\Sigma^{q-1}S\to S$ 而 $\alpha_*:\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*M,H^*M)\to\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*M,H^*M)$ 是由 $\alpha:\Sigma^q M\to M$ 导出的联接同态 (或边缘同态).

证 (1) 考查以下由 (9.1.1) 导出的恰当序列
$0=\mathrm{Ext}_A^{s,tq+1}(H^*M,Z_p)\xrightarrow{j^*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*M,H^*M)\xrightarrow{i^*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*M,Z_p)\xrightarrow{p^*}$ 右边的群有唯一生成元 $i_*(\sigma)$, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq-r}(Z_p,Z_p)=0$ (当 $r=1$) 而当 $r=0$ 有唯一生成元 σ. 更进一步, $p^*i_*(\sigma)=i_*p^*(\sigma)=i_*(a_0\sigma)=i_*p_*(\sigma)=0$, 因此中间的群有唯一生成元 $\tilde{\sigma}$ 使得 $i^*(\tilde{\sigma})=i_*(\sigma)$, 这正如所求. 而第二个关系式类似可证.

(2) 由设 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(Z_p,Z_p)$ 有唯一生成元 $h_0\sigma=j_*\alpha_*i_*(\sigma)=j_*\alpha_*i^*(\tilde{\sigma})$, 因此结果由以下由 (9.1.1) 导出的恰当序列立即得出

$$\xrightarrow{p^*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*M,Z_p)\xrightarrow{j^*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*M,H^*M)\xrightarrow{i^*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*M,Z_p)\xrightarrow{p^*}$$

其中右边的群有唯一生成元 $i^*(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma})=(ij)_*\alpha_*i_*(\sigma)$ 使满足 $p^*(ij)_*\alpha_*i_*(\sigma)=(ij)_*\alpha_*i_*p_*(\sigma)=0$ 而左边的群有唯一生成元 $\alpha_*i_*(\sigma)=i^*\alpha_*(\tilde{\sigma})$.

(3) 考查以下由 (9.1.1) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+2}(H^*M,Z_p)\xrightarrow{j^*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*M,H^*M)\xrightarrow{i^*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*M,Z_p)\xrightarrow{p^*}$$

左边的群为零, 这是因为由设当 $r=1,2,3$ 时, $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+r}(Z_p,Z_p)=0$. 右边的群有唯一生成元 $(\alpha i)_*(\sigma)=i^*\alpha_*(\tilde{\sigma})$, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+r}(Z_p,Z_p)$. 当 $r=1$ 时为零而当 $r=0$ 时有唯一生成元 $h_0\sigma=j_*(\alpha i)_*(\sigma)$. 另外, $p^*(\alpha i)_*(\sigma)=(\alpha i)_*p_*(\sigma)=0$, 因此中间的群如所求的有唯一生成元 $\alpha_*(\tilde{\sigma})$. 更进一步可得 $\alpha_*(\tilde{\sigma})=\alpha^*(\tilde{\sigma})$, 这是因为 $i^*j_*\alpha_*(\tilde{\sigma})=j_*\alpha_*i_*(\sigma)=h_0\sigma=(j\alpha i)^*(\sigma)=i^*j_*\alpha^*(\tilde{\sigma})$.

(4) 考查以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*M,H^*M)\xrightarrow{i'_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*K,H^*M)\xrightarrow{j'_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq-1}(H^*M,H^*M)\xrightarrow{\alpha_*}$$

由假设 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq-r}(Z_p,Z_p)=0$(当 $r=1,2$) 而当 $r=0$ 有唯一生成元 σ', 因此右边的群有唯一生成元 $(ij)^*(\tilde{\sigma'})$ 使满足 $\alpha_*(ij)^*(\tilde{\sigma'})=j^*\alpha_*i_*(\sigma')\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+q}(H^*M,H^*M)$. 因此 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*K,H^*M)=i'_*\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*M,H^*M)$ 有唯一生成元 $(i')_*(ij)_*\alpha_*\tilde{\sigma}=i'_*(\alpha_1\wedge 1_M)_*(\tilde{\sigma})$, 这是因为 $(\alpha_1\wedge 1_M)_*(\tilde{\sigma})=(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma})-\alpha_*(ij)_*(\tilde{\sigma})$, 由 $\alpha_1\wedge 1_M=ij\alpha-\alpha ij$ 所得出. 证毕.

命题 9.3.2 在 $p\geqslant 5, s\leqslant 4$ 以及主要定理 B 的假设之下, 我们有

(1) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q+r}(H^*K,H^*M)=0,\ r=0,1,2,$
　$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q+1}(H^*K,Z_p)=0.$

(2) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+r}(H^*K,Z_p)=0,\ r=1,2,3,$

$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+r}(H^*K,H^*M)=0,\ r=1,2.$

(3) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*K,H^*K)\cong Z_p\{(h_0\sigma)'\}$ 使得 $(i')^*(h_0\sigma)'=(i'ij\alpha)_*(\tilde{\sigma})$.

证 (1) 考查以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q+r}(H^*M,H^*M)\xrightarrow{i'_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q+r}(H^*K,H^*M)$$
$$\xrightarrow{j'_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+r-1}(H^*M,H^*M)\xrightarrow{\alpha_*}$$

左边的群由假设 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q+u}(Z_p,Z_p)=0$ 当 $u=-1,0,1,2$, 因而为零. 右边的群当 $r=0$ 时有唯一生成元 $(ij)^*(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma})$，当 $r=1$ 时由两个生成元 $(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma})$, $(ij)^*\alpha_*(\tilde{\sigma})$, 而当 $r=2$ 时有唯一生成元 $\alpha_*(\tilde{\sigma})$ (参见命题 9.3.1(3)). 我们推断 (i) $\alpha_*(ij)^*(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma})\neq 0$. (ii) $\alpha_*[\lambda_1(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma})+\lambda_2\alpha_*(ij)^*(\tilde{\sigma})]\neq 0$. (iii) $\alpha_*\alpha_*(\tilde{\sigma})\neq 0$. 因此, 以上 α_* 单射从而 $\mathrm{im}j'_*=0$. 这证明了 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q+r}(H^*K,H^*M)=0$ 当 $r=0,1,2$ 并且由此可得 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q+1}(H^*K,Z_p)=0$.

为了证明以上推断, 回顾假设有 $\widetilde{\alpha}_2\sigma=j_*\alpha_*\alpha_*i_*(\sigma)\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+2q+1}(Z_p,Z_p)$, 因此 $i_*(\widetilde{\alpha}_2\sigma)\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+2q+1}(H^*M,Z_p)$, 这是因为由假设有 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(Z_p,Z_p)=0$. 另外, 我们也有 $j^*i_*(\alpha_2\sigma)\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+2q}(H^*M,H^*M)$, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(H^*M,Z_p)=0$. 因此, 由 $2\alpha ij\alpha=ij\alpha^2+\alpha^2ij$, 我们有

$$\begin{aligned}\alpha_*(ij)^*(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma})&=j^*\alpha_*(ij)_*\alpha_*i_*(\sigma)\\&=\frac{1}{2}j^*(ij)_*\alpha_*\alpha_*i_*(\sigma)=\tfrac{1}{2}j^*i_*(\alpha_2\sigma)\neq 0\end{aligned}\qquad\textbf{(9.3.3)}$$

这证明了以上推断 (i). 对于推断 (ii),

$$\begin{aligned}&\alpha_*[\lambda_1(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma})+\lambda_2\alpha_*(ij)^*(\tilde{\sigma})]\\=&\frac{1}{2}\lambda_1(ij)_*\alpha_*\alpha_*(\tilde{\sigma})+(\tfrac{1}{2}\lambda_1+\lambda_2)\alpha_*\alpha_*(ij)^*(\tilde{\sigma})\neq 0\end{aligned}$$

这是因为这两项线性无关, 由 $(ij)_*\alpha_*\alpha_*(ij)^*(\tilde{\sigma})\neq 0$ (参见 (9.3.3)) 所得出. 推断 (iii) 是直接的, 这是因为 $i^*j_*\alpha_*\alpha_*(\tilde{\sigma})=j_*\alpha_*\alpha_*i_*(\sigma)=\widetilde{\alpha}_2\sigma\neq 0$.

(2) 考查以下由 (9.1.2) 导出恰当序列 $(r=1,2,3)$

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+r}(H^*M,Z_p)\xrightarrow{i'_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+r}(H^*K,Z_p)$$
$$\xrightarrow{j'_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+r-1}(H^*M,Z_p)\xrightarrow{\alpha_*}$$

左边的群当 $r=2,3$ 时为零, 这是因为假设有 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+u}(Z_p,Z_p)=0(u=1,2,3)$. 左边的群当 $r=1$ 时有唯一生成元 $\alpha_*i_*(\sigma)$, 因此任何情况下都有 $\mathrm{im}\ i'_*=0$. 右边的群当 $r=2,3$ 时为零 (参见命题 9.3.0), 而当 $r=1$ 时有唯一生成元 $i_*(\sigma')$, 它满足 $\alpha_*i_*(\sigma')\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+q+1}(H^*M,Z_p)$, 从而有 $\mathrm{im}\ j'_*=0$, 结论得证.

(3) 考查以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q+1}(H^*K,H^*M)\xrightarrow{(j')^*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*K,H^*K)$$
$$\xrightarrow{(i')^*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*K,H^*M)$$

左边的群由 (1) 为零而右边的群有唯一生成元 $i'_*(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma})$ (参见命题 9.3.1(4)), 它

满足 $\alpha^* i'_*(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma}) = i'_*(ij)_*\alpha_*\alpha^*(\tilde{\sigma}) = i'_*(ij)_*\alpha_*\alpha_*(\tilde{\sigma}) = 0$, 这是因为 $i'ij\alpha^2 = 2i'\alpha ij\alpha - i'\alpha^2 ij = 0 \in [\Sigma^{2q-1}M, K]$. 因此结论得证. 证毕.

命题 9.3.4 在 $p \geqslant 5, s \leqslant 4$ 以及主要定理 B 的假设之下, 我们有

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q-1}(H^*K, H^*K) \cong Z_p\{(h_0\sigma)''\}$$

使满足$(i')^*(h_0\sigma)'' = i'_*(ij)_*(\alpha_1 \wedge 1_M)_*(\tilde{\sigma})$.

证 考查以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(H^*K, H^*M) \xrightarrow{(j')^*} \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q-1}(H^*K, H^*K) \xrightarrow{(i')^*} \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q-1}(H^*K, H^*M)$$

左边的群由命题 9.3.2(1) 为零而类似于命题 9.3.1, 右边的群有唯一生成元 $(ij)^*i'_*(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma}) = i'_*(ij)_*(\alpha_1 \wedge 1_M)_*(\tilde{\sigma})$ 使满足 $\alpha^* i'_*(ij)_*(\alpha_1 \wedge 1_M)_*(\tilde{\sigma}) = i'_*(ij)_*(\alpha_1 \wedge 1_M)_*\alpha_*(\tilde{\sigma}) = 0 \in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+2q}(H^*K, H^*M)$, 这是因为 $i'ij(\alpha_1 \wedge 1_M)\alpha = 0 \in [\Sigma^{2q-2}M, K]$. 因此结论得证. 证毕.

命题 9.3.5 在 $p \geqslant 5, s \leqslant 4$, 以及主要定理 B 的假设之下, 我们有

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*K' \wedge M, H^*M) \cong Z_p\{\psi_*(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma}), \psi_*(ij)^*\alpha_*(\tilde{\sigma})\}$$

其中$\psi : \Sigma M \to K' \wedge M$ 是 (9.1.17) 中的映射.

证 考查以下由 (9.1.17) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*M, H^*M) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*K' \wedge M, H^*M) \xrightarrow{\rho_*} \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*K, H^*M) = 0$$

结果由命题 9.3.1(2) 和命题 9.3.2(2) 得出 (注: 由设, 类似于命题 9.3.2(2), 可证 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q+1}(H^*K, H^*M) = 0$, 从而以上 ψ_* 单射). 证毕.

命题 9.3.6 在 $p \geqslant 5, s \leqslant 4$ 以及主要定理 B 的假设之下, 我们有

$\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*K, H^*K) \cong Z_p\{(\sigma)'\}$ 使满足 $(i')^*(\sigma)' = (i')_*(\tilde{\sigma})$

证 考查以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q+1}(H^*K, H^*M) \xrightarrow{(j')^*} \mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*K, H^*K) \xrightarrow{(i')^*} \mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*K, H^*M)$$

由于 $j'_*\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q+1}(H^*K, H^*M) \subset \mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*M, H^*M) \cong Z_p\{\tilde{\sigma}\}$ 且 $\alpha_*(\tilde{\sigma}) \neq 0 \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*M, H^*M)$, 则 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q+1}(H^*K, H^*M) = i'_*\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q+1}(H^*M, H^*M) = 0$, 这是因为由假设 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q+r}(Z_p, Z_p) = 0, r = 1, 2$, 以及 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q}(Z_p, Z_p) \cong Z_p\{h_0\sigma''\}$ 或者为零使得 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q+1}(H^*M, H^*M) \cong Z_p\{\alpha_*(\tilde{\sigma''})\}$, 从而 $(i')_*\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q+1}(H^*M, H^*M) = 0$. 另一方面, 容易看出 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*K, H^*M)$ 有唯一生成元 $i'_*(\tilde{\sigma})$, 而它满足 $\alpha^* i'_*(\tilde{\sigma}) = i'_*\alpha_*(\tilde{\sigma}) = 0$. 因此结论得证. 证毕.

由 (6.5.5), 存在 $\alpha'' \in [\Sigma^{q-2}K, K]$ 使满足 $\alpha'' i' = i'ij\alpha ij$. 令 X 为 $\alpha'' : \Sigma^{q-2}K \to K$ 的上纤维, 由以下上纤维序列

$$\Sigma^{q-2}K \xrightarrow{\alpha''} K \xrightarrow{w} X \xrightarrow{u} \Sigma^{q-1}K \tag{9.3.7}$$

所给出. 因此 α'' 导出一个边缘同态 (或联接同态) $(\alpha'')^*$: $\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*K, H^*K) \to \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q-1}(H^*K, H^*K)$. 由于 $\alpha''i' = i'ij\alpha ij = i'ij(\alpha_1 \wedge 1_M)$, 因此 $(i')^*(\alpha'')^*(\sigma)' = (\alpha''i')^*(\sigma)' = (i'ij(\alpha_1 \wedge 1_M))^*(\sigma)' = (\alpha_1 \wedge 1_M)^*(ij)^*(i')^*(\sigma)' = (i'ij)_*(\alpha_1 \wedge 1_M)_*(\tilde{\sigma}) = (i')^*(h_0\sigma)''$ (参见命题 9.3.4) . 因此我们有

(9.3.8) $\qquad (h_0\sigma)'' = (\alpha'')^*(\sigma)' \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q-1}(H^*K, H^*K)$

这是因为以上 $(i')^*$ 单射, 由 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(H^*K, H^*M) = 0$ 所得出 (参见命题 9.3.2).

在完成了以上预备知识之后, 我们转而证明以下定理 9.3.9. 它是通过在与球谱相关的一些谱的 Adams 分解 (9.2.9) 中进行推理而证明的.

定理 9.3.9 在 $p \geqslant 5, s \leqslant 4$ 以及主要定理 B 的假设之下, 设 $(h_0\sigma)'' \in [\Sigma^{tq+q-1}K, KG_{s+1} \wedge K]$ 为 d_1 循环, 它表示命题 9.3.4 中的 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q-1}(H^*K, H^*K)$ 的唯一生成元 $(h_0\sigma)''$, 则有 $(\bar{c}_{s+1} \wedge 1_K)(h_0\sigma)'' = 0$.

在证明定理 9.3.9 之前, 先证明以下引理.

引理 9.3.10 在 $p \geqslant 5, s \leqslant 4$ 以及主要定理 B 的假设之下, 我们有

(1) $(\bar{c}_{s+1} \wedge 1_K)(h_0\sigma)'' = (1_{E_{s+2}} \wedge \alpha'')(\kappa \wedge 1_K)$;

(2) $(\bar{c}_{s+1} \wedge 1_K)(h_0\sigma \wedge 1_K) = (1_{E_{s+2}} \wedge \alpha_1 \wedge 1_K)(\kappa \wedge 1_K)$,

其中 $\kappa \in \pi_{tq+1}E_{s+2}$ 使满足 $\bar{a}_{s+1}\kappa = \bar{c}_s\sigma$ 而 $\sigma \in \pi_{tq}KG_s \cong \mathrm{Ext}_A^{s,tq}(Z_p, Z_p)$.

证 回顾 X 是 $\alpha'' : \Sigma^{q-2}K \to K$ 的上纤维, 由上纤维序列 (9.3.7) 所给出. 由于 $(h_0\sigma)'' \in [\Sigma^{tq+q-1}K, KG_{s+1} \wedge K]$ 表示 $(h_0\sigma)'' = (\alpha'')^*(\sigma)' \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q-1}(H^*K, H^*K)$, 因此 $(h_0\sigma)''u \in [\Sigma^{tq}X, KG_{s+1} \wedge K]$ 是一个 d_1 边缘, 从而 $(\bar{c}_{s+1} \wedge 1_K)(h_0\sigma)''u = 0$ 并且 $(\bar{c}_{s+1} \wedge 1_K)(h_0\sigma)'' = f'\alpha''$, 某个 $f' \in \Sigma^{tq+1}K, E_{s+2} \wedge K]$. 随之有 $(\bar{a}_{s+1} \wedge 1_K)f'\alpha'' = 0$ 并且 $(\bar{a}_{s+1} \wedge 1_K)f' = f_2'w$, 某个 $f_2' \in [\Sigma^{tq}X, E_{s+1} \wedge K]$. 因此, $(\bar{b}_{s+1} \wedge 1_K)f_2'w = 0$ 而 $(\bar{b}_{s+1} \wedge 1_K)f_2' = g' \cdot u$, 某个 $g' \in [\Sigma^{tq+q-1}K, KG_{s+1} \wedge K]$. 这个 g' 是一个 d_1 循环, 这是因为 $(\bar{b}_{s+2}\bar{c}_{s+1} \wedge 1_K)g' = g_2'\alpha''$ (某个 $g_2' \in [\Sigma^{tq+1}K, KG_{s+2} \wedge K]) = 0$, 由 α'' 导出 Z_p 上同调群的零同态所得出. 因此, 由命题 9.3.4. 以及 (9.3.8), g' 表示 $(h_0\sigma)'' = (\alpha'')^*(\sigma)' \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q-1}(H^*K, H^*K)$, 从而 $g' \cdot u$ 是一个 d_1 边缘, 即 $g' \cdot u = (\bar{b}_{s+1}\bar{c}_s \wedge 1_K)g_3'$, 某个 $g_3' \in [\Sigma^{tq}X, KG_s \wedge K]$. 因此 $(\bar{b}_{s+1} \wedge 1_K)f_2' = (\bar{b}_{s+1}\bar{c}_s \wedge 1_K)g_3'$, 从而 $f_2' = (\bar{c}_s \wedge 1_K)g_3' + (\bar{a}_{s+1} \wedge 1_K)f_3'$, 某个 $f_3' \in [\Sigma^{tq+1}X, E_{s+2} \wedge K]$, 并且我们有 $(\bar{a}_{s+1} \wedge 1_K)f' = f_2'w = (\bar{c}_s \wedge 1_K)g_3'w + (\bar{a}_{s+1} \wedge 1_K)f_3'w$. 显然, $g_3'w \in [\Sigma^{tq}K, KG_s \wedge K]$ 是一个 d_1 循环, 它表示 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*K, H^*K) \cong Z_p\{(\sigma)'\}$ (参见命题 9.3.6). 因此 $g_3'w = \sigma \wedge 1_K$ (相差系数和 d_1 边缘), 其中 $\sigma \in \pi_{tq}KG_s \cong \mathrm{Ext}_A^{s,tq}(Z_p, Z_p)$. 因此我们有 $(\bar{a}_{s+1} \wedge 1_K)f' = (\bar{c}_s \wedge 1_K)(\sigma \wedge 1_K) + (\bar{a}_{s+1} \wedge 1_K)f_3'w = (\bar{a}_{s+1} \wedge 1_K)(\kappa \wedge 1_K) + (\bar{a}_{s+1} \wedge 1_K)f_3'w$, 其中 $\kappa \in \pi_{tq+1}E_{s+2}$ 使满足 $\bar{a}_{s+1}\kappa = \bar{c}_s\sigma$. 随之有 $f' = \kappa \wedge 1_K + f_3'w + (\bar{c}_{s+1} \wedge 1_K)g_4'$, 某个 $g_4' \in [\Sigma^{tq+1}K, KG_{s+1} \wedge K]$ 并且有 $(\bar{c}_{s+1} \wedge 1_K)(h_0\sigma)'' = f'\alpha'' = (\kappa \wedge 1_K)\alpha'' = (1_{E_{s+2}} \wedge \alpha'')(\kappa \wedge 1_K)$. 这证明了 (1). (2) 的证明是类似的. 证毕.

定理 9.3.9 的证明 首先, 由主要定理 B 关于 $i'_* i_*(h_0\sigma) \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*K, Z_p)$ 是永久循环的假设可得 $(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_K)(h_0\sigma\wedge 1_K) = 0$. 因此存在 $\eta'_{n,s+1} \in [\Sigma^{tq+q}K, E_{s+1}\wedge K]$ 使得 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_K)\eta'_{n,s+1} = (h_0\sigma\wedge 1_K)$.

由引理 9.3.10, 我们只要证明 $(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha'')(\kappa\wedge 1_K) = 0$. 注意到, 由 $\bar{a}_{s+1}\kappa = \bar{c}_s\sigma$, 我们有 $\bar{a}_{s+1}(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha_1)\kappa = \bar{c}_s(1_{KG_s}\wedge\alpha_1)\sigma = 0$, 从而有 $(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha_1)\kappa = \bar{c}_{s+1}(h_0\sigma)$ (相差系数), 这是因为 $\pi_{tq+q}KG_{s+1} \cong \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(Z_p, Z_p) \cong Z_p\{h_0\sigma\}$. 因此, 由引理 9.3.10 我们有

(9.3.11) $$(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha_1\wedge 1_K)(\kappa\wedge 1_K) = (\bar{c}_{s+1}\wedge 1_K)(h_0\sigma\wedge 1_K) = 0$$

更进一步, 由 (9.1.20) 我们有 $(1_{E_{s+2}}\wedge\rho\alpha'_{K'\wedge M})(\kappa\wedge 1_K)i' = (1_{E_{s+2}}\wedge\alpha')(\kappa\wedge 1_K)i' = 0$, 因此, 由 (9.1.17), $(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha'_{K'\wedge M})(\kappa\wedge 1_K)i' = (1_{E_{s+2}}\wedge(v\wedge 1_M)\overline{m}_M)f$, 某个 $f \in [\Sigma^{tq+q-1}M, E_{s+2}\wedge K'\wedge M]$, 从而 $(1_{E_{s+2}}\wedge i')f = (1_{E_{s+2}}\wedge\rho(1_{K'}\wedge ij)\alpha'_{K'\wedge M})(\kappa\wedge 1_K)i' = (1_{E_{s+2}}\wedge\alpha'')(\kappa\wedge 1_K)i' = (1_{E_{s+2}}\wedge\alpha')(\kappa\wedge 1_K)i'ij = 0$. 因此 $f = (1_{E_{s+2}}\wedge\alpha)f_2$, 某个 $f_2 \in [\Sigma^{tq-1}M, E_{s+2}\wedge M]$, 从而有 $(1_{E_{s+2}}\wedge(x\wedge 1_M)\alpha'_{K'\wedge M})(\kappa\wedge 1_K)i' = (1_{E_{s+2}}\wedge(i'\wedge 1_M)\overline{m}_M\alpha)f_2 = 0$ 并且 $(1_{E_{s+2}}\wedge(x\wedge 1_M)\alpha'_{K'\wedge M})(\kappa\wedge 1_K)\rho(v\wedge 1_M) = (1_{E_{s+2}}\wedge(x\wedge 1_M)\alpha'_{K'\wedge M})(\kappa\wedge 1_K)\rho(vi\wedge 1_M)m_M + (1_{E_{s+2}}\wedge(x\wedge 1_M)\alpha'_{K'\wedge M})(\kappa\wedge 1_K)\rho(v\wedge 1_M)\overline{m}_M(j\wedge 1_M) = 0$, 这是因为 $\rho(v\wedge 1_M)\overline{m}_M = 0$, $\rho(vi\wedge 1_M) = i'$. 因此我们有

(9.3.12) $$(1_{E_{s+2}}\wedge(x\wedge 1_M)\alpha'_{K'\wedge M})(\kappa\wedge 1_K)\rho = f_3(y\wedge 1_M)$$

某个 $f_3 \in [\Sigma^{tq+2q+1}M, E_{s+2}\wedge K\wedge M]\cap(\ker d)$ (参见 (9.1.15) 和推论 6.4.15). 随之有

(9.3.13) $$(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{K\wedge M})f_3 = f_4(\alpha i\wedge 1_M)$$

某个 $f_4 \in [\Sigma^{tq+q}M\wedge M, E_{s+1}\wedge K\wedge M]\cap(\ker d)$(参见 (9.1.15) 和推论 6.4.15). 注意到 d_1 循环 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_M)(1_{E_{s+1}}\wedge jj'\wedge 1_M)f_4 \in [\Sigma^{tq-2}M\wedge M, KG_{s+1}\wedge M] \cong Z_p\{(\sigma'\wedge 1_M)ij(j\wedge 1_M)\}$, 因此 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_M)(1_{E_{s+1}}\wedge jj'\wedge 1_M)f_4 = \lambda\cdot(\sigma'\wedge 1_M)ij(j\wedge 1_M)$ 而通过作用于导数算子 d 我们有 $\lambda\cdot(\sigma'\wedge 1_M)(j\wedge 1_M) = 0$, 从而蕴涵 $\lambda = 0$. 这就是说 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_M)(1_{E_{s+1}}\wedge jj'\wedge 1_M)f_4 = 0$, 因此 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_{K\wedge M})f_4 = (1_{KG_{s+1}}\wedge x\wedge 1_M)g$, 某个 d_1 循环 $g \in [\Sigma^{tq+q}M\wedge M, E_{s+1}\wedge K'\wedge M]\cap(\ker d)$(参见推论 6.4.15).

由定理 6.4.3, $g = g(i\wedge 1_M)m_M + g\overline{m}_M(j\wedge 1_M)$. 下面我们推断 $g(i\wedge 1_M) = \lambda_1(1_{KG_{s+1}}\wedge vi\wedge 1_M)(h_0\sigma\wedge 1_M)$ 而 $g\overline{m}_M = \lambda_2(1_{KG_{s+1}}\wedge(v\wedge 1_M)\overline{m}_M)(h_0\sigma\wedge 1_M)$ (mod d_1 边缘), 其中 $\lambda_1, \lambda_2 \in Z_p$.

为了证明这个推断, 注意到 d_1 循环 $g(i\wedge 1_M)$ 表示一个元素 $[g(i\wedge 1_M)] \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*K'\wedge M, H^*M)$, 而 $[(1_{KG_{s+1}}\wedge\rho)g(i\wedge 1_M)] \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*K, H^*M) \cong Z_p\{[(1_{KG_{s+1}}\wedge i')(h_0\sigma\wedge 1_M)]\}$ (参见命题 9.3.1(4)). 因此 $(1_{KG_{s+1}}\wedge\rho)g(i\wedge 1_M) = \lambda_1(1_{KG_{s+1}}\wedge\rho(vi\wedge 1_M))(h_0\sigma\wedge 1_M) + (\bar{b}_{s+1}\bar{c}_s\wedge 1_K)g_2$, 某个 $g_2 \in [\Sigma^{tq+q}M, KG_s\wedge K]$. 由于 $(1_{KG_s}\wedge j'\alpha')g_2 = 0$, 因此 $g_2 = (1_{KG_s}\wedge\rho)g_3$, 某个 $g_3 \in [\Sigma^{tq+q}M, KG_s\wedge K'\wedge M]$. 因此 $g(i\wedge 1_M) = \lambda_1(1_{KG_{s+1}}\wedge vi\wedge 1_M)(h_0\sigma\wedge 1_M) + (\bar{b}_{s+1}\bar{c}_s\wedge 1_{K'\wedge M})g_3 + (1_{KG_{s+1}}\wedge\psi)g_4$, 某个 $g_4 \in [\Sigma^{tq+q-1}M, KG_{s+1}\wedge M] \cong Z_p\{(h_0\sigma\wedge 1_M)ij\}$, 从而有 $g_4 = \lambda'(h_0\sigma\wedge 1_M)ij$,

某个 $\lambda' \in Z_p$. 可是, $d(i \wedge 1_M) = 0$ 且 $d(g) = 0$ 这蕴涵 $d(g(i \wedge 1_M)) = 0$, 因此, 通过对以上等式作用于导数算子 d 可得出 $(1_{KG_{s+1}} \wedge \psi)d(g_4) + (\bar{b}_{s+1}\bar{c}_s \wedge 1_{K' \wedge M})d(g_3) = 0$, 即 $\lambda'(1_{KG_{s+1}} \wedge \psi)(h_0\sigma \wedge 1_M) = (\bar{b}_{s+1}\bar{c}_s \wedge 1_{K'\wedge M})d(g_3)$, 而这意味着系数 $\lambda' = 0$, 这是因为 $\psi_*[h_0\sigma \wedge 1_M] \neq 0 \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*K' \wedge M, H^*M)$(参见命题 9.3.5). 这证明了 $g(i \wedge 1_M) = \lambda_1(1_{KG_{s+1}} \wedge vi \wedge 1_M)(h_0\sigma \wedge 1_M)$ (mod d_1 边缘). 另外, 由 $d(\overline{m}_M) \in [\Sigma^2 M, M \wedge M] \cong [\Sigma^2 M, M] + [\Sigma M, M] = 0$, 因此类似可证 $g\overline{m}_M = \lambda_2(1_{KG_{s+1}} \wedge \psi)(h_0\sigma \wedge 1_M)$ (mod d_1 边缘). 这证明了以上推断.

因此, 模 d_1 边缘我们有

$$\begin{aligned} g &= g(i \wedge 1_M)m_M + g\overline{m}_M(j \wedge 1_M) \\ &= \lambda_1(1_{KG_{s+1}} \wedge vi \wedge 1_M)(h_0\sigma \wedge 1_M)m_M + \lambda_2(1_{KG_{s+1}} \wedge \psi)(h_0\sigma \wedge 1_M)(j \wedge 1_M) \\ &= \lambda_1(h_0\sigma \wedge 1_{K'\wedge M})(vi \wedge 1_M)m_M + \lambda_2(h_0\sigma \wedge 1_{K'\wedge M})(v \wedge 1_M)\overline{m}_M(j \wedge 1_M) \end{aligned} \tag{9.3.14}$$

我们推断

(9.3.15) (9.3.14) 中的系数 $\lambda_1 = \lambda_2$.

因此, $g = \lambda_1(1_{KG_{s+1}} \wedge v \wedge 1_M)(h_0\sigma \wedge 1_M \wedge 1_M)$, 从而有 $(\bar{b}_{s+1} \wedge 1_{K\wedge M})f_4 = (1_{KG_{s+1}} \wedge x \wedge 1_M)g = \lambda_1(1_{KG_{s+1}} \wedge i' \wedge 1_M)(h_0\sigma \wedge 1_M \wedge 1_M) = \lambda_1(h_0\sigma \wedge 1_K \wedge 1_M)(i' \wedge 1_M) + (\bar{b}_{s+1}\bar{c}_s \wedge 1_{K\wedge M})g_5 = \lambda_1(\bar{b}_{s+1} \wedge 1_{K\wedge M})(\eta'_{n,s+1} \wedge 1_M)(i' \wedge 1_M) + (\bar{b}_2\bar{c}_1 \wedge 1_{K\wedge M})g_5$, 从而我们有 $f_4 = \lambda_1(\eta'_{n,s+1}i' \wedge 1_M) + (\bar{c}_s \wedge 1_{K\wedge M})g_5 + (\bar{a}_{s+1} \wedge 1_{K\wedge M})f_5$, 某个 $f_5 \in [\Sigma^{tq+q+1}M \wedge M, E_{s+2} \wedge K \wedge M]$. 随之有 $(\bar{a}_{s+1} \wedge 1_{K\wedge M})f_3 = f_4(\alpha i \wedge 1_M) = (\bar{a}_{s+1} \wedge 1_{K\wedge M})f_5(\alpha i \wedge 1_M)$, 从而 $f_3 = f_5(\alpha i \wedge 1_M) + (\bar{c}_{s+1} \wedge 1_{K\wedge M})g_6$, 某个 $g_6 \in [\Sigma^{tq+2q+1}M, E_{s+2} \wedge K \wedge M]$. 因此, $(1_{E_{s+2}} \wedge \alpha'')(\kappa \wedge 1_K)\rho = (1_{E_{s+2}} \wedge (1_K \wedge j)(x \wedge 1_M)\alpha'_{K'\wedge M})(\kappa \wedge 1_K)\rho = (1_{E_{s+2}} \wedge 1_K \wedge j)f_3(y \wedge 1_M) = (\bar{c}_{s+1} \wedge 1_K)(1_{KG_{s+1}} \wedge 1_K \wedge j)g_6(y \wedge 1_M) = 0$, 这是因为 d_1 循环 $(1_{KG_{s+1}} \wedge 1_K \wedge j)g_6 \in [\Sigma^{tq+2q}M, KG_{s+1} \wedge K]$ 表示 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(H^*K, H^*M) = 0$ (参见命题 9.3.2(1)) 中的元素.

随之由 (9.1.11) 有 $(1_{E_{s+2}} \wedge \alpha'')(\kappa \wedge 1_K) = f_6\alpha ijj'$, 某个 $f_6 \in [\Sigma^{tq+q+1}M, E_{s+2} \wedge K]$ 并且 $(\bar{a}_{s+1} \wedge 1_K)f_6\alpha ijj' = (\bar{a}_{s+1} \wedge 1_K)(1_{E_{s+2}} \wedge \alpha'')(\kappa \wedge 1_K) = (\bar{c}_1 \wedge 1_K)(1_{KG_s} \wedge \alpha'')(\sigma \wedge 1_K) = 0$. 因此, 由 (9.1.14), 我们有 $(\bar{a}_{s+1} \wedge 1_K)f_6\alpha i = f_7 z$, 某个 $f_7 \in [\Sigma^{tq+q-1}K', E_{s+1} \wedge K]$. 由命题 9.1.21, $f_7 z = 0$, 因此 $f_6\alpha i = (\bar{c}_{s+1} \wedge 1_K)g_7$, 某个 $g_7 \in \pi_{tq+2q+1}(KG_{s+1} \wedge K)$, 从而 $(1_{E_{s+2}} \wedge \alpha'')(\kappa \wedge 1_K) = f_6\alpha ijj' = (\bar{c}_{s+1} \wedge 1_K)g_7 jj' = 0$, 这是因为 d_1 循环 $g_7 \in \pi_{tq+2q+1}(KG_{s+1} \wedge K)$ 表示 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,p^n q+2q+1}(H^*K, Z_p) = 0$ 中的元素. 这证得了定理的结论, 而剩下的工作是证明以上推断 (9.3.15).

为了证明 (9.3.15), 首先由定理 6.4.3 和 (9.1.15) 有 $(v \wedge 1_M)\overline{m}_M(\alpha_1 \wedge 1_M) = (v \wedge 1_M)\overline{m}_M(j \wedge 1_M)(\alpha i \wedge 1_M) = -(v \wedge 1_M)(i \wedge 1_M)m_M(\alpha i \wedge 1_M) = -(vi \wedge 1_M)\alpha$. 类似的有 $\alpha(j\overline{u} \wedge 1_M) = -(\alpha_1 \wedge 1_M)m_M(\overline{u} \wedge 1_M)$, 其中 $\overline{u} : Y \to \Sigma^{q+1}M$ 以及 $v : \Sigma M \to K'$ 是上纤维序列 (9.1.5)(9.1.15) 中的映射.

因此, 模 d_1 边缘我们有

$$(1_{KG_{s+1}} \wedge vi \wedge 1_M)(\widetilde{h_0\sigma}) = -(1_{KG_{s+1}} \wedge v \wedge 1_M)\overline{m}_M(h_0\sigma \wedge 1_M)$$

$$(\widetilde{h_0\sigma})(j\overline{u} \wedge 1_M) = -(h_0\sigma \wedge 1_M)m_M(\overline{u} \wedge 1_M)$$

其中 $\widetilde{h_0\sigma} \in [\Sigma^{tq+q+1}M, KG_{s+1} \wedge M]$ 是 d_1 循环, 它表示 $\alpha_*(\tilde{\sigma}) \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*M, H^*M)$. 因此, 由 (9.3.14), 模 d_1 边缘我们有

$$\begin{aligned} g(\overline{u} \wedge 1_M) &= \lambda_1(1_{KG_{s+1}} \wedge v \wedge 1_M)(h_0\sigma \wedge 1_M \wedge 1_M)(\overline{u} \wedge 1_M) \\ &\quad +(\lambda_2 - \lambda_1)(1_{KG_{s+1}} \wedge v \wedge 1_M)\overline{m}_M(h_0\sigma \wedge 1_M)(j\overline{u} \wedge 1_M) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)(1_{KG_{s+1}} \wedge vi \wedge 1_M)(\widetilde{h_0\sigma})(j\overline{u} \wedge 1_M) \end{aligned}$$

这是因为 $(1_{KG_{s+1}} \wedge v)(h_0\sigma \wedge 1_M)\overline{u} = (1_{KG_{s+1}} \wedge v)[\widetilde{h_0\sigma})ij + (1_{KG_{s+1}} \wedge ij)(\widetilde{h_0\sigma})\overline{u} = 0$ (mod d_1 边缘).

另一方面, 模 d_1 边缘我们有

$$\begin{aligned} g(\overline{u} \wedge 1_M) &= \lambda_2(1_{KG_{s+1}} \wedge v \wedge 1_M)(h_0\sigma \wedge 1_M \wedge 1_M)(\overline{u} \wedge 1_M) + (\lambda_1 - \\ &\quad \lambda_2)(1_{KG_{s+1}} \wedge vi \wedge 1_M)(h_0\sigma \wedge 1_M)m_M(\overline{u} \wedge 1_M) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)(1_{KG_{s+1}} \wedge vi \wedge 1_M)\widetilde{h_0\sigma}(j\overline{u} \wedge 1_M) \end{aligned}$$

更进一步, $(1_{KG_{s+1}} \wedge vi \wedge 1_M)\widetilde{h_0\sigma}(j\overline{u} \wedge 1_M)$ 在 Ext 群中表示的元素非零, 这是因为 $(1_{KG_{s+1}} \wedge (1_K \wedge i)(x \wedge 1_M))(1_{KG_{s+1}} \wedge vi \wedge 1_M)\widetilde{h_0\sigma}(j\overline{u} \wedge 1_M)(\overline{r} \wedge 1_M)(1_K \wedge i) = (1_{KG_{s+1}} \wedge i'ij)\widetilde{h_0\sigma}ijj' = (1_{KG_{s+1}} \wedge i')(h_0\sigma \wedge 1_M)ijj'$ 在 Ext 群中表示的元素非零. 因此, 通过比较以上两个等式可得 $\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_2 - \lambda_1$, 从而 $\lambda_1 = \lambda_2$. 这证明了以上推断 (9.3.15). 证毕.

注 在 9.4 节最后, 我们还将给出定理 9.3.9 的另一个证明.

主要定理 B 的证明 由定理 9.3.9, 存在 $(\eta_{n,s+1})'' \in [\Sigma^{tq+q-1}K, E_{s+1} \wedge K]$ 使得 $(\bar{b}_{s+1} \wedge 1_K)(\eta_{n,s+1})'' = (h_0\sigma)'' \in [\Sigma^{tq+q-1}K, KG_{s+1} \wedge K]$. 令 $(\eta_n)'' = (\bar{a}_0 \cdots \bar{a}_s \wedge 1_K)(\eta_{n,s+1})'' \in [\Sigma^{tq+q-s-2}K, K]$ 并且考查映射

$$(\eta_n)''\beta i'i \in \pi_{tq+pq+2q-s-2}K$$

其中 $\beta \in [\Sigma^{(p+1)q}K, K]$ 为已知的第二周期性元素, 它具有 filtration 1. 由于 $(\eta_n)''$ 在 Adams 谱序列中由 $(h_0\sigma)'' \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q-1}(H^*K, H^*K)$ 所表示, 则 $(\eta_n)''\beta i'i \in \pi_{tq+pq+2q-s-2}K$ 由 $(\beta i'i)^*(h_0\sigma)'' = (\beta i'i)^*(\alpha'')^*(\sigma)' = \alpha''_*\beta_*(i'i)_*(\sigma) \in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+pq+2q}(H^*K, Z_p)$ 所表示. 由 [14] 定理 3.2 和 [15] 定理 5.2 可知,$\alpha''\beta i'i \in \pi_{pq+2q-2}K$ 由 $(i'i)_*(g_0) \in \mathrm{Ext}_A^{2,pq+2q}(H^*K, Z_p)$ 所表示 (相差非零系数). 因此, 我们有 $\alpha''_*\beta_*(i'i)_*(1) = (i'i)_*(g_0) \in \mathrm{Ext}_A^{2,pq+2q}(H^*K, Z_p)$(相差非零系数), 从而 $(\eta_n)''\beta i'i$ 由 $\alpha''_*\beta_*(i'i)_*(\sigma) = (i'i)_*(g_0\sigma) \in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+pq+2q}(H^*K, Z_p)$ 所表示. 证毕.

利用主要定理 A 的更强的结果 (参见注 9.2.35), 主要定理 B 的结果也可以换成为由以下主要定理 B′ 得出.

主要定理 B′ 设 $\sigma \in \mathrm{Ext}_A^{s,tq}(Z_p, Z_p), \sigma' \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq}(Z_p, Z_p)$ 为一对 a_0- 相关元素, 即有二阶微分 $d_2(\sigma) = a_0\sigma'$, 并且主要定理 A 的其它假设成立, 则 $(i'i)_*(g_0\sigma) \in$

$\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+pq+2q}(H^*K,Z_p),(i'i)_*(g_0\sigma')\in \mathrm{Ext}_A^{s+3,tq+pq+2q}(H^*K,Z_p)$ 在 Adams 谱序列中都是永久循环.

证 设 $\phi\sigma\in\pi_{tq+2q}KG_{s+1},\phi\sigma'\in\pi_{tq+2q}KG_{s+2}$ 是 d_1 循环, 它们分别表示 $\phi_*(\sigma)\in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(H^*L,Z_p),\phi_*(\sigma')\in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+2q}(H^*L,Z_p)$. 由主要定理 A 的更强的结果 (参见注 9.2.35) 我们有 $(\bar{c}_{s+2}\wedge 1_L)\phi\sigma'=0,(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_{L\wedge M})(1_{KG_{s+1}}\wedge 1_L\wedge i)\phi\sigma=0$. 因此有 $(\bar{c}_{s+2}\wedge 1_{L\wedge K})(\phi\sigma'\wedge 1_K)=0$, 并且利用环谱 K 的乘法可得出 $(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_{L\wedge K})(\phi\sigma)\wedge 1_K)=0$. 另外, $(h_0\sigma)''=(1_{KG_{s+1}}\wedge\overline{\Delta})(\phi\sigma\wedge 1_K),(h_0\sigma')''=(1_{KG_{s+2}}\wedge\overline{\Delta})(\phi\sigma'\wedge 1_K)$, 这是因为 $\overline{\Delta}(\phi\wedge 1_K)=\alpha''\in[\Sigma^{q-2}K,K]$. 因此可得出 $(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_K)(h_0\sigma)''=0,(\bar{c}_{s+2}\wedge 1_K)(h_0\sigma')''=0$. 剩下的证明步骤和以上主要定理 B 的证明一样. 证毕.

9.4 回拖到 $h_0\sigma$ 元素收敛性的一般结果

在本节我们将证明, 在一定假设下, 元素 $(1_L\wedge i)_*\phi_*(\sigma)\in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(H^*L\wedge M,Z_p)$ 收敛性可以回拖而得出 $h_0\sigma\in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(Z_p,Z_p)$ 在球面稳定同伦群的收敛性. 我们有以下主要定理.

主要定理 C(文献 [24] 定理 A 的推广) 设 $p\geqslant 5,s\leqslant 4$, 并且假设

(I)(a) $\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{\sigma\}$, $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{h_0\sigma\}$,

$\mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+2q+1}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{\widetilde{\alpha}_2\sigma\}$ 并且 $a_0^2\sigma\neq 0$.

(b) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+u}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{a_0\sigma\}$ 当 $u=1$, 而当 $u=2,3$ 为零.

$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq}(Z_p,Z_p)$ 为零或有 (一个或两个) 生成元 σ' 使 (都) 满足

$h_0\sigma'\neq 0,a_0\sigma'\neq 0$,

$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+rq+u}(Z_p,Z_p)=0$ 当 $r=-1,2,3,u=-2,-1,0,1,2,3$ 或

当 $r=1,u=-2,-1,1,2,3$

(c) $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+u}(Z_p,Z_p)=0$ 当 $u=-1,1,2,3$,

$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq+u}(Z_p,Z_p)=0$ 当 $r=-2,-1,1,2,u=-2,-1,0,1,2,3$.

(II) $(1_L\wedge i)_*(\phi)_*(\sigma)\in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(H^*L\wedge M,Z_p)$ 在 Adams 谱序列中是永久循环, 则 $(\alpha i)_*(\sigma)\in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*M,Z_p)$ 在 Adams 谱序列中也是永久循环, 从而 $h_0\sigma=j_*(\alpha i)_*(\sigma)\in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(Z_p,Z_p)$ 在 Adams 谱序列中收敛到 $\pi_{tq+q-s-1}S$ 的非零 p 阶元素.

注意到主要定理 C 的假设 (I) 包含了主要定理 B 的假设 (I), 因此 9.3 节中的一些 Ext 群的结果我们可以直接引用. 在证明主要定理 C 之前, 先叙述一些与 K 和 M 相关的谱, 并且证明低维 Ext 群的一些结果.

由 (9.1.27), $((1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M}\wedge 1_M)\overline{m}_M=\alpha_{Y\wedge M}$, (9.2.12) 以及以下 3×3 引理的可换图形

(9.4.1)
$$\begin{array}{ccccccc} X\wedge M & \xrightarrow{m_M(\tilde\psi\wedge 1_M)} & \Sigma^{2q}M & \xrightarrow{0} & \Sigma^{2q+2}M & & \\ & \searrow^{\tilde\psi\wedge 1_M} & \nearrow m_M & \searrow^{(\phi\wedge 1_K)i'} & \nearrow_{j'(j''\wedge 1_K)} & \searrow \overline{m}_M & \\ & & \Sigma^{2q}M & & \Sigma L\wedge K & & \Sigma^{2q+2}M\wedge M \\ & \nearrow \overline{m}_M & \searrow^{(1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M}\wedge 1_M} & \nearrow & \searrow u' & \nearrow \widetilde{\psi}\wedge 1_M & \\ \Sigma^{2q+1}M & \xrightarrow{\alpha_{Y\wedge M}} & Y\wedge M & \xrightarrow{\tilde u w_2\wedge 1_M} & \Sigma X\wedge M & & \end{array}.$$

可看出 $m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M): X\wedge M\to\Sigma^{2q}M$ 的上纤维是 $\Sigma L\wedge K$, 由以下上纤维序列给出

(9.4.2)
$$X\wedge M\xrightarrow{m_M(\tilde\psi\wedge 1_M)}\Sigma^{2q}M\xrightarrow{(\phi\wedge 1_K)i'}\Sigma L\wedge K\xrightarrow{u'}\Sigma X\wedge M$$

因为 $(1_L\wedge i')(\phi\wedge 1_M)m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)=0$, 因此由 $[\Sigma^{-q-1}X\wedge M, L\wedge M]\cap(\mathrm{ker} d)\cong Z_p\{u''\wedge 1_M\}$ 以及 (9.1.2) 得出 $(\phi\wedge 1_M)m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)=(1_L\wedge\alpha)(u''\wedge 1_M)$ (相差非零系数). 因为 $(\phi\wedge 1_K)i'\alpha=0$, 因此由 (9.4.2), 存在 $\alpha_{X\wedge M}\in[\Sigma^{3q}M, X\wedge M]$ 使得 $m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)\alpha_{X\wedge M}=\alpha$. 另外, $m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)\alpha_{X\wedge M}m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)=\alpha m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)=m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)(1_X\wedge\alpha)$, 从而由 (9.4.2) 有 $\alpha_{X\wedge M}m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)=1_X\wedge\alpha$ 模 $(u')_*[\Sigma^qX\wedge M, L\wedge K]=0$, 这是因为 $[\Sigma^qL\wedge K, L\wedge K]=0$ 以及 $[\Sigma^{3q}M, L\wedge K]=0$. 总之我们有

(9.4.3)
$$(\phi\wedge 1_M)m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)=(1_L\wedge\alpha)(u''\wedge 1_M),$$
$$\alpha_{X\wedge M}m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)=1_X\wedge\alpha$$

以上映射 $\alpha_{X\wedge M}:\Sigma^{3q}M\to X\wedge M$ 的上纤维是 $W\wedge K$, 由以下上纤维序列给出:

(9.4.4)
$$\Sigma^{3q}M\xrightarrow{\alpha_{X\wedge M}}X\wedge M\xrightarrow{\mu_{X\wedge M}}W\wedge K\xrightarrow{j'(j''u\wedge 1_K)}\Sigma^{3q+1}M$$

这可由以下 3×3 引理的可换图形看出

(9.4.5)
$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^{3q}M & \xrightarrow{\alpha} & \Sigma^{2q}M & \xrightarrow{(\phi\wedge 1_K)i'} & \Sigma L\wedge K \\ & \searrow\alpha_{X\wedge M} \quad \nearrow_{m_M(\tilde\psi\wedge 1_M)} & & \searrow i' \quad \nearrow(\phi\wedge 1_K) & \\ & X\wedge M & & \Sigma^{2q}K & \\ & \nearrow u' \quad \searrow\mu_{X\wedge M} & & \nearrow j''u\wedge 1_K \quad \searrow j' & \\ L\wedge K & \xrightarrow{w\wedge 1_K} & W\wedge K & \xrightarrow{j'(j''u\wedge 1_K)} & \Sigma^{3q+1}M \end{array}$$

由 (9.2.13), $ijm_M(\widetilde{\psi}\cdot\widetilde{u}\wedge 1_M)=ij(u_2\wedge 1_M)=(u_2\wedge 1_M)(1_U\wedge ij)=m_M(\widetilde{\psi}\cdot\widetilde{u}\wedge 1_M)(1_U\wedge ij)=m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)(1_X\wedge ij)(\widetilde{u}\wedge 1_M)$, 因此有 $ijm_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)=m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)(1_X\wedge ij)+\lambda(j\widetilde{\psi}\wedge 1_M)$, 某个 $\lambda\in Z_p$. 随之有 $\lambda j(j\widetilde{\psi}\wedge 1_M)=-jm_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)(1_X\wedge ij)=-j\widetilde{\psi}(1_X\wedge j)=j(j\widetilde{\psi}\wedge 1_M)$, 从而 $\lambda=1$. 另外, $i'(\alpha_1\wedge 1_M)m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)=(j''\wedge 1_K)(1_L\wedge i')(\phi\wedge 1_M)m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)=0$, 因此由 (9.1.23) 有 $m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)=m_M(\overline{u}\wedge 1_M)\psi_{X\wedge M}$, 其中 $\psi_{X\wedge M}\in[\Sigma^{-q+1}X\wedge M, Y\wedge M]$. 另外 $[\Sigma^{-q+1}X\wedge M, Y\wedge M]\cong Z_p\{\psi_{X\wedge M}\}$, 这可由 $[\Sigma^{-2q}X\wedge M, M]\cong Z_p\{m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)\}$, (9.1.23) 以及 $[\Sigma^{-q}X\wedge M, K]=0$ 得出. 因此, 由 $j'(j''u\wedge 1_K)\cdot\mu_{X\wedge M}=0$ 以及 (9.1.27) 有 $(u\wedge 1_K)\mu_{X\wedge M}=\overline{\mu}_2(1_Y\wedge i')\psi_{X\wedge M}$ (相差非零系数). 总之我们有

(9.4.6) $$j\widetilde{\psi}\wedge 1_M = ijm_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M) - m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)(1_X\wedge ij)$$

$$(u\wedge 1_K)\mu_{X\wedge M} = \overline{\mu}_2(1_Y\wedge i')\psi_{X\wedge M}\quad \text{相差非零系数}$$

$$[\Sigma^{-q+1}X\wedge M, Y\wedge M]\cong Z_p\{\psi_{X\wedge M}\}$$

$$m_M(\overline{u}\wedge 1_M)\psi_{X\wedge M} = m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)$$

由以下 3×3 引理的同伦可换图形

$$\begin{array}{ccccccc}
L\wedge K & \xrightarrow{(1_X\wedge j)u'} & \Sigma X & \xrightarrow{1_X\wedge p} & \Sigma X \\
\searrow u' & & \nearrow 1_X\wedge j & \searrow \omega & & \nearrow \widetilde{u}w_2 \\
& X\wedge M & & & Y & \\
\nearrow 1_X\wedge i & & \searrow^{m_M(\tilde{\psi}\wedge 1_M)} & \nearrow_{(1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M}} & & \searrow^{\overline{\mu}_2(1_Y\wedge i'i)} \\
X & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \Sigma^{2q}M & \xrightarrow{(\phi\wedge 1_K)i'} & \Sigma L\wedge K
\end{array}$$

可知 $(1_X\wedge j)u' : L\wedge K\to\Sigma X$ 的上纤维为 Y, 由以下上纤维序列

(9.4.7) $$L\wedge K\xrightarrow{(1_X\wedge j)u'}\Sigma X\xrightarrow{\omega}Y\xrightarrow{\overline{\mu}_2(1_Y\wedge i'i)}\Sigma L\wedge K$$

所给出. 另外, 由以上长方形中的可换性我们有

(9.4.8) $$\omega\wedge 1_M = \alpha_{Y\wedge M}m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)$$

命题 9.4.9 在主要定理 C 的假设 (I) 之下我们有

(1) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+r}(H^*K, H^*M) = 0$ 当 $r = 1, 2$;

(2) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+rq+1}(H^*K, H^*K) = 0$ 当 $r = -1, 0, 1, 2$.

证 (1) 由设, $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq-q+r}(Z_p, Z_p) = 0$ 当 $r = -1, 0, 1, 2, 3$, 因此 $(j')_*\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+r}(H^*K, Z_p)\subset\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq-q-r-1}(H^*M, Z_p) = 0$ 当 $r = 1, 2, 3$, 从而 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+r}(H^*K, Z_p) = (i')_*\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+r}(H^*M, Z_p) = 0$ 当 $r = 1, 2, 3$ (参见命题 9.3.0(1)), 结果因而得出.

(2) 考查以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列 ($r = -1, 0, 1, 2$)

$$0 = \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+(r+1)q+2}(H^*K, H^*M)\xrightarrow{(j')^*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+rq+1}(H^*K, H^*K)\xrightarrow{(i')^*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+rq+1}(H^*K, H^*M)$$

右边的群当 $r = 0, 1, 2$ 为零 (参见 (1) 和命题 9.3.2(1)(2)), 而当 $r = -1$ 时也为零, 这是因为由设 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq-q+r}(Z_p, Z_p) = 0$ 当 $r = -1, 0, 1, 2$. 左边的群当 $r = -1, 0, 1$ 为零 (参见 (1) 和命题 9.3.2). 左边的群当 $r = 2$ 时也为零, 这是因为由设 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+rq+u}(Z_p, Z_p) = 0$ 当 $r = 2, 3, u = 0, 1, 2, 3$. 因此中间的群如所求的为零. 证毕.

命题 9.4.10 在主要定理 C 的假设 (I) 之下我们有

(1) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*W\wedge K, H^*X\wedge M) = 0$.

(2) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q+1}(H^*Y, H^*M)\cong Z_p\{((1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M})_*(\tilde{\sigma})\}$,

$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*Y,H^*Y)\cong Z_p\{(\overline{u})^*((1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M})_*(\tilde{\sigma})\}$;

(3) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q}(H^*X,H^*M)\cong Z_p\{((1_X\wedge j)\alpha_{X\wedge M})_*(\tilde{\sigma})\}$.

证　(1) 考查以下由 (9.4.2) 导出的恰当序列

$$0=\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q+1}(H^*W\wedge K,H^*M)$$

$$\xrightarrow{m_M(\tilde{\psi}\wedge 1_M)^*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*W\wedge K,H^*X\wedge M)$$

$$\xrightarrow{(u')^*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*W\wedge K,H^*L\wedge K)$$

右边的群由命题 9.4.9(2) 以及 (9.1.12), (9.1.3) 可知为零. 左边的群由 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+rq+1}(H^*K,H^*M)=0$(当 $r=1,2,3$)(参见命题 9.4.9(2) 的证明) 也可知为零. 因此中间的群如所求的为零.

(2) 由于 $\overline{u}(1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M}\in[\Sigma^{q-1}M,M]\cong Z_p\{ij\alpha,\alpha ij\}$, 因此 $\overline{u}(1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M}=\lambda_1 ij\alpha+\lambda_1\alpha ij$, 其中的系数 $\lambda_1,\lambda_2\in Z_p$ 使满足 $\lambda_1 j\alpha ij\alpha+\lambda_2 j\alpha^2 ij=0$. 考查以下由 (9.1.5) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(Z_p,H^*M)\xrightarrow{(\overline{w})_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q+1}(H^*Y,H^*M)$$
$$\xrightarrow{(\overline{u})_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*M,H^*M)\xrightarrow{(j\alpha)_*}$$

左边的群为零, 这是因为假设 I(b) 中 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q+k}(Z_p,Z_p)=0$ (当 $k=0,1$). 由命题 9.3.1(2), 右边的群有两个生成元 $(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma})$ 和 $\alpha_*(ij)_*(\tilde{\sigma})$. 因此 $(\overline{u})_*\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q+1}(H^*Y,H^*M)$ 有唯一生成元 $(\overline{u})_*((1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M})_*(\tilde{\sigma})$, 从而得出第一个结果. 对第二个结果, 考查以下由 (9.1.5) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(Z_p,Z_p)\xrightarrow{(\overline{w})_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*Y,Z_p)$$
$$\xrightarrow{(\overline{u})_*}\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq}(H^*M,Z_p)\xrightarrow{(j\alpha)_*}$$

由设, 左边的群有唯一生成元 $h_0\sigma=(j\alpha i)_*(\sigma)$, 从而 im $(\overline{w})_*=0$. 右边的群为零或有 (一个或两个) 设生成元 $i_*(\sigma')$ 使满足 $(j\alpha)_*i_*(\sigma')=h_0\sigma'\neq 0$. 因此中间的群为零, 从而第二个结果得出.

(3) 由于 $\widetilde{\psi}(1_X\wedge j)\alpha_{X\wedge M}\in[\Sigma^{q-1}M,M]\cong Z_p\{ij\alpha,\alpha ij\}$, 因此 $\widetilde{\psi}(1_X\wedge j)\alpha_{X\wedge M}=\lambda_3 ij\alpha+\lambda_4\alpha ij$, 其中的系数 $\lambda_3,\lambda_4\in Z_p$ 使满足 $\lambda_3(1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M}ij\alpha+\lambda_4(1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M}\alpha ij=0$. 因此, 与 (2) 中类似, $(\widetilde{\psi})_*\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q}(H^*X,H^*M)$ 有唯一生成元 $(\widetilde{\psi})_*((1_X\wedge j)\alpha_{X\wedge M})_*(\tilde{\sigma})$, 从而 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q}(H^*X,H^*M)$ 有唯一生成元 $((1_X\wedge j)\alpha_{X\wedge M})_*(\tilde{\sigma})$, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q+1}(H^*Y,H^*M)=0$, 由假设 I(b) $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+rq+k}(Z_p,Z_p)=0$ (当 $r=1,2,k=-1,0,1,2$) 所得出. 证毕.

命题 9.4.11　在主要定理 C 的假设 (I) 之下我们有

(1) $\mathrm{Ext}_A^{s,tq-2q}(H^*M,H^*X\wedge M)\cong Z_p\{m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)^*(\tilde{\sigma})\}$.

(2) $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq+u}(H^*K,H^*M)=0$ 当 $r=-1,1,2,3,u=0,1,2,$

$\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*K,H^*K)\cong Z_p\{\sigma_K\}$ 使满足 $(i')^*(\sigma_K)=(i')_*(\tilde{\sigma})$.

(3) $\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*L\wedge K,H^*L\wedge K)\cong Z_p\{\sigma_{L\wedge K}\}$ 使满足

$(j''\wedge 1_K)_*(\sigma_{L\wedge K})=(j''\wedge 1_K)^*(\sigma_K)$

$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq+u}(H^*L\wedge K,H^*M)=0$ 当 $r=1,2,3,u=0,1,2$

(4) $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq+u}(H^*W\wedge K,H^*M)=0$ 当 $r=1,2,3,u=0,1,2$,

$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q}(H^*W\wedge K,H^*X\wedge M)=0$.

证 (1) 考查以下由 (9.2.12) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*M,H^*M\wedge M)\xrightarrow{(\tilde{\psi}\wedge 1_M)^*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq-2q}(H^*M,H^*X\wedge M)$$
$$\xrightarrow{(\tilde{u}w_2\wedge 1_M)^*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq-2q}(H^*M,H^*Y\wedge M)$$

因为由设 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq-rq+u}(Z_p,Z_p)=0$(当 $r=1,2,\ u=0,1,2$) 并且 $Y\wedge M$ 的最高维胞腔的次数是 $q+3$, 因此右边的群为零. 因为 $(\overline{m}_M)^*\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*M,H^*M\wedge M)\subset\mathrm{Ext}_A^{s,tq+1}(H^*M,H^*M)=0$ (参见命题 9.3.0(2)), 因此左边的群有唯一生成元 $(m_M)^*(\tilde{\sigma})$, 从而得出所要的结果.

(2) 考查以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列 $(r=-1,1,2,3,u=0,1,2)$

$$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq+u}(H^*M,H^*M)\xrightarrow{(i')_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq+u}(H^*K,H^*M)$$
$$\xrightarrow{(j')_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq+(r-1)q+u-1}(H^*M,H^*M)\xrightarrow{\alpha_*}$$

左边的群当 $r=-1,1,2,3,u=0,1,2$ 为零, 这是因为由假设 I(c) $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq+k}(Z_p,Z_p)=0$ (当 $r=-1,1,2,3,k=-1,0,1,2,3$). 由设和命题 9.3.0(2), 右边的群为零, 除了当 $r=1,u=0,1$ 时它分别有唯一生成元 $(ij)_*(\tilde{\sigma})$ 或 $\tilde{\sigma}$. 可是, 它满足 $\alpha_*(ij)_*(\tilde{\sigma})\neq 0$, $\alpha_*(\tilde{\sigma})\neq 0$. 因此, 中间的群如所求的为零. 考查以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列

$$0=\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q+1}(H^*K,H^*M)\xrightarrow{(j')^*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*K,H^*K)$$
$$\xrightarrow{(i')^*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*K,H^*M)\xrightarrow{\alpha^*}$$

左边的群如上述为零. 右边的群有唯一生成元 $(i')_*(\tilde{\sigma})$, 这是因为 $(j')_*\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*K,H^*M)\subset\mathrm{Ext}_A^{s,tq-q-1}(H^*M,H^*M)=0$ 并且 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*M,H^*M)\cong Z_p\{\tilde{\sigma}\}$. 因此中间的群如所求的有唯一生成元 σ_K.

(3) 考查以下由 (9.1.3) 导出的恰当序列 $(r=-1,0)$

$$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+(r+1)q}(H^*K,H^*K)\xrightarrow{(j''\wedge 1_K)^*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq}(H^*K,H^*L\wedge K)$$
$$\xrightarrow{(i''\wedge 1_K)^*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq}(H^*K,H^*K)\xrightarrow{(\alpha_1\wedge 1_K)^*}$$

左边的群当 $r=0$ 时为零, 这是因为由 (2) $(i')^*\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q}(H^*K,H^*K)\subset\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q}(H^*K,H^*M)=0$ 并且 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+2q+1}(H^*K,H^*M)=0$. 由 (2), 左边的群当 $r=-1$ 时有唯一生成元 σ_K. 右边的群当 $r=-1$ 时为零, 这是因为由 (2) $(i')^*\mathrm{Ext}_A^{s,tq-q}(H^*K,H^*K)\subset\mathrm{Ext}_A^{s,tq-q}(H^*K,H^*M)=0$ 并且 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+1}(H^*K,H^*M)=0$. 右边的群当 $r=0$ 时有唯一生成元 σ_K 使满足 $(\alpha_1\wedge 1_K)^*(\sigma_K)\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*K,H^*K)$, 这

是因为 $(i')^*(\alpha_1\wedge 1_K)^*(\sigma_K)=(\alpha_1\wedge 1_M)^*(i')^*(\sigma_K)=(\alpha_1\wedge 1_M)^*(i')_*(\tilde{\sigma})=(i')_*(\alpha_1\wedge 1_M)_*(\tilde{\sigma})\neq 0\in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*K,H^*M)$. 因此中间的群当 $r=0$ 时为零而当 $r=-1$ 时有唯一生成元 $(j''\wedge 1_K)^*(\sigma_K)$, 从而第一个结果由以下由 (9.1.3) 导出的恰当序列得出:

$$0=\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*K,H^*L\wedge K)\xrightarrow{(i''\wedge 1_K)_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*L\wedge K,H^*L\wedge K)\xrightarrow{(j''\wedge 1_K)_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq-q}(H^*K,H^*L\wedge K)\xrightarrow{(\alpha_1\wedge 1_K)_*}$$

对第二个结果, 考查以下由 (9.1.3) 导出的恰当序列 $(r=1,2,3,u=0,1,2)$

$$0=\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq+u}(H^*K,H^*M)\xrightarrow{(i''\wedge 1_K)_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq+u}(H^*L\wedge K,H^*M)\xrightarrow{(j''\wedge 1_K)_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq+(r-1)q+u}(H^*K,H^*M)\xrightarrow{(\alpha_1\wedge 1_K)_*}$$

由 (2), 左边的群当 $r=1,2,3,u=0,1,2$ 时为零而右边的群当 $r=2,3,u=0,1,2$ 时也为零. 由命题 9.3.0 和假设, 右边的群当 $r=1,u=1,2$ 时也为零. 当 $r=1,u=0$ 时, 右边的群有唯一生成元 $(i')_*(\tilde{\sigma})$ 使满足 $(\alpha_1\wedge 1_K)_*(i')_*(\tilde{\sigma})\neq 0$. 因此中间的群当 $r=1,2,3,u=0,1,2$ 时为零.

(4) 考查以下由 (9.1.12) 导出的恰当序列 $(r=1,2,3,u=0,1,2)$

$$0=\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq+u}(H^*L\wedge K,H^*M)\xrightarrow{(w\wedge 1_K)_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq+rq+u}(H^*W\wedge K,H^*M)\xrightarrow{(j''u\wedge 1_K)_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq+(r-2)q+u}(H^*K,H^*M)\xrightarrow{(\phi\wedge 1_K)_*}$$

由 (3), 左边的群当 $r=1,2,3,u=0,1,2$ 时为零. 由 (2), 右边的群当 $r=1,3,u=0,1,2$ 时为零并且由命题 9.3.0 和假设, 它当 $r=2,u=1$ 时也为零. 当 $r=2,u=0$ 时, 右边的群有唯一生成元 $(i')_*(\tilde{\sigma})$ 使满足 $(\phi\wedge 1_K)_*(i')_*(\tilde{\sigma})\neq 0\in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(H^*L\wedge K,H^*M)$. 因此中间的群如所求的当 $r=1,2,3,u=0,1,2$ 时为零.

因为 $(\widetilde{u}w_2\overline{w}\wedge 1_M)^*\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q}(H^*W\wedge K,H^*X\wedge M)\subset \mathrm{Ext}_A^{s,tq+q}(H^*W\wedge K,H^*M)=0$, 因此, 由 (9.1.5), $(\widetilde{u}w_2\wedge 1_M)^*\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q}(H^*W\wedge K,H^*X\wedge M)=(\overline{u}\wedge 1_M)^*\mathrm{Ext}_A^{s,tq+2q+1}(H^*W\wedge K,H^*M\wedge M)=0$. 再利用 (9.2.12) 可知 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q}(H^*W\wedge K,H^*X\wedge M)=(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)^*\mathrm{Ext}_A^{tq+3q}(H^*W\wedge K,H^*M\wedge M)=0$. 证毕.

主要定理 C 将通过在与球谱相关的一些谱的 Adams 分解 (参见 (9.2.9)) 中进行一些推理来加以证明. 在证明主要定理 C 之前, 先证明以下两个引理.

引理 9.4.12 在主要定理 C 的假设 (I), (II) 之下我们有

(1) 设 $\widetilde{h_0\sigma}\in[\Sigma^{tq+q+1}M,KG_{s+1}\wedge M]$ 为 d_1 循环, 它表示 $\alpha_*(\tilde{\sigma})\in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*M,H^*M)$, 则 $(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_M)\widetilde{h_0\sigma}=(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha)(\kappa\wedge 1_M)$ (相差系数), 其中 $\kappa\in\pi_{tq+1}E_{s+2}$ 使得 $\bar{a}_{s+1}\cdot\kappa=\bar{c}_s\cdot\sigma$ 而 $\sigma\in\pi_{tq}KG_s\cong \mathrm{Ext}_A^{s,tq}(Z_p,Z_p)$.

(2) $(1_{E_{s+2}}\wedge\phi\wedge 1_M)(\kappa\wedge 1_M)=0$, $(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha_1\wedge 1_M)(\kappa\wedge 1_M)=0$.

证 (1) 因为 $(1_{KG_{s+1}}\wedge i')\widetilde{h_0\sigma}$ 是一个 d_1 边缘, 因此 $(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_K)(1_{KG_{s+1}}\wedge i')(\widetilde{h_0\sigma})=0$, 从而 $(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_M)\widetilde{h_0\sigma}=(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha)f'$, 某个 $f'\in[\Sigma^{tq+1}M,E_{s+2}\wedge M]$. 随之有 $(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_M)(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha)f'=0$, 从而 $(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_M)f'=(1_{E_{s+1}}\wedge j')f_2'$, 某个 $f_2'\in[\Sigma^{tq+q+1}M,E_{s+1}\wedge K]$. d_1 循环 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_K)f_2'$ 表示 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*K,H^*M)$ 中的元素, 但这个群由命题 9.3.2(2) 为零, 因此 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_K)f_2'=(\bar{b}_{s+1}\bar{c}_s\wedge 1_K)g_0'$, 某个 $g_0'\in[\Sigma^{tq+q+1}M,KG_s\wedge K]$. 因此, $f_2'=(\bar{c}_s\wedge 1_K)g_0'+(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_K)f_3'$, 某个 $f_3'\in[\Sigma^{tq+q+2}M,E_{s+2}\wedge K]$, 从而有 $(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_M)f'=(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_M)(1_{E_{s+2}}\wedge j')f_3'+(\bar{c}_s\wedge 1_M)(1_{KG_s}\wedge j')g_0'=(\bar{a}_2\wedge 1_M)(1_{E_{s+2}}\wedge j')f_3'+(\bar{c}_s\wedge 1_M)(\sigma\wedge 1_M)=(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_M)(1_{E_{s+2}}\wedge j')f_3'+(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_M)(\kappa\wedge 1_M)$, 其中 d_1 循环 $(1_{KG_s}\wedge j')g_0'\in[\Sigma^{tq}M,KG_s\wedge M]$ 表示 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*M,H^*M)$ 的元素而这个群有唯一生成元 $\tilde{\sigma}$, 从而它等于 $\sigma\wedge 1_M$ (模 d_1 边缘). 随之我们有 $f'=(1_{E_{s+1}}\wedge j')f_3'+(\kappa\wedge 1_M)+(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_M)\tilde{g}_1$, 某个 $\tilde{g}_1\in[\Sigma^{tq+1}M,KG_{s+1}\wedge M]$. 因此 $(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_M)\widetilde{h_0\sigma}=(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha)f'=(1_{E_{s+1}}\wedge\alpha)(\kappa\wedge 1_M)$, 结果得出.

(2) 因为当 $r=2$ 时 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+rq}(Z_p,Z_p)$ 为零. 而当 $r=1$ 时有唯一生成元 $h_0\sigma=(j'')_*(\phi)_*(\sigma)$, 因此 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(H^*L,Z_p)\cong Z_p\{(\phi)_*(\sigma)\}$ 且 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(H^*W,Z_p)=0$. 由此并利用类似于 (1) 的证法可知 $(1_{E_{s+2}}\wedge\phi)\kappa=(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_L)\sigma\phi$ (相差系数), 其中 $\sigma\phi\in\pi_{tq+2q}(KG_{s+1}\wedge L)$ 是 d_1 循环, 它表示元素 $(\phi)_*(\sigma)\in\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(H^*L,Z_p)$. 因此, 由主要定理 C 的假设 (II) 我们有 $(1_{E_{s+2}}\wedge\phi\wedge 1_M)(\kappa\wedge 1_M)=(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_{L\wedge M})(\sigma\phi\wedge 1_M)=0$ 从而结论得证. 证毕.

引理 9.4.13 在主要定理 C 的假设 (I) 之下我们有

(1) $\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*X\wedge M,H^*X\wedge M)\cong Z_p\{[\sigma\wedge 1_{X\wedge M}]\}$.

(2) 对任意 d_1 循环 $g_0\in[\Sigma^{tq+q}X,KG_{s+1}\wedge X]$, $g_0=\lambda'(h_0\sigma\wedge 1_X)$ (模 d_1 边缘), 某个 $\lambda'\in Z_p$ 并且 $(\psi_{X\wedge M})_*[h_0\sigma\wedge 1_{X\wedge M}]\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+1}(H^*Y\wedge M,H^*X\wedge M)$.

证 (1) 考查以下由 (9.4.2) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+2q}(H^*L\wedge K,H^*M)\xrightarrow{m_M(\tilde{\psi}\wedge 1_M)^*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*L\wedge K,H^*X\wedge M)$$
$$\xrightarrow{(u')^*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*L\wedge K,H^*L\wedge K)\xrightarrow{((1_L\wedge i')(\phi\wedge 1_M))^*}$$

由命题 9.4.11(3), 左边的群为零而右边的群有唯一生成元 $\sigma_{L\wedge K}$ 使满足 $((1_L\wedge i')(\phi\wedge 1_M))^*(\sigma_{L\wedge K})\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+2q}(H^*L\wedge K,H^*M)$, 这是因为 $(j''\wedge 1_K)_*((1_L\wedge i')(\phi\wedge 1_M))^*(\sigma_{L\wedge K})=((1_L\wedge i')(\phi\wedge 1_M))^*(j''\wedge 1_K)_*(\sigma_{L\wedge K})=((1_L\wedge i')(\phi\wedge 1_M)^*(j''\wedge 1_K)^*(\sigma_K)=((\alpha_1\wedge 1_K)i')^*(\sigma_K)=(\alpha_1\wedge 1_M)^*(i')_*(\tilde{\sigma})=(i'(\alpha_1\wedge 1_M))_*(\tilde{\sigma})\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*K,H^*M)$. 因此中间的群为零. 考查以下由 (9.4.2) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*L\wedge K,H^*X\wedge M)\xrightarrow{(u')_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*X\wedge M,H^*X\wedge M)$$

$$\overset{m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)_*}{\longrightarrow} \mathrm{Ext}_A^{s,tq-2q}(H^*M, H^*X\wedge M) \overset{((1_L\wedge i')(\phi\wedge 1_M))_*}{\longrightarrow}$$

如上述,左边的群为零. 由命题 9.4.11(1), 右边的群有唯一生成元 $m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)^*(\tilde{\sigma}) = m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)^*[\sigma\wedge 1_M] = [(\sigma\wedge 1_M)m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)] = [(1_{KG_s}\wedge m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M))(\sigma\wedge 1_{X\wedge M})] = m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)_*[\sigma\wedge 1_{X\wedge M}]$, 而它满足 $((1_L\wedge i')(\phi\wedge 1_M))_* m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)^*(\tilde{\sigma}) = ((1_L\wedge i')(\phi\wedge 1_M))_* m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)_*[\sigma\wedge 1_{X\wedge M}] = 0$. 因此中间的群如所求的有唯一生成元 $[\sigma\wedge 1_{X\wedge M}]$.

(2) 注意到 $(\widetilde{\psi})_*(\widetilde{u}w_2)^*\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*X,H^*X) \subset \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq-q-1}(H^*M,H^*Y)$. 类似于命题 9.3.0(1), 由假设可得 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq}(H^*M,H^*M)$ 为零或有 (一个或两个) 生成元 $\tilde{\sigma}'$, 因此 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq-q-1}(H^*M,H^*Y)$ 为零或有 (一个或两个) 生成元 $(\overline{u})^*(\tilde{\sigma}')$, 而它满足 $((1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M})_*(\overline{u})^*(\tilde{\sigma}') = ((1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M})_*(\overline{u})_*[\sigma'\wedge 1_Y] = (1_Y\wedge\alpha_1)_*[\sigma'\wedge 1_Y] = [h_0\sigma'\wedge 1_Y] \neq 0$, 因此 $(\widetilde{\psi})_*(\widetilde{u}w_2)^*\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*X,H^*X) = 0$, 从而有 $(\widetilde{u}w_2)^*\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*X,H^*X) = (\widetilde{u}w_2)_*\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*Y,H^*Y) = 0$, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*Y,H^*Y) \cong Z_p\{((1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M})_*(\overline{u})^*(\tilde{\sigma})\}$ (参见命题 9.4.10(2)). 因此 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*X,H^*X) = (\widetilde{\psi})^*\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+3q}(H^*X,H^*M)$, 而它有唯一生成元 $(\widetilde{\psi})^*((1_X\wedge j)\alpha_{X\wedge M})_*(\tilde{\sigma}) = ((1_X\wedge j)\alpha_{X\wedge M})_*[(\sigma\wedge 1_M)\widetilde{\psi}] = ((1_X\wedge j)\alpha_{X\wedge M})_*[(1_{KG_{s+1}}\wedge \widetilde{\psi})(\sigma\wedge 1_X)] = ((1_X\wedge j)\alpha_{X\wedge M})_* m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)_*(1_X\wedge i)_*[\sigma\wedge 1_X] = (1_X\wedge j\alpha i)_*[\sigma\wedge 1_X] = [h_0\sigma\wedge 1_X]$ (参见命题 9.4.10(3)) 因此第一个结果得出. 对第二个结果, 由 (9.4.6), d_1 循环 $(1_{KG_{s+1}}\wedge m_M(\overline{u}\wedge 1_M)\psi_{X\wedge M})(h_0\sigma\wedge 1_{X\wedge M}) = (1_{KG_{s+1}}\wedge m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M))(h_0\sigma\wedge 1_{X\wedge M}) = (h_0\sigma\wedge 1_M)m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)$, 而它表示元素 $m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)^*[h_0\sigma\wedge 1_M] = m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)^*(\alpha_1\wedge 1_M)_*(\tilde{\sigma}) \neq 0$, 从而第二个结果得证. 证毕.

主要定理 C 的证明 由引理 9.4.12(1), 只需证明 $(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_M)\widetilde{h_0\sigma} = (1_{E_{s+1}}\wedge \alpha)(\kappa\wedge 1_M) = 0$. 以下的证明分成两个步骤.

步骤 1 证明 $(\kappa\wedge 1_{X\wedge M})(1_X\wedge\alpha) = 0$.

由 (9.4.3), $(\phi\wedge 1_M)m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M) = (u''\wedge 1_M)(1_X\wedge\alpha)$, 因此由引理 9.4.12(2) 有 $(1_{E_{s+2}}\wedge u''\wedge 1_M)(1_{E_{s+2}}\wedge 1_X\wedge\alpha)(\kappa\wedge 1_{X\wedge M}) = (1_{E_{s+2}}\wedge\phi\wedge 1_M)(\kappa\wedge 1_M)m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M) = 0$. 更进一步, 由 (9.2.16) 可得 $(1_{E_{s+2}}\wedge 1_X\wedge\alpha)(\kappa\wedge 1_{X\wedge M}) = (1_{E_{s+2}}\wedge \widetilde{u}w_3\wedge 1_M)f$, 某个 $f\in[\Sigma^{tq+q+1}X\wedge M, E_{s+2}\wedge W\wedge M]\cap(\mathrm{ker}d)$ (参见推论 6.4.15). 将上式合成于 $(1_{E_{s+2}}\wedge 1_X\wedge i'i\wedge 1_M)$ 得出 $(1_{E_{s+2}}\wedge\widetilde{u}w_3\wedge 1_{K\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge 1_W\wedge i'i\wedge 1_M)f = (1_{E_{s+2}}\wedge(1_X\wedge(i'i\wedge 1_M)\alpha)(\kappa\wedge 1_{X\wedge M}) = (1_{E_{s+2}}\wedge 1_X\wedge\overline{m}_K i'(\alpha_1\wedge 1_M)))(\kappa\wedge 1_{X\wedge M}) = 0$, 这里利用了引理 9.4.12(2) 中的 $(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha_1\wedge 1_M)(\kappa\wedge 1_M) = 0$. 随之, 由 (9.2.16), $(1_{E_{s+2}}\wedge 1_W\wedge i'i\wedge 1_M)f = (1_{E_{s+2}}\wedge w'(\pi\wedge 1_L)\wedge 1_{K\wedge M})f_2 = 0$ (某个 $f_2\in[\Sigma^{tq+1}X\wedge M, E_{s+2}\wedge L\wedge K\wedge M]$), 这是因为 $\pi\wedge 1_K = 0$. 因此, 由 (9.1.4) 有 $f = (1_{E_{s+2}}\wedge 1_W\wedge\epsilon\wedge 1_M)f_3 = (1_{E_{s+2}}\wedge 1_W\wedge\alpha m_M(\overline{u}\wedge 1_M)f_3$, 某个 $f_3\in[\Sigma^{tq+q+2}X\wedge M, E_{s+2}\wedge W\wedge Y\wedge M]\cap(\mathrm{ker}d)$ (参见推论 6.4.15), 从而我们有

(9.4.14) $(1_{E_{s+2}}\wedge 1_X\wedge\alpha)(\kappa\wedge 1_{X\wedge M})$

$= (1_{E_{s+2}}\wedge\widetilde{u}w_3\wedge 1_M)(1_{E_{s+2}}\wedge 1_W\wedge\alpha m_M(1_M\wedge\overline{u}))f_3$

$= (1_{E_{s+2}}\wedge\alpha_{X\wedge M}(j''u\wedge 1_M))(1_{E_{s+2}}\wedge 1_W\wedge m_M(1_M\wedge\overline{u}))f_3$ (参见 (9.4.3))

由 (9.4.14), $(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{X\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge\widetilde{u}w_3\wedge 1_M)(1_{E_{s+2}}\wedge(1_W\wedge\alpha m_M(\overline{u}\wedge 1_M))f_3 = (\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{X\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge 1_X\wedge\alpha)(\kappa\wedge 1_{X\wedge M}) = (\bar{c}_s\wedge 1_{X\wedge M})(1_{KG_s}\wedge 1_X\wedge\alpha)(\sigma\wedge 1_{X\wedge M}) = 0$, 这是因为 α 诱导出 Z_p- 上同调群的零同态. 因此由 (9.2.16) 以及 $w'(\pi\wedge 1_L)\wedge 1_M = (w\wedge 1_M)(1_L\wedge\alpha)$ 我们有

(9.4.15) $(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{W\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge 1_W\wedge\alpha m_M(\overline{u}\wedge 1_M))f_3$

$= (1_{E_{s+1}}\wedge(1_W\wedge\alpha)(w\wedge 1_M))f_5$

某个 $f_5\in[\Sigma^{tq}X\wedge M, E_{s+1}\wedge L\wedge M]\cap(\mathrm{ker}d)$ (参见推论 6.4.15).

由 (9.4.15), (9.1.2), $(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{W\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge 1_W\wedge m_M(\overline{u}\wedge 1_M))f_3 = (1_{E_{s+1}}\wedge w\wedge 1_M)f_5 + (1_{E_{s+1}}\wedge 1_W\wedge j')f_6$, 某个 $f_6\in[\Sigma^{tq+q+1}X\wedge M, E_{s+1}\wedge W\wedge K]\cap(\mathrm{ker}d)$ (参见命题 6.5.26). 因为 $(1_W\wedge\alpha_1)w = w(1_L\wedge\alpha_1) = w\cdot\phi j'' = 0$, 因此 $w = (1_W\wedge j'')\psi_W$, 其中 $\psi_W\in[\Sigma^q L, W\wedge L]$. 从而有 $w\wedge 1_M = (1_W\wedge j'')\psi_W\wedge 1_M = (1_W\wedge m_M(\overline{u}\wedge 1_M))((1_W\wedge\bar{h})\psi_W\wedge 1_M)$. 因此 $-(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{W\wedge Y\wedge M})f_3 = (1_{E_{s+2}}\wedge(1_W\wedge h)\psi_W\wedge 1_M)f_5 + (1_{E_{s+1}}\wedge 1_W\wedge(1_Y\wedge i)r)f_6 + (1_{E_{s+1}}\wedge 1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)f_7$ 并且由命题 6.5.26, $f_7 = f_8(1_X\wedge i') + f_9(1_X\wedge i'ij)$, 其中 $f_8\in[\Sigma^{tq+q}X\wedge K, E_{s+1}\wedge W\wedge K]\cap(\mathrm{ker}d)$, 而 $f_9\in[\Sigma^{tq+q+1}X\wedge K, E_{s+1}\wedge W\wedge K]\cap(\mathrm{ker}d)$. 因为 $d((1_Y\wedge i)r) = ((r\wedge 1_M)d(1_K\wedge i) = (r\wedge 1_M)(1_K\wedge m_M)(T_{K,M}\wedge 1_M)(1_M\wedge 1_K\wedge i)\overline{m}_K = (r\wedge 1_M)(1_K\wedge m_M(1_M\wedge i)\overline{m}_K = (r\wedge 1_M)\overline{m}_K$, 利用定理 6.4.8(1) 对上式作用于 d 可得 $-(1_{E_{s+1}}\wedge 1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)f_6 - (1_{E_{s+1}}\wedge 1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)f_9(1_X\wedge i') = 0$ (注: f_6 具有奇次数), 从而有

(9.4.16)
$$\begin{aligned}-(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{W\wedge Y\wedge M})f_3 = {}& (1_{E_{s+1}}\wedge(1_W\wedge\bar{h})\psi_W\wedge 1_M)f_5 + (1_{E_{s+1}}\wedge 1_W\\ &\wedge(1_Y\wedge i)r)f_6 + (1_{E_{s+1}}\wedge 1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)\\ & f_8(1_X\wedge i') - (1_{E_{s+1}}\wedge 1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)f_6(1_X\wedge ij)\end{aligned}$$

注意到, d_1 循环 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_{W\wedge K})f_6\in[\Sigma^{tq+q+1}X\wedge M, KG_{s+1}\wedge W\wedge K]\cap(\mathrm{ker}d)$ 表示 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q+1}(H^*W\wedge K, H^*X\wedge M)$ 中的元素, 而这个群由命题 9.4.10(1) 为零, 因此 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_{W\wedge K})f_6 = (\bar{b}_{s+1}\bar{c}_s\wedge 1_{W\wedge K})g$, 某个 $g\in[\Sigma^{tq+q+1}X\wedge M, KG_s\wedge W\wedge K]\cap(\mathrm{ker}d)$ (参见命题 6.5.26), 从而 $f_6 = (\bar{c}_s\wedge 1_{W\wedge K})g + (\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{W\wedge K})f'$, 某个 $f'\in[\Sigma^{tq+q+2}X\wedge M, E_{s+2}\wedge W\wedge K]\cap(\mathrm{ker}d)$ (参见命题 6.5.26). 因此有

(9.4.17)
$$\begin{aligned}-(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{W\wedge Y\wedge M})f_3 = {}& (1_{E_{s+1}}\wedge(1_W\wedge\bar{h})\psi_W\wedge 1_M)f_5\\ &+(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{W\wedge Y\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge 1_W\wedge(1_Y\wedge i)r)f'\\ &+(\bar{c}_s\wedge 1_{W\wedge Y\wedge M})(1_{KG_s}\wedge 1_W\wedge(1_Y\wedge i)r)g\\ &+(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{W\wedge Y\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge 1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)f'(1_X\wedge ij)\\ &-(\bar{c}_s\wedge 1_{W\wedge Y\wedge M})(1_{KG_s}\wedge 1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)g(1_X\wedge ij)\\ &+(1_{E_{s+1}}\wedge 1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)f_8(1_X\wedge i')\end{aligned}$$

令 P 为 $(1_W \wedge \bar{h})\psi_W : \Sigma^{q+1}L \to W \wedge Y$ 的上纤维, 由以下上纤维序列

(9.4.18)
$$\Sigma^{q+1}L \xrightarrow{(1_W\wedge\bar{h})\psi_W} W \wedge Y \xrightarrow{w_5} P \xrightarrow{u_5} \Sigma^{q+2}L$$

所给出. 因此, $w_5(1_W \wedge r) : W \wedge K \to P$ 的上纤维是 ΣX 由以下上纤维序列

(9.4.19)
$$W \wedge K \xrightarrow{w_5(1_W\wedge r)} V \xrightarrow{w_6} \Sigma X \xrightarrow{u_6} \Sigma W \wedge K$$

所给出. 这可由以下 3 × 3 引理的同伦可换图形看出

$$\begin{array}{ccccccc}
W\wedge K & & \xrightarrow{w_5(1_W\wedge r)} & P & \xrightarrow{u_5} & & \Sigma^{q+2}L \\
& \searrow 1_W\wedge r & \nearrow w_5 & & \searrow w_6 & \nearrow u'' & \\
& & W\wedge Y & & \Sigma X & & \\
& \nearrow^{(1_W\wedge\bar{h})\psi_W} & \searrow 1_W\wedge\epsilon & & \nearrow \widetilde{u}w_3 & \searrow u_6 & \\
\Sigma^{q+1}L & & \xrightarrow{w'(\pi\wedge 1_L)} & \Sigma W & \xrightarrow{1_W\wedge i'i} & & \Sigma W\wedge K
\end{array}$$

注意到 $u_6 = \mu_{X\wedge M}(1_X\wedge i)$, 因此通过对 (9.4.17) 的左边合成于 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_P)(1_{E_{s+1}}\wedge w_5\wedge j)$ 而在右边合成于 $(1_X\wedge i)$ 得出 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_P)(1_{E_{s+1}}\wedge w_5(1_W\wedge r))f_8(1_X\wedge i'i) = 0$, 从而有 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_{W\wedge K})f_8(1_X\wedge i'i) = (1_{KG_{s+1}}\wedge u_6)g_0 = (1_{KG_{s+1}}\wedge \mu_{X\wedge M}(1_X\wedge i))g_0 = (1_{KG_{s+1}}\wedge \mu_{X\wedge M})(g_0\wedge 1_M)(1_X\wedge i)$, 某个 d_1 循环 $g_0 \in [\Sigma^{tq+q}X, KG_{s+1}\wedge X]$. 而由引理 9.4.13(2), $g_0 = \lambda_1(h_0\sigma\wedge 1_X)$ (模 d_1 边缘), 其中 $\lambda_1 \in Z_p$. 更进一步, 通过对 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_{W\wedge K})f_8(1_X\wedge i'ij) = (1_{KG_{s+1}}\wedge \mu_{X\wedge M})(g_0\wedge 1_M)(1_X\wedge ij)$ 作用于 d 我们有

(9.4.20)
$$(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_{W\wedge K})f_8(1_X\wedge i') = (1_{KG_{s+1}}\wedge \mu_{X\wedge M})(g_0\wedge 1_M),$$
$$g_0 = \lambda_1(h_0\sigma\wedge 1_X) \in [\Sigma^{tq+q}X, KG_{s+1}\wedge X] \qquad (\text{模 } d_1 \text{ 边缘})$$

考查以下上纤维序列 (9.1.12), (9.4.18) 的可换图形

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^{q+1}L\wedge M & \xrightarrow{w\wedge 1_M} & \Sigma^{q+1}W\wedge M & \xrightarrow{j''u\wedge 1_M} & \Sigma^{3q+1}M & \xrightarrow{\phi\wedge 1_M} & \Sigma^{q+2}L\wedge M \\
\uparrow 1_{L\wedge M} & & \uparrow 1_W\wedge m_M(\overline{u}\wedge 1_M) & & \uparrow u_7 & & \uparrow 1_{L\wedge M} \\
\Sigma^{q+1}L\wedge M & \xrightarrow{(1_W\wedge\bar{h})\psi_W\wedge 1_M} & W\wedge Y\wedge M & \xrightarrow{w_5\wedge 1_M} & P\wedge M & \xrightarrow{u_5\wedge 1_M} & \Sigma^{q+2}L\wedge M
\end{array}$$

由于左边方块同伦可换, 因此存在 $u_7 \in [\Sigma^{-3q-1}P\wedge M, M]$ 使得以上所有方块都同伦可换. 即我们有

(9.4.21)
$$u_7(w_5\wedge 1_M) = (j''u\wedge 1_M)(1_W\wedge m_M(\overline{u}\wedge 1_M)),$$
$$(\phi\wedge 1_M)u_7 = \pm\ \ u_5\wedge 1_M$$

其中 $u_7 \in [\Sigma^{-3q-1}P\wedge M, M]$. 由以上第二个等式, 我们有以下 3 × 3 引理的同伦可换图形, 其中利用了上纤维序列 (9.2.12), (9.4.18), (9.1.23):

(9.4.22)
$$\begin{array}{ccccccccc}
P\wedge M & & \xrightarrow{u_5\wedge 1_M} & & \Sigma^{q+2}L\wedge M & & \xrightarrow{w\wedge 1_M} & & \Sigma^{q+2}W\wedge M \\
& \searrow u_7 & & \nearrow \phi\wedge 1_M & & \searrow^{(1_W\wedge\bar{h})\psi_W\wedge 1_M} & & \nearrow_{1_W\wedge m_M(\overline{u}\wedge 1_M)} & \searrow j''u\wedge 1_M \\
& & \Sigma^{3q+1}M & & & & \Sigma W\wedge Y\wedge M & & \Sigma^{3q+2}M \\
& \nearrow j''u\wedge 1_M & & \searrow^{(\phi_W\wedge 1_K)i'} & & \nearrow_{1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K} & & \searrow w_5\wedge 1_M & \nearrow u_7 \\
\Sigma^{q+1}W\wedge M & & \xrightarrow{\tilde{\lambda}(1_W\wedge\alpha'i')} & & \Sigma^2 W\wedge K & & \longrightarrow & & \Sigma P\wedge M
\end{array}$$

由此存在以下上纤维序列

(9.4.23) $$\Sigma^{3q-1}M \xrightarrow{(\phi_W\wedge 1_K)i'} W\wedge K \xrightarrow{(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)} \Sigma^{-1}P\wedge M \xrightarrow{u_7} \Sigma^{3q}M$$

其中 $\phi_W\in[\Sigma^{3q-1}S,W]$ 使得 $u\cdot\phi_W=\phi\in[\Sigma^{2q-1}S,L]$. 因为 $(\phi\wedge 1_K)i'\cdot u_7=(u\cdot\phi_W\wedge 1_K)i'\cdot u_7=0$, 因此由 (9.4.2) 我们有

(9.4.24) $$u_7=m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)u_8$$

其中 $u_8\in[\Sigma^{-q-1}P\wedge M,X\wedge M]$. 另一方面, 由 (9.4.8), $(\omega\wedge 1_M)u_8(w_5(1_W\wedge r)\wedge 1_M)=\alpha_{Y\wedge M}m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)u_8(w_5(1_W\wedge r)\wedge 1_M)=\alpha_{Y\wedge M}u_7(w_5(1_W\wedge r)\wedge 1_M)=\alpha_{Y\wedge M}j'(j''u\wedge 1_K)(1_W\wedge m_K)=0$ (参见 (9.1.27)). 因此, 由 (9.4.7), $u_8(w_5(1_W\wedge r)\wedge 1_M)=((1_X\wedge j)u'\wedge 1_M)\Delta_1$, 某个 $\Delta_1\in[\Sigma^{-q}W\wedge K\wedge M,L\wedge K\wedge M]\cap(\mathrm{ker}d)$. 对上式合成于 $\mu_{X\wedge M}(1_X\wedge i)\wedge 1_M$, 并利用 (9.4.19) 可得 $((1_X\wedge j)u'\wedge 1_M)\Delta_1(\mu_{X\wedge M}(1_X\wedge i)\wedge 1_M)=0$, 从而由 (9.4.7), (9.4.6) 得出 $\Delta_1(\mu_{X\wedge M}(1_X\wedge i)\wedge 1_M)=(\overline{\mu}_2(1_Y\wedge i'i)\wedge 1_M)\psi_{X\wedge M}$. 因此 $(j''\wedge 1_{K\wedge M})\Delta_1(\mu_{X\wedge M}(1_X\wedge i)\wedge 1_M)=((j''\wedge 1_K)\overline{\mu}_2(1_Y\wedge i'i)\wedge 1_M)\psi_{X\wedge M}=(i'\overline{u}\wedge 1_M)\psi_{X\wedge M}=(i'i\wedge 1_M)m_M(\overline{u}\wedge 1_M)\psi_{X\wedge M}+(i'\wedge 1_M)\overline{m}_M(j\overline{u}\wedge 1_M)\psi_{X\wedge M}$, 从而有 $(j''\wedge 1_{K\wedge M})\Delta_1(\mu_{X\wedge M}(1_X\wedge i)\cdot\widetilde{u}w_2\wedge 1_M)=0$. 随之得出 $(j''\wedge 1_{K\wedge M})\Delta_1(\mu_{X\wedge M}(\widetilde{u}w_2\wedge 1_M)\wedge 1_M)\in(1_Y\wedge j\wedge 1_M)^*[\Sigma^{-2q}Y\wedge M,K\wedge M]=0$, 这是因为 $Y\wedge M$ 的最高维胞腔的次数是 $q+3$. 因此 $(j''\wedge 1_{K\wedge M})\Delta_1(\mu_{X\wedge M}\wedge 1_M)\in(\widetilde{\psi}\wedge 1_{M\wedge M})^*[M\wedge M\wedge M,K\wedge M]$, 从而有 $(j'(j''\wedge 1_K)\wedge 1_M)\Delta_1(\mu_{X\wedge M}\wedge 1_M)=0$, 并且由 (9.4.4) 得出 $(j'(j''\wedge 1_K)\wedge 1_M)\Delta_1=\Delta_2(j'(j''u\wedge 1_K)\wedge 1_M)=\lambda(j'(j''u\wedge 1_K)\wedge 1_M)$, 某个 $\lambda\in Z_p$, 这是因为 $\Delta_2\in[M\wedge M,M\wedge M]\cap(\mathrm{ker}d)\cong Z_p\{1_{M\wedge M}\}$. 因此 $(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)u_8(w_5(1_W\wedge r)\wedge 1_M)=(\widetilde{\psi}(1_X\wedge j)u'\wedge 1_M)\Delta_1=(j'(j''\wedge 1_K)\wedge 1_M)\Delta_1=\lambda(j'(j''u\wedge 1_K)\wedge 1_M)$. 而由 (9.4.21), (9.4.24) 可知 $\lambda=1$, 从而有

(9.4.25) $$\begin{aligned} m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(1_Y\wedge i)r)&=j'(j''u\wedge 1_K)\\ &=(j\widetilde{\psi}\wedge 1_M)u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K),\\ (j\widetilde{\psi}\wedge 1_M)u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(1_Y\wedge i)r)&=ijj'(j''u\wedge 1_K)\end{aligned}$$

其中第一个等式的最后一个等式用到了 $(jj'\wedge 1_M)\overline{m}_K=j'$. 现在对 (9.4.17) 合成于 $(1_{E_{s+1}}\wedge u_8(w_5\wedge 1_M))$ (它具有奇次数), 我们得出

(9.4.26) $$\begin{aligned}&(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{X\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge u_8(w_5\wedge 1_M))f_3\\ =&-(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{X\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(1_Y\wedge i)r)f'\\ &-\overline{\lambda}(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{X\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge u'(u\wedge 1_K))f'(1_X\wedge ij)\\ &+(\bar{c}_s\wedge 1_{X\wedge M})(1_{KG_s}\wedge u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(1_Y\wedge i)r)g\\ &-(\bar{c}_s\wedge 1_{X\wedge M})(1_{KG_s}\wedge u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K))g(1_X\wedge ij)\\ &+\overline{\lambda}(1_{E_{s+1}}\wedge u'(u\wedge 1_K))f_8(1_X\wedge i')\end{aligned}$$

其中我们用到 $u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)=\overline{\lambda}u'(u\wedge 1_K)$, 某个非零的 $\overline{\lambda}\in Z_p$. 更进一步, 由 (9.4.20), (9.4.6), $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_{L\wedge K})(\dot{1}_{E_{s+1}}\wedge u\wedge 1_K)f_8(1_X\wedge i')=$

$(1_{KG_{s+1}} \wedge (u \wedge 1_K)\mu_{X\wedge M})(g_0 \wedge 1_M) = (1_{KG_{s+1}} \wedge \overline{\mu}_2(1_Y \wedge i')\psi_{X\wedge M})(g_0 \wedge 1_M) = \lambda_1(1_{KG_{s+1}} \wedge \overline{\mu}_2(1_Y \wedge i')\psi_{X\wedge M})(h_0\sigma \wedge 1_{X\wedge M}) = \lambda_1(h_0\sigma \wedge 1_{L\wedge K})\overline{\mu}_2(1_Y \wedge i')\psi_{X\wedge M}$ (模 d_1 边缘). 因此 $[(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_{L\wedge K})(1_{E_{s+1}}\wedge u\wedge 1_K)f_8(1_X\wedge i')] = \lambda_1(\phi\wedge 1_K)_*(j''\wedge 1_K)_*[(\sigma\wedge 1_{L\wedge K})\overline{\mu}_2(1_Y\wedge i')\psi_{X\wedge M}] = \lambda_1(\phi\wedge 1_K)_*(j''\wedge 1_K)_*(\overline{\mu}_2(1_Y\wedge i'))_*(\psi_{X\wedge M})_*[\sigma\wedge 1_{X\wedge M}] = \lambda_1(\phi\wedge 1_K)_*(i')_*(m_M(\overline{u}\wedge 1_M))_*(\psi_{X\wedge M})_*[\sigma\wedge 1_{X\wedge M}] = \lambda_1((1_L\wedge i')(\phi\wedge 1_M))_*(m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)_*[\sigma\wedge 1_{X\wedge M}] = 0 \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq}(H^*L\wedge K, H^*X\wedge M)$. 即有 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_{L\wedge K})(1_{E_{s+1}}\wedge u\wedge 1_K)f_8(1_X\wedge i') = (\bar{b}_{s+1}\bar{c}_s\wedge 1_{L\wedge K})g_3$, 某个 $g_3 \in [\Sigma^{tq}X\wedge M, KG_s\wedge L\wedge K]\cap(\mathrm{ker}d)$ (参见命题 9.5.26), 从而有 $(1_{E_{s+1}}\wedge u\wedge 1_K)f_8(1_X\wedge i') = (\bar{c}_s\wedge 1_{L\wedge K})g_3 + (\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{L\wedge K})f_2'$, 某个 $f_2' \in [\Sigma^{tq+1}X\wedge M, E_{s+2}\wedge L\wedge K]\cap(\mathrm{ker}d)$ (参见命题 6.5.26). 因此, (9.4.26) 变为

(9.4.27)
$$\begin{aligned}
&(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{X\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge u_8(w_5\wedge 1_M))f_3\\
&= -(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{X\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(1_Y\wedge i)r))f'\\
&\quad -\overline{\lambda}(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{X\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge u'(u\wedge 1_K))f'(1_X\wedge ij)\\
&\quad +(\bar{c}_s\wedge 1_{X\wedge M})(1_{KG_s}\wedge u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(1_Y\wedge i)r))g\\
&\quad -(\bar{c}_s\wedge 1_{X\wedge M})(1_{KG_s}\wedge u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K))g(1_X\wedge ij)\\
&\quad +\overline{\lambda}(\bar{c}_s\wedge 1_{X\wedge M})(1_{KG_s}\wedge u')g_3 + \overline{\lambda}(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{X\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge u')f_2'
\end{aligned}$$

由 (9.4.27), $(1_{KG_s}\wedge u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(1_Y\wedge i)r)g - (1_{KG_s}\wedge u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)g(1_X\wedge ij) + \overline{\lambda}(1_{KG_s}\wedge u')g_3 \in [\Sigma^{tq}X\wedge M, KG_s\wedge X\wedge M]$ 是一个 d_1 循环, 它表示 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*X\wedge M, H^*X\wedge M) \cong Z_p\{[\sigma\wedge 1_{X\wedge M}]\}$ (参见引理 9.4.13) 中的元素. 因此我们有

(9.4.28)
$$\begin{aligned}
&(1_{KG_s}\wedge u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(1_Y\wedge i)r)g + \overline{\lambda}(1_{KG_s}\wedge u')g_3\\
&\quad -(1_{KG_s}\wedge u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K))g(1_X\wedge ij)\\
&= \bar{\lambda}_0(\sigma\wedge 1_{X\wedge M}) \quad (\text{模 } d_1 \text{ 边缘}).
\end{aligned}$$

下面我们分别对 $\bar{\lambda}_0 \neq 1$ 或 $\bar{\lambda}_0 = 1$ 这两种情况进行论证.

若 $\bar{\lambda}_0 \neq 1$, 则由 (9.4.27) 以及 $\bar{c}_s\cdot\sigma = \bar{a}_{s+1}\cdot\kappa$ 我们有

$$\begin{aligned}
(1_{E_{s+2}}\wedge u_8(w_5\wedge 1_M))f_3 = &-(1_{E_{s+2}}\wedge u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(1_Y\wedge i)r)f'\\
&-\bar{\lambda}(1_{E_{s+2}}\wedge u'(u\wedge 1_K))f'(1_X\wedge ij) + \bar{\lambda}(1_{E_{s+2}}\wedge u')f_2'\\
&+\bar{\lambda}_0(\kappa\wedge 1_{X\wedge M}) + (\bar{c}_{s+1}\wedge 1_{X\wedge M})g_4
\end{aligned}$$

其中 $g_4 \in [\Sigma^{tq+1}X\wedge M, KG_{s+1}\wedge X\wedge M]$. 再合成于 $(1_{E_{s+2}}\wedge 1_X\wedge\alpha) = (1_{E_{s+2}}\wedge \alpha_{X\wedge M}m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M))$ 即得出 $(1_{E_{s+2}}\wedge 1_X\wedge\alpha)(\kappa\wedge 1_{X\wedge M}) = (1_{E_{s+2}}\wedge\alpha_{X\wedge M}(j''u\wedge 1_M)(1_W\wedge m_M(\overline{u}\wedge 1_M))f_3 = (1_{E_{s+2}}\wedge\alpha_{X\wedge M}\cdot m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)u_8(w_5\wedge 1_M))f_3 = \bar{\lambda}_0(1_{E_{s+2}}\wedge 1_X\wedge\alpha)(\kappa\wedge 1_{X\wedge M})$, 从而步骤 1 的结论得证.

若 $\bar{\lambda}_0 = 1$, 则通过对 (9.4.28) 合成于 $(1_{KG_s}\wedge m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M))$, 并利用 (9.4.25) 可得 $(1_{KG_s}\wedge j'(j''u\wedge 1_K))g = (1_{KG_s}\wedge m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(1_Y\wedge i)r)g =$

$(\sigma\wedge 1_M)m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)$ (模 d_1 边缘). 更进一步, 通过对 (9.4.28) 合成于 $(1_{KG_s}\wedge j\widetilde{\psi}\wedge 1_M)$ 并且利用 (9.4.25) 可得

$$\begin{aligned}
&(1_{KG_s}\wedge j\widetilde{\psi}\wedge 1_M)(\sigma\wedge 1_{X\wedge M})\\
&=(1_{KG_s}\wedge(j\widetilde{\psi}\wedge 1_M)u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(1_Y\wedge i)r)g\\
&\quad-(1_{KG_s}\wedge(j\widetilde{\psi}\wedge 1_M)u_8(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K))g(1_X\wedge ij)\\
&\quad+\overline{\lambda}(1_{KG_s}\wedge(j\widetilde{\psi}\wedge 1_M)u')g_3\\
&=(1_{KG_s}\wedge ij(j'(j''\wedge 1_K)(u\wedge 1_K))g\\
&\quad-(1_{KG_s}\wedge j'(j''u\wedge 1_K))g(1_X\wedge ij)+\overline{\lambda}(1_{KG_s}\wedge j'(j''\wedge 1_K))g_3 \quad \text{由 (9.4.25)}\\
&=(1_{KG_s}\wedge ij)(\sigma\wedge 1_M)m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)-(\sigma\wedge 1_M)m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)(1_X\wedge ij)\\
&\quad+\overline{\lambda}(1_{KG_s}\wedge j'(j''\wedge 1_K))g_3\\
&=(1_{KG_s}\wedge j\widetilde{\psi}\wedge 1_M)(\sigma\wedge 1_{X\wedge M})+\overline{\lambda}(1_{KG_s}\wedge j'(j''\wedge 1_K))g_3 \quad \text{由 (9.4.6)}
\end{aligned}$$

(模 d_1 边缘), 因此 $(1_{KG_s}\wedge j'(j''\wedge 1_K))g_3=0$, 从而有 $g_3=(1_{KG_s}\wedge\overline{\mu}_2(1_Y\wedge i'))g_5$ (模 d_1 边缘) , 某个 $g_5\in[\Sigma^{tq+q+1}X\wedge M, KG_s\wedge Y\wedge M]$. 因此, 由 (9.4.6), (9.4.20), $(1_{KG_{s+1}}\wedge\overline{\mu}_2(1_Y\wedge i')\psi_{X\wedge M})(g_0\wedge 1_M)=(1_{KG_{s+1}}\wedge(u\wedge 1_K)\mu_{X\wedge M})(g_0\wedge 1_M)=(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_{L\wedge K})(1_{E_{s+1}}\wedge u\wedge 1_K)f_8(1_X\wedge i')=(\bar{b}_{s+1}\bar{c}_s\wedge 1_{L\wedge K})g_3=(\bar{b}_{s+1}\bar{c}_s\wedge 1_{L\wedge K})(1_{KG_s}\wedge\overline{\mu}_2(1_Y\wedge i'))g_5$, 从而 $(1_{KG_{s+1}}\wedge\psi_{X\wedge M})(g_0\wedge 1_M)=(\bar{b}_{s+1}\bar{c}_s\wedge 1_{Y\wedge M})g_5$, 这证明了 $\lambda_1(\psi_{X\wedge M})_*[h_0\sigma\wedge 1_{X\wedge M}]=(\psi_{X\wedge M})_*[g_0\wedge 1_M]=0\in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+1}(H^*Y\wedge M, H^*X\wedge M)$, 从而由引理 9.4.13(2) 得出 $\lambda_1=0$. 因此 $[g_0\wedge 1_M]=0$, 从而 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_{W\wedge K})f_8(1_X\wedge i')=(\bar{b}_{s+1}\bar{c}_s\wedge 1_{W\wedge K})g_6$, 某个 $g_6\in[\Sigma^{tq+q}X\wedge M, KG_s\wedge W\wedge K]$ 并且 $f_8(1_X\wedge i')=(\bar{c}_s\wedge 1_{W\wedge K})g_6+(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{W\wedge K})f_3'$, 某个 $f_3'\in[\Sigma^{tq+q+1}X\wedge M, E_{s+2}\wedge W\wedge K]$. 因此, 通过对 (9.4.17) 合成于 $(1_{E_{s+1}}\wedge w_5\wedge 1_M)$ 得出

$$\begin{aligned}
&-(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{P\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge w_5\wedge 1_M)f_3\\
&=(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{P\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(1_Y\wedge i)r)f'\\
&\quad+(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{P\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)f'(1_X\wedge ij)\\
&\quad+(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{P\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)f_3'+(\bar{c}_s\wedge 1_{P\wedge M})g_7
\end{aligned}$$

其中 d_1 循环 $g_7=(1_{KG_s}\wedge(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(1_Y\wedge i)r)g-(1_{KG_s}\wedge(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)g(1_X\wedge ij)+(1_{KG_s}\wedge(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)g_6\in[\Sigma^{tq+q+1}X\wedge M, KG_s\wedge P\wedge M]$. 而它表示 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q+1}(H^*P\wedge M, H^*X\wedge M)$ 中的元素. 可是, 这个群为零, 这可由以下由 (9.4.23) 导出的恰当序列看出:

$$\begin{aligned}
&0=\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q}(H^*W\wedge K, H^*X\wedge M)\xrightarrow{(w_5\wedge 1_M)(1_W\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K)_*}\\
&\quad\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q+1}(H^*P\wedge M, H^*X\wedge M)\xrightarrow{(u_7)_*}\\
&\quad\mathrm{Ext}_A^{s,tq-2q}(H^*M, H^*X\wedge M)\xrightarrow{((1_W\wedge i')(\phi_W\wedge M))_*},
\end{aligned}$$

其中左边的群由命题 9.4.11(4) 为零而右边的群由命题 9.4.11(1) 有唯一生成元 $m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)^*(\tilde{\sigma})$, 但它满足 $((1_W\wedge i')(\phi_W\wedge 1_M))_*m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)^*(\tilde{\sigma})\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*W\wedge$

$K, H^*X \wedge M)$.

因此, $(\bar{c}_s \wedge 1_{P\wedge M})g_7 = 0$, 从而 $-(1_{E_{s+2}} \wedge w_5 \wedge 1_M)f_3 = (1_{E_{s+2}} \wedge (w_5 \wedge 1_M)u_8(1_W \wedge (1_Y \wedge i)r)f' - (1_{E_{s+2}} \wedge (w_5 \wedge 1_M)(1_W \wedge (r \wedge 1_M)\overline{m}_K)f'(1_X \wedge ij) + (1_{E_{s+2}} \wedge (w_5 \wedge 1_M)(1_W \wedge (r \wedge 1_M)\overline{m}_K))f_3' + (\bar{c}_{s+1} \wedge 1_{P\wedge M})g_8$, 某个 $g_8 \in [\Sigma^{tq+q+2}X \wedge M, KG_{s+1} \wedge P \wedge M]$. 再合成于 $(1_{E_{s+2}} \wedge \alpha_{X\wedge M} \cdot u_7)$, 我们得出 $(1_{E_{s+2}} \wedge 1_X \wedge \alpha)(\kappa \wedge 1_{X\wedge M}) = (1_{E_{s+2}} \wedge \alpha_{X\wedge M}(j''u \wedge 1_M)(1_W \wedge m_M(\overline{u} \wedge 1_M))f_3 = (1_{E_{s+2}} \wedge \alpha_{X\wedge M} \cdot u_7(w_5 \wedge 1_M))f_3 = 0$. 这证明了步骤 1 的结果.

步骤 2 证明 $(\bar{c}_{s+1} \wedge 1_M)\widetilde{h_0\sigma} = (\kappa \wedge 1_M)\alpha = 0$.

由 (9.4.3), (9.4.4), $\mu_{X\wedge M}(1_X \wedge \alpha i) = \mu_{X\wedge M}\alpha_{X\wedge M}\widetilde{\psi} = 0$, 从而由 (9.1.15) $\mu_{X\wedge M} = \mu_{X\wedge K'}(1_X \wedge v)$, 其中 $\mu_{X\wedge K'} \in [X \wedge K', W \wedge K]$. 我们推断 $X \wedge K'$ 分裂成为 $W \wedge K \vee \Sigma^q Y$, 即存在分裂的上纤维序列 $\Sigma^q Y \to X \wedge K' \to W \wedge K$, 这可由以下 3×3 引理的同伦可换图形并利用 $(1_Y \wedge j)\alpha_{Y\wedge M}j' = r(1_K \wedge \alpha_1)$ 看出:

$$\begin{array}{ccccc}
X \wedge M & \xrightarrow{\mu_{X\wedge M}} & W \wedge K & \xrightarrow{0} & \Sigma^{q+1}Y \\
\searrow 1_X \wedge v & \nearrow \mu_{X\wedge K'} & \searrow^{j'(j''u\wedge 1_K)} & \nearrow_{(1_Y\wedge j)\alpha_{Y\wedge M}} & \\
X \wedge K' & & \Sigma^{3q+1}M & & \\
\nearrow \widetilde{\tau}_{X\wedge K'} & \searrow 1_X \wedge & \nearrow \widetilde{\psi} & \searrow \alpha_{X\wedge M} & \\
\Sigma^q Y & \xrightarrow{\tilde{u}w_2} & \Sigma^{q+1}X & \xrightarrow{1_X\wedge\alpha i} & \Sigma X \wedge M
\end{array}$$

因此, 存在分裂的上纤维序列 $\Sigma^q Y \xrightarrow{\tau_{X\wedge K'}} X \wedge K' \xrightarrow{\mu_{X\wedge K'}} W \wedge K$, 从而存在 $\nu_{X\wedge K'}: X \wedge K' \to \Sigma^q Y$ 以及 $\widetilde{\nu}_{X\wedge K'}: W \wedge K \to X \wedge K'$ 使得 $\nu_{X\wedge K'} \cdot \tau_{X\wedge K'} = 1_Y$, $\mu_{X\wedge K'} \cdot \widetilde{\nu}_{X\wedge K'} = 1_{W\wedge K}$, $\widetilde{\tau}_{X\wedge K'} \cdot \nu_{X\wedge K'} + \widetilde{\nu}_{X\wedge K'} \cdot \mu_{X\wedge K'} = 1_{X\wedge K'}$.

由步骤 1 的结果可得 $(\kappa \wedge 1_{M\wedge X\wedge K'})(\alpha \wedge 1_{X\wedge K'}) = 0$, 因此 $(\kappa \wedge 1_{M\wedge Y})(\alpha \wedge 1_Y) = (1_{E_{s+2}} \wedge 1_M \wedge \nu_{X\wedge K'})(\kappa \wedge 1_{M\wedge X\wedge K'})(\alpha \wedge 1_{X\wedge K'})(1_M \wedge \tau_{X\wedge K'}) = 0$. 再利用 (9.1.32) 中的分裂性可得 $(\bar{c}_{s+1} \wedge 1_M)\widetilde{h_0\sigma} = (\kappa \wedge 1_M)\alpha = (1_{E_{s+2}} \wedge 1_M \wedge \widetilde{\nu})(\kappa \wedge 1_{M\wedge Y\wedge K'})(\alpha \wedge 1_{Y\wedge K'})(1_M \wedge \widetilde{\tau}) = 0$, 这证明了主要定理 C. 证毕.

注 在以上主要定理 C 的证明中, 我们只用假设 (II) 用来输入 $(1_{E_{s+2}} \wedge \phi \wedge 1_M)(\kappa \wedge 1_M)m_M(\widetilde{\psi} \wedge 1_M) = 0$. 因此, 主要定理 C 的几何假设 (II) 可以弱化为假设 $m_M(\widetilde{\psi} \wedge 1_M)^*(\phi \wedge 1_M)_*(\tilde{\sigma}) \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq}(H^*L \wedge M, H^*X \wedge M)$ 在 Adams 谱序列中是一个永久循环.

利用本节一些新的上纤维序列的知识, 我们还可以给出定理 9.3.9(从而也是主要定理 B) 的另一个证明. 我们先作一些准备工作.

因为 $\alpha'\alpha' i' = 0$, 因此由 (9.1.23), 存在 $\alpha''_{Y\wedge M} \in [\Sigma^{q-2}Y \wedge M, K]$ 使得 $\alpha''_{Y\wedge M}(r \wedge 1_M)\overline{m}_K = \alpha'$. 作用于导数算子 d, $d(\alpha''_{Y\wedge M})(r \wedge 1_M)\overline{m}_K = -d(\alpha') = 0$ 从而 $d(\alpha''_{Y\wedge M}) \in (m_M(\overline{u} \wedge 1_M))^*[\Sigma^{2q}M, K] = 0$. $\alpha_{Y\wedge M}(1_Y \wedge i)r \in [\Sigma^{q-2}K, K] \cong Z_p\{\alpha''\}$, 从而 $\alpha''_{Y\wedge M}(1_Y \wedge i)r = \lambda\alpha''$, 某个 $\lambda \in Z_p$. 注意到 $d((1_Y \wedge i)r) = (r \wedge 1_M)d(1_K \wedge i) = (r \wedge 1_M)\overline{m}_K$, 因此作用于导数算子得出 $\alpha' = \alpha''_{Y\wedge M}(r \wedge M)\overline{m}_K = \lambda d(\alpha'') = -\lambda\alpha'$

从而 $\lambda=-1$. 由 (9.1.8), $\bar{h}i''=\overline{w}$, $ri'=\overline{w}\cdot j$(相差正负号), 因此 $(r\wedge 1_M)\overline{m}_Ki'=-(ri'\wedge 1_M)\overline{m}_M=\pm(\overline{w}\wedge 1_M)=\pm(\bar{h}i''\wedge 1_M)$, 从而 $\alpha''_{Y\wedge M}(\bar{h}i''\wedge 1_M)=\lambda_0\alpha''_{Y\wedge M}(r\wedge 1_M)\overline{m}_Ki'=\lambda_0\alpha'i'=\lambda_0 i'((\alpha_1)_Li''\wedge 1_M)$ 而得出 $\alpha''_{Y\wedge M}(\bar{h}\wedge 1_M)=\lambda_0 i'((\alpha_1)_L\wedge 1_M)$, 其中 $\lambda_0=\pm 1$. 另一方面, $i'((\alpha_1)_L\wedge 1_M)(1_L\wedge j')(i''\wedge 1_K)=i'(\alpha_1\wedge 1_M)j'=i'(ij\alpha-\alpha ij)j'=0$, 因此 $i'((\alpha_1)_L\wedge 1_M)(1_L\wedge j')=\lambda'\alpha''(j''\wedge 1_K)$, 某个 $\lambda'\in Z_p$. 合成于定理 6.5.18 中的 $\widetilde{\Delta}$ 可得出 $\lambda'\alpha'i'ijj'=\lambda'\alpha''i'j'=\lambda'\alpha''(j''\wedge 1_K)\widetilde{\Delta}=i'((\alpha_1)_L\wedge 1_M)(1_L\wedge j')\widetilde{\Delta}=-i'((\alpha_1)_Li''\wedge 1_M)ijj'=-\alpha'i'ijj'$ 从而 $\lambda'=-1$. 总之, 存在 $\alpha''_{Y\wedge M}\in[\Sigma^{q-2}Y\wedge M,K]$ 使得

$$\begin{aligned}&\alpha''_{Y\wedge M}(r\wedge 1_M)\overline{m}_K=\alpha', \qquad \alpha''_{Y\wedge M}(1_Y\wedge i)r=-\alpha'',\\ \textbf{(9.4.29)}\qquad &d(\alpha''_{Y\wedge M})=0, \qquad \alpha''_{Y\wedge M}(\bar{h}\wedge 1_M)=\lambda_0 i'((\alpha_1)_L\wedge 1_M),\\ &i'((\alpha_1)_L\wedge 1_M)(1_L\wedge j')=-\alpha''(j''\wedge 1_K)\end{aligned}$$

其中 $\lambda_0=\pm 1$.

注意到 $\alpha''_{Y\wedge M}:\Sigma^{q-2}Y\wedge M\to K$ 的上纤维是 $X\wedge M$, 由以下上纤维序列

$$\textbf{(9.4.30)}\qquad \Sigma^{q-2}Y\wedge M\xrightarrow{\alpha''_{Y\wedge M}}K\xrightarrow{u'(i''\wedge 1_K)}X\wedge M\xrightarrow{\psi_{X\wedge M}}\Sigma^{q-1}Y\wedge M$$

所给出, 并且以上的映射 $\psi_{X\wedge M}\in[X\wedge M,\Sigma^{q-1}Y\wedge M]$ 和 $u'\in[L\wedge K,X\wedge M]$ 恰好是 (9.4.2) 和 (9.4.6) 中的映射. 这可由 (9.4.6) 中 $m_M(\overline{u}\wedge 1_M)\psi_{X\wedge M}=m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)$,(9.4.2) 和以下 3×3 引理的同伦可换图形得出

$$\textbf{(9.4.31)}\qquad \begin{array}{ccccccccc} X\wedge M & & \xrightarrow{m_M(\tilde{\psi}\wedge 1_M)} & & \Sigma^{2q}M & & \xrightarrow{\alpha'i'} & & \Sigma^{q+1}K \\ & \searrow\psi_{X\wedge M} & & \nearrow^{m_M(\overline{u}\wedge 1_M)} & & \searrow^{(\phi\wedge 1_K)i'} & & \nearrow j''\wedge 1_K & & \searrow^{(r\wedge 1_M)\overline{m}_K} \\ & & \Sigma^{q-1}Y\wedge M & & & & \Sigma L\wedge K & & & & \Sigma^qY\wedge M \\ & \nearrow^{(r\wedge 1_M)\overline{m}_K} & & \searrow^{\alpha''_{Y\wedge M}} & & \nearrow i''\wedge 1_K & & \searrow u' & & \nearrow\psi_{X\wedge M} \\ \Sigma qK & & \xrightarrow{\alpha'} & & \Sigma K & & \xrightarrow{u'(i''\wedge 1_K)} & & \Sigma X\wedge M \end{array}$$

并且由此有以下关系式

$$\textbf{(9.4.32)}\qquad \psi_{X\wedge M}u'=(r\wedge 1_M)\overline{m}_K(j''\wedge 1_K).$$

命题 9.4.33 设 $p\geqslant 5$ 而 V 为任意谱, 则对任意映射 $f\in[\Sigma^*K,V\wedge K]$ 有 $(1_V\wedge\alpha')d(f)=d(f)\alpha'=0$.

证 由 (6.5.12), $\alpha\wedge 1_K=\overline{m}'_K\alpha'm'_K$, 其中 $m'_K=m_KT:M\wedge K\to K$, $\overline{m}'_K=T\overline{m}_K:\Sigma K\to M\wedge K$. $d(f)\alpha'm'_K=(1_V\wedge m'_K)(T'\wedge 1_K)(1_M\wedge f)\overline{m}'_K\alpha'm'_K=(1_V\wedge m'_K)(T'\wedge 1_K)(1_M\wedge f)(\alpha\wedge 1_K)=(1_V\wedge m'_K)(T'\wedge 1_K)(\alpha\wedge 1_V\wedge 1_K)(1_M\wedge f)=(1_V\wedge m'_K(\alpha\wedge 1_K))(T'\wedge 1_K)(1_M\wedge f)=0$, 其中 $T':M\wedge V\to V\wedge M$ 为交换映射. 证毕.

命题 9.4.34 在主要定理 B 的假设 (I) 之下我们有

(1) $\mathrm{Ext}_A^{s,tq-1}(H^*K,H^*K)=0$.

(2) $\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*Y\wedge M,H^*K)$ 有唯一生成元 $(1_Y\wedge i)_*r_*[\sigma\wedge 1_K]$.

证 (1) 考查以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q}(H^*M,H^*M)\xrightarrow{(i')_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q}(H^*K,H^*M)$$
$$\xrightarrow{(j')_*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq-1}(H^*M,H^*M)\xrightarrow{\alpha_*}$$

由假设 (I), 右边的群有唯一生成元 $j^*i_*(\sigma)$ 使满足 $\alpha_*j^*i_*(\sigma)=(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma})\neq 0$. 因此 $\mathrm{im}\,(j')_*=0$. 由假设 (I), 左边的群为零或有两个生成元 $(ij)_*\alpha_*(\tilde{\tau}'),(ij)^*\alpha_*(\tilde{\tau}')$ (这类似于命题 9.3.1(2) 的得出), 因此 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q}(H^*K,H^*M)=(i')_*\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q}(H^*M,H^*M)$ 为零或有唯一生成元 $(i')_*(\alpha_1\wedge 1_M)_*(\tilde{\tau}')$. 再考查以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s,tq+q}(H^*K,H^*M)\xrightarrow{(j')^*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq-1}(H^*K,H^*K)$$
$$\xrightarrow{(i')^*}\mathrm{Ext}_A^{s,tq-1}(H^*K,H^*M)\xrightarrow{\alpha^*}$$

由假设 (I), 右边的群有唯一生成元 $j^*(i'i)_*(\sigma)$ 使满足 $\alpha^*j^*(i'i)_*(\sigma)=(i')_*(ij)_*\alpha_*(\tilde{\sigma})\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*K,H^*M)$ 从而 $\mathrm{im}\,(i')^*=0$. 左边的群为零或有唯一生成元 $(i')_*(\alpha_1\wedge 1_M)_*(\tilde{\tau}')$ 从而 $\mathrm{im}\,(j')^*=0$ 使得中间的群如所求的为零.

(2) 对任意 $g\in\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*Y\wedge M,H^*K)$,$m_M(\overline{u}\wedge 1_M))_*(g)\in\mathrm{Ext}_A^{s,tq-q-1}(H^*M,H^*K)\cong Z_p\{(j')^*(\tilde{\sigma})\}$, 这可由命题 9.3.0(2) 中的 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*M,H^*M)\cong Z_p\{\tilde{\sigma}\}$ 以及 $\mathrm{Ext}_A^{s,tq-q-1}(H^*M,H^*M)=0$ 得出, 而后者是由假设 (I)$\mathrm{Ext}_A^{s,tq-q+u}(Z_p,Z_p)=0$(当 $u=0,-1,1$) 所得出. 因此 $(m_M(\overline{u}\wedge 1_M))_*(g)=\lambda'(j')^*[\sigma\wedge 1_M]=\lambda'[(\sigma\wedge 1_M)j']=\lambda'[(1_{KG_s}\wedge j')(\sigma\wedge 1_K)]=\lambda'(j')_*[\sigma\wedge 1_K]=\lambda'(m_M(\overline{u}\wedge 1_M))_*(1_Y\wedge i)_*r_*[\sigma\wedge 1_K]$ 从而 $g=\lambda'(1_Y\wedge i)_*r_*[\sigma\wedge 1_K]$ (某个 $\lambda'\in Z_p$) 模 $((r\wedge 1_M)\overline{m}_K)_*\mathrm{Ext}_A^{s,tq-1}(H^*K,H^*K)=0$. 证毕.

定理 9.3.9 的另证　由主要定理 B 的假设 (II) 可得 $(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha')(\kappa\wedge 1_K)=(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_K)(h_0\sigma\wedge 1_K)=0$, 因此 $(\kappa\wedge 1_K)=(1_{E_{s+2}}\wedge j''\wedge 1_K)f$ 并且有 $d((1_{E_{s+2}}\wedge j''\wedge 1_K)f)=0$. 即我们有

(9.4.35)　$$\kappa\wedge 1_K=(1_{E_{s+2}}\wedge j''\wedge 1_K)f\qquad d(f)=(1_{E_{s+2}}\wedge i''\wedge 1_K)f'$$

某个 $f\in[\Sigma^{tq+q+1}K,E_{s+2}\wedge L\wedge K]$, $f'\in[\Sigma^{tq+q+2}K,E_{s+2}\wedge K]$.

由 (9.4.29)(9.4.35),$(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha''_{Y\wedge M}(\bar{h}\wedge 1_M)(1_L\wedge j'))f=\lambda_0(1_{E_{s+2}}\wedge i'((\alpha_1)_L\wedge 1_M)(1_L\wedge j'))f=-\lambda_0(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha''(j''\wedge 1_K))f=-\lambda_0(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha'')(\kappa\wedge 1_K)$, 其中 $\lambda_0=\pm 1$. 即我们有

(9.4.36)　$$(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha''_{Y\wedge M}(\bar{h}\wedge 1_M)(1_L\wedge j'))f=-\lambda_0(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha'')(\kappa\wedge 1_K)$$

其中 $\lambda_0=\pm 1$

随之有 $(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_K)(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha''_{Y\wedge M}(\bar{h}\wedge 1_M)(1_L\wedge j'))f=-\lambda_0(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_K)(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha'')(\kappa\wedge 1_K)=-\lambda_0(\bar{c}_s\wedge 1_K)(1_{KG_s}\wedge\alpha'')(\sigma\wedge 1_K)=0$, 由 α'' 导出 Z_p 上同调群的零同态所得出. 因此, 由 (9.4.30),$(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{Y\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge(\bar{h}\wedge 1_M)(1_L\wedge j'))f=(1_{E_{s+1}}\wedge\psi_{X\wedge M})f_2$, 某个 $f_2\in[\Sigma^{tq+q-1}K,E_{s+1}\wedge X\wedge M]$. 随之有 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_{Y\wedge M})(1_{E_{s+1}}\wedge$

$\psi_{X\wedge M})f_2=0$ 从而由 (9.4.30) 得出 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_{X\wedge M})f_2=(1_{KG_{s+1}}\wedge u'(i''\wedge 1_K))g$, 某个 d_1 循环 $g\in[\Sigma^{tq+q-1}K,KG_{s+1}\wedge K]$, 而这个 d_1 循环表示 $\mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q-1}(H^*K,H^*K)\cong Z_p\{(h_0\sigma)''\}$ 中的元素. 因此 $[g]=\lambda'(h_0\sigma)''=\lambda'(\alpha'')_*[\sigma\wedge 1_K]$, 某个 $\lambda'\in Z_p$ 从而

$$\begin{aligned}&[(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_{X\wedge M})f_2]=(u'(i''\wedge 1_K))_*[g]=\lambda'(u'(i''\wedge 1_K))_*(\alpha'')_*[\sigma\wedge 1_K]\\&=\lambda'(u'(i''\wedge 1_K))_*(\alpha''_{Y\wedge M})_*((1_Y\wedge i)r)_*[\sigma\wedge 1_K]=0\end{aligned}$$

因此 $(\bar{b}_{s+1}\wedge 1_{X\wedge M})f_2=(\bar{b}_{s+1}\bar{c}_s\wedge 1_{X\wedge M})g_2$, 某个 $g_2\in[\Sigma^{tq+q-1}K,KG_s\wedge X\wedge M]$ 从而 $f_2=(\bar{c}_s\wedge 1_{X\wedge M})g_2+(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{X\wedge M})f_3$, 某个 $f_3\in[\Sigma^{tq+q-1}K,E_{s+2}\wedge X\wedge M]$ 并且得出

$$\begin{aligned}&(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{Y\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge(\bar{h}\wedge 1_M)(1_L\wedge j'))f\\&=(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{Y\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge\psi_{X\wedge M})f_3+(\bar{c}_s\wedge 1_{Y\wedge M})(1_{KG_s}\wedge\psi_{X\wedge M})g_2\\&=(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{Y\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge\psi_{X\wedge M})f_3+\lambda(\bar{c}_s\wedge 1_{Y\wedge M})(1_{KG_s}\wedge(1_Y\wedge i)r)(\sigma\wedge 1_K)\\&=(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{Y\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge\psi_{X\wedge M})f_3\\&\quad+\lambda(\bar{a}_{s+1}\wedge 1_{Y\wedge M})(1_{E_{s+2}}\wedge(1_Y\wedge i)r)(\kappa\wedge 1_K)\end{aligned}$$

某个 $\lambda\in Z_p$, 其中 d_1 循环 $(1_{KG_s}\wedge\psi_{X\wedge M})g_2\in[\Sigma^{tq}K,KG_s\wedge Y\wedge M]$ 表示元素 $\lambda((1_Y\wedge i)r)_*[\sigma\wedge 1_K]\in\mathrm{Ext}_A^{s,tq}(H^*Y\wedge M,H^*K)$ (参见命题 9.4.34(2)) 从而它等于 $\lambda(1_{KG_s}\wedge(1_Y\wedge i)r)(\sigma\wedge 1_K)$ (模 d_1 边缘). 因此有 $(1_{E_{s+2}}\wedge(\bar{h}\wedge 1_M)(1_L\wedge j'))f=(1_{E_{s+2}}\wedge\psi_{X\wedge M})f_3+\lambda(1_{E_{s+2}}\wedge(1_Y\wedge i)r)(\kappa\wedge 1_K)+(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_{Y\wedge M})g_3$, 某个 $g_3\in[\Sigma^{tq+1}K,KG_{s+1}\wedge Y\wedge M]$. 再合成于 $1_{E_{s+2}}\wedge 1_Y\wedge\alpha$ 并利用 (9.4.8) 可得出 $(1_{E_{s+2}}\wedge\omega\wedge 1_M)f_3=(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha_{Y\wedge M}m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M))f_3=(1_{E_{s+2}}\wedge(1_Y\wedge\alpha)\psi_{X\wedge M})f_3=-\lambda(1_{E_{s+2}}\wedge(1_Y\wedge\alpha i)r)(\kappa\wedge 1_K)=-\lambda(1_{E_{s+2}}\wedge(r\wedge 1_M)\overline{m}_K\alpha')(\kappa\wedge 1_K)=0$ 从而由 (9.4.7) 得出 $f_3=(1_{E_{s+2}}\wedge(1_x\wedge j)u'\wedge 1_M)f_4$, 某个 $f_4\in[\Sigma^{tq+q+1}K,E_{s+2}\wedge L\wedge K\wedge M]$. 即我们有

(9.4.37)
$$\begin{aligned}&(1_{E_{s+2}}\wedge(\bar{h}\wedge 1_M)(1_L\wedge j'))f=(1_{E_{s+2}}\wedge\psi_{X\wedge M}((1_X\wedge j)u'\wedge 1_M))f_4\\&\quad+\lambda(1_{E_{s+2}}\wedge(1_Y\wedge i)r)(\kappa\wedge 1_K)+(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_{Y\wedge M})g_3\\&=(1_{E_{s+2}}\wedge\psi_{X\wedge M}u')f_5+(1_{E_{s+2}}\wedge\psi_{X\wedge M}(1_X\wedge ij)u'(1_L\wedge m_K))f_4\\&\quad+\lambda(1_{E_{s+2}}\wedge(1_Y\wedge i)r)(\kappa\wedge 1_K)+(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_{Y\wedge M})g_3\end{aligned}$$

其中我们用到了 $f_4=(1_{E_{s+2}}\wedge(1_L\wedge\overline{m}_K)(1_{L\wedge K}\wedge j))f_4+(1_{E_{s+2}}\wedge(1_{L\wedge K}\wedge i)(1_L\wedge m_K))f_4$ 并且记 $(1_{E_{s+2}}\wedge 1_{L\wedge K}\wedge j)f_4=f_5$.

将 (9.4.37) 合成于 $1_{E_{s+2}}\wedge\alpha''_{Y\wedge M}$ 并且利用 (9.4.36)(9.4.30) 可得出 $-\lambda_0(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha'')(\kappa\wedge 1_K)=(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha''_{Y\wedge M}(\bar{h}\wedge 1_M)(1_L\wedge j'))f=\lambda(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha''_{Y\wedge M}(1_Y\wedge i)r)(\kappa\wedge 1_K)=-\lambda(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha'')(\kappa\wedge 1_K)$. 如果 $\lambda\neq\lambda_0$, 则得出 $(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha'')(\kappa\wedge 1_K)=0$ 从而定理得证. 因此, 下面我们假设 $\lambda=\lambda_0$.

由 (9.1.8), 我们有 $\overline{u}\bar{h}=i\cdot j''$ 从而 $m_M(\overline{u}\wedge 1_M)(\bar{h}\wedge 1_M)=j''\wedge 1_M$(相差正负号). 因此, 可能发生的是或者 $m_M(\overline{u}\wedge 1_M)(\bar{h}\wedge 1_M)=\lambda_0(j''\wedge 1_M)$ 或者 $m_M(\overline{u}\wedge 1_M)(\bar{h}\wedge 1_M)=-\lambda_0(j''\wedge 1_M)$. 下面对这两个可能的情形分别讨论.

情况 1　　$m_M(\overline{u}\wedge 1_M)(\bar{h}\wedge 1_M)=\lambda_0(j''\wedge 1_M)$.

这个情况下, 将 (9.4.37) 合成于 $1_{E_{s+2}}\wedge m_M(\overline{u}\wedge 1_M)$, 得出

(9.4.38)
$$\lambda_0(1_{E_{s+2}}\wedge j')(\kappa\wedge 1_K)=\lambda_0(1_{E_{s+2}}\wedge j'(j''\wedge 1_K))f$$
$$=\lambda_0(1_{E_{s+2}}\wedge (j''\wedge 1_M)(1_L\wedge j'))f=(1_{E_{s+2}}\wedge m_M(\overline{u}\wedge 1_M)(\bar{h}\wedge 1_M)(1_L\wedge j'))f$$
$$=(1_{E_{s+2}}\wedge m_M(\overline{u}\wedge 1_M)\psi_{X\wedge M}(1_X\wedge ij)u'(1_L\wedge m_K))f_4$$
$$+\lambda_0(1_{E_{s+2}}\wedge j')(\kappa\wedge 1_K)+(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_M)(1_{KG_{s+1}}\wedge m_M(\overline{u}\wedge 1_M))g_3$$
$$=-(1_{E_{s+2}}\wedge j'(j''\wedge 1_K)(1_L\wedge m_K))f_4$$
$$+\lambda_0(1_{E_{s+2}}\wedge j')(\kappa\wedge 1_K)+(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_M)(1_{KG_{s+1}}\wedge m_M(\overline{u}\wedge 1_M))g_3$$

从而得出 $(1_{E_{s+2}}\wedge j'(j''\wedge 1_K)(1_L\wedge m_K))f_4=(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_M)(1_{KG_{s+1}}\wedge m_M(\overline{u}\wedge 1_M))g_3$, 其中我们用到了 $m_M(\overline{u}\wedge 1_M)\psi_{X\wedge M}(1_X\wedge ij)u'=m_M(\widetilde{\psi}\wedge 1_M)(1_X\wedge ij)u'=-(j\widetilde{\psi}\wedge 1_M)u'=-j'(j''\wedge 1_K)$, 由 (9.4.6) 和 (9.4.1) 的最右边的方块图所得出. 更进一步, 对 (9.4.37) 作用于导数算子 d, 则得出

(9.4.39)
$$(1_{E_{s+2}}\wedge (\bar{h}\wedge 1_M)(1_L\wedge j')(i''\wedge 1_K))f'=(1_{E_{s+2}}\wedge \psi_{X\wedge M}u')d(f_5)$$
$$+(1_{E_{s+2}}\wedge \psi_{X\wedge M}(1_X\wedge ij)u')d((1_{E_{s+2}}\wedge 1_L\wedge m_K)f_4)$$
$$+(1_{E_{s+2}}\wedge \psi_{X\wedge M}u'(1_L\wedge m_K))f_4-\lambda_0(1_{E_{s+2}}\wedge (r\wedge 1_M)\overline{m}_K)(\kappa\wedge 1_K)$$
$$+(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_{Y\wedge M})d(g_3)$$

由 (9.4.32) 我们有 $\psi_{X\wedge M}u'=(r\wedge 1_M)\overline{m}_K(j''\wedge 1_K)$ 从而 $(j\overline{u}\wedge 1_M)\psi_{X\wedge M}u'=j'(j''\wedge 1_K)$. 因此, 将 (9.4.39) 合成于 $1_{E_{s+2}}\wedge\phi\cdot j\overline{u}\wedge 1_M$ 可得出

(9.4.40)
$$\lambda_0(1_{E_{s+2}}\wedge(\phi\wedge 1_M)j')(\kappa\wedge 1_K)=(1_{E_{s+2}}\wedge(\phi\wedge 1_M)j'(j''\wedge 1_K))d(f_5)$$
$$+(1_{E_{s+2}}\wedge (\phi\wedge 1_M)ijj'(j''\wedge 1_K))d((1_{E_{s+2}}\wedge 1_L\wedge m_K)f_4)=0$$

这里用到了 $(1_{E_{s+2}}\wedge(\phi\cdot j\overline{u}\wedge 1_M)\psi_{X\wedge M}u'(1_L\wedge m_K))f_4=(1_{E_{s+2}}\wedge j'(j''\wedge 1_K)(1_L\wedge m_K))f_4=(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_{L\wedge M})(1_{KG_{s+1}}\wedge(\phi\wedge 1_M)m_M(\overline{u}\wedge 1_M))g_3=0$ 以及由 $1_L\wedge\alpha_1=\phi\cdot j''$(相差非零系数) 得出 $(1_{E_{s+2}}\wedge(\phi\wedge 1_M)j'(j''\wedge 1_K))d(f_5)=(1_{E_{s+2}}\wedge(1_L\wedge j'\alpha'))d(f_5)=0$ (参见命题 9.4.33) 从而 (9.4.40) 右式的第一项为零. (9.4.40) 右式第二项以相同理由为零.

由 (9.4.40) 随之有 $(1_{E_{s+2}}\wedge\phi\wedge 1_K)(\kappa\wedge 1_K)=(1_{E_{s+2}}\wedge(1_L\wedge\mu(i'i\wedge 1_K))(\phi\wedge 1_K)(\kappa\wedge 1_K)(jj'\wedge 1_K)\nu=0$ 从而得出 $(1_{E_{s+2}}\wedge\alpha'')(\kappa\wedge 1_K)=(1_{E_{s+2}}\wedge\overline{\Delta}(\phi\wedge 1_K))(\kappa\wedge 1_K)=0$ 而定理得证.

情况 2　　$m_M(\overline{u}\wedge 1_M)(\bar{h}\wedge 1_M)=-\lambda_0(j''\wedge 1_M)$.

这个情况下,(9.4.38) 左式改变正负号, 从而得出 $-(1_{E_{s+2}}\wedge j'(j''\wedge 1_K)(1_L\wedge m_K))f_4+(\bar{c}_{s+1}\wedge 1_M)(1_{KG_{s+1}}\wedge m_M(\overline{u}\wedge 1_M))g_3=-2\lambda_0(1_{E_{s+2}}\wedge j')(\kappa\wedge 1_K)$ 而将 $1_{E_{s+2}}\wedge\phi\cdot j\overline{u}\wedge 1_M$ 合成于 (9.4.39) 就得出

$$(\lambda_0-2\lambda_0)(1_{E_{s+2}}\wedge(\phi\wedge 1_M)j')(\kappa\wedge 1_K)$$
$$=\lambda_0(1_{E_{s+2}}\wedge(\phi\wedge 1_M)j')(\kappa\wedge 1_K)-(1_{E_{s+2}}\wedge(\phi\wedge 1_M)j'(j''\wedge 1_K)(1_L\wedge m_K))f_4$$
$$=(1_{E_{s+2}}\wedge(\phi\wedge 1_M)j'(j''\wedge 1_K))d(f_5)$$

$$+(1_{E_{s+2}}\wedge(\phi\wedge 1_M)ijj'(j''\wedge 1_K))d((1_{E_{s+2}}\wedge 1_L\wedge m_K)f_4)=0$$

从而以同样的理由使定理得证. 证毕.

9.5 球面稳定同伦群的一序列 $h_0\sigma$ 新元素族

在本节, 将由 9.2 节主要定理 A 和 9. 4 节主要定理 C 推出球面稳定同伦群的一序列 $h_0\sigma$ 和 $h_0\sigma'$ 新元素族的收敛性, 其中 σ 和 σ' 为一对 a_0 相关元素.

定理 9.5.1 设 $p\geqslant 7, n\geqslant 2$, 则

$$h_0h_n\in \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q}(Z_p,Z_p),\quad h_0b_{n-1}\in \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q}(Z_p,Z_p)$$

在 Adams 谱序列中是永久循环, 并且它们分别收敛到 $\pi_{p^nq+q-2}S, \pi_{p^nq+q-3}S$ 中的非零 p 阶元素.

证 由文献 [12] p.11 定理 1.2.14, 有 $d_2(h_n)=a_0b_{n-1}\in \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p,Z_p), n\geqslant 1$, 其中 $d_2:\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(Z_p,Z_p)\to \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p,Z_p)$ 为 Adams 谱序列的二阶微分算子. 即 h_n 和 b_{n-1} 是一对 a_0 相关元素, 从而可以将主要定理 A 应用到 $(\sigma,\sigma')=(h_n,b_{n-1}),(s,tq)=(1,p^nq)$. 我们只需验证主要定理 A 的假设 (I), (II), (III) 成立. 由第 5 章关于 $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(Z_p,Z_p)$ 的 Z_p- 基的计算表格 $(s\leqslant 3)$ 可知以下主要定理 A 的假设 (I), (II) 对 $(\sigma,\sigma')=(h_n,b_{n-1}),(s,tq)=(1,p^nq)$ 成立. 另外由 [17] 关于 $\mathrm{Ext}_A^{4,*}(Z_p,Z_p)$ 的计算结果可知以下成立:

$$\mathrm{Ext}_A^{4,p^nq+rq+1}(Z_p,Z_p)=0\qquad(r=1,3,4)$$
$$\mathrm{Ext}_A^{4,p^nq+rq}(Z_p,Z_p)=0\qquad(r=2,3)$$
$$\mathrm{Ext}_A^{4,p^nq+2q+1}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{\widetilde{\alpha}_2b_{n-1}\}$$
$$\mathrm{Ext}_A^{4,p^nq+2}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{a_0^2b_{n-1}\},\qquad \mathrm{Ext}_A^{4,p^nq+1}(Z_p,Z_p)=0$$

即主要定理 A 的假设 (III) 对 $(\sigma,\sigma')=(h_n,b_{n-1}),(s,tq)=(1,p^nq)$ 成立. 因此, 由主要定理 A 得出 $h_0b_{n-1}\in \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q}(Z_p,Z_p)$, $i_*(h_0h_n)\in \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q}(H^*M,Z_p)$ 在 Adams 谱序列中都是永久循环. 由注 9.2.35, 主要定理 A 还可得出 $(1_L\wedge i)_*\phi_*(h_n)\in \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+2q}(H^*L,Z_p)$ 在 Adams 谱序列中是永久循环, 从而再应用主要定理 C 即可得出本定理的结果, 这是因为通过第 5 章中关于 $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(Z_p,Z_p)$ 当 $s=1,2,3$ 时的 Z_p- 基的计算表格容易看出主要定理 C 的假设 (I) 对 $(\sigma,\sigma',s,tq)=(h_n,b_{n-1},1,p^nq)$ 成立. 证毕.

现在我们再应用主要定理 A 和主要定理 C 到 $(\sigma,\sigma')=(h_nh_m,h_nb_{m-1}-h_mb_{n-1})$, $(s,tq)=(2,p^nq+p^mq)$, 以便得出球面稳定同伦群的另一序列 $h_0\sigma$ 元素族. 为了验证主要定理 A 的假设 (I), (II), (III), 先证明以下命题.

命题 9.5.2 设 $p\geqslant 7, n\geqslant m+2\geqslant 4, tq=p^nq+p^mq$, 则

(1) $\mathrm{Ext}_A^{4,tq+rq+u}(Z_p,Z_p)=0$ 当 $r=2,3,4,u=-1,0$ 或 $r=3,4,u=1$,

$\mathrm{Ext}_A^{4,tq+q}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{h_0h_nb_{m-1},h_0h_mb_{n-1}\}$,
$\mathrm{Ext}_A^{4,tq}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{b_{n-1}b_{m-1}\}$,
$\mathrm{Ext}_A^{4,tq+1}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{a_0h_nb_{m-1},a_0h_mb_{n-1}\}$

(2) $\mathrm{Ext}_A^{5,tq+rq+1}(Z_p,Z_p)=0$ 当 $r=1,3,4$, $\mathrm{Ext}_A^{5,tq+rq}(Z_p,Z_p)=0$ 当 $r=2,3$,
$\mathrm{Ext}_A^{5,tq+2q+1}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{\widetilde{\alpha}_2h_nb_{m-1},\widetilde{\alpha}_2h_mb_{n-1}\}$,
$\mathrm{Ext}_A^{5,tq+2}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{a_0^2h_nb_{m-1},a_0^2h_mb_{n-1}\}$,
$\mathrm{Ext}_A^{5,tq+1}(Z_p,Z_p)\cong Z_p\{a_0b_{n-1}b_{m-1}\}$, $a_0^2b_{n-1}b_{m-1}\neq 0\in \mathrm{Ext}_A^{6,tq+2}(Z_p,Z_p)$

证 由定理 5.5.3, 存在 May 谱序列 (MSS) $\{E_r^{s,t,*},d_r\}$, 它收敛到 $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(Z_p,Z_p)$, 并且具有 E_1- 项

$E_1^{*,*,*}=E(h_{i,j}\mid i>0,j\geqslant 0)\otimes P(b_{i,j}\mid i>0,j\geqslant 0)\otimes P(a_i\mid i\geqslant 0)$, 其中 E 表示外代数而 P 表示多项式代数, $h_{i,j}\in E_1^{1,2(p^i-1)p^j,2i-1}$, $b_{i,j}\in E_1^{2,2(p^i-1)p^{j+1},p(2i-1)}$, $a_i\in E_1^{1,2p^i-1,2i+1}$. 考查以下各元素第二次数 (mod p^nq), 其中 $0\leqslant i\leqslant n, n\geqslant m+2\geqslant 4$.

$$\begin{aligned}
|h_{s,i}| &= (p^{s+i-1}+\cdots+p^i)q \pmod{p^nq},\quad 0\leqslant i<s+i-1<n\\
&= (p^{n-1}+\cdots+p^i)q \pmod{p^nq},\quad 0\leqslant i<s+i-1=n\\
|b_{s,i-1}| &= (p^{s+i-1}+\cdots+p^i)q \pmod{p^nq},\ 1\leqslant i<s+i-1<n\\
&= (p^{n-1}+\cdots+p^i)q \pmod{p^nq},\ 1\leqslant i<s+i-1=n\\
|a_{i+1}| &= (p^i+\cdots+1)q+1 \pmod{p^nq},\quad 1\leqslant i<n\\
|a_{i+1}| &= (p^{n-1}+\cdots+1)q+1 \pmod{p^nq},\quad i=n
\end{aligned}$$

对于次数 $k=tq+rq+u$ 使得 $0\leqslant r\leqslant 4,-1\leqslant u\leqslant 2$, $k=p^mq+rq+u \pmod{p^nq}$. 因此, 当 $3\leqslant w\leqslant 5$, $E_1^{w,tq+rq+u,*}$ 不存在这样的生成元, 它具有以上元素之一作为因子, 这是因为这样的生成元将具有第二次数 $(c_np^{n-1}+\cdots+c_1p+c_0)q+d \pmod{p^nq}$, 其中 $c_i\neq 0(1\leqslant i\leqslant m-1$ 或 $m<i<n)$, $0\leqslant c_l<p, l=0,\cdots,n, 0\leqslant d\leqslant 5$. 另外, 第二次数 $|b_{1,i-1}|=p^iq \pmod{p^nq}(1\leqslant i\leqslant n)$, $|h_{1,i}|=p^iq \pmod{p^nq}(0\leqslant i\leqslant n)$. 因此, 排除以上因子以及第二次数 $\geqslant tq+pq$ 的因子, 可知 $E_1^{w,tq+rq+u,*}$ 中的生成元的可能的因子只有 $a_1,a_0,h_{1,0}, h_{1,n},h_{1.m}, b_{1,n-1},b_{1,m-1}$.

因此, 由次数原因我们有

$$\begin{aligned}
&E_1^{4,tq+rq+1,*}=0 \text{ 当 } r=3,4,\quad E_1^{4,tq+rq+u,*}=0 \text{ 当 } r=2,3,4,u=-1,0,\\
&E_1^{4,tq,*}=Z_p\{b_{1,n-1}b_{1,m-1}\},\quad E_1^{4,tq+1,*}\cong Z_p\{a_0h_{1,n}b_{1,m-1},a_0h_{1,m}b_{1,n-1}\},\\
&E_1^{4,tq+2,*}=Z_p\{a_0^2h_{1,n}h_{1,m}\},\\
&E_1^{4,tq+2q+1,*}=Z_p\{h_{1,0}a_1h_{1,n}h_{1,m}\},\\
&E_1^{4,tq+q,*}=Z_p\{h_{1,0}h_{1,n}b_{1,m-1},h_{1,0}h_{1,m}b_{1,n-1}\},\\
&E_1^{3,tq+1,*}=Z_p\{a_0h_{1,n}h_{1,m}\},\quad E_1^{3,tq.*}=Z_p\{h_{1,n}b_{1,m-1},h_{1,m}b_{1,n-1}\},\\
&E_1^{3,tq+q,*}=Z_p\{h_{1,0}h_{1,n}h_{1,m}\},\quad E_1^{3,tq+2q+1,*}=0
\end{aligned}$$

注意到 MSS 中的微分算子是导数的, 即 $d_r(xy)=d_r(x)y+(-1)^sxd_r(y)$, $x\in E_1^{s,t,*}$, $y\in$

$E_1^{s',t',*}$. 另外, $a_0, h_{1,n}, b_{1,n-1}, h_{1,0}a_1$ 在 MSS 中是永久循环, 它们分别收敛到 a_0, h_n, $b_{n-1}, \widetilde{\alpha}_2 \in \mathrm{Ext}_A^{*,*}(Z_p, Z_p)$. 因此, 微分 $d_r E_r^{3,tq+sq+u,*} = 0$(对所有 $r \geqslant 1$) 当 $s = u = 0$ 或 $s = 1, u = 0$ 或 $s = 0, u = 1$ 或 $s = 2, u = 1$. 因此, $b_{1,n-1}b_{1,m-1}, a_0h_{1,n}b_{1,m-1}$, $a_0h_{1,m}b_{1,n-1}, h_{1,0}h_{1,n}b_{1,m-1}, h_{1,0}h_{1,m}b_{1,n-1} \in E_r^{4,*,*}$ 在 MSS 中不是 d_r 边缘, 从而 $b_{n-1}b_{m-1}, a_0h_nb_{m-1}, a_0h_mb_{n-1}, h_0h_nb_{m-1}, h_0h_mb_{n-1}$ 在 $\mathrm{Ext}_A^{4,*}(Z_p, Z_p)$ 中都是非零的. 这完成了 (1) 的证明.

类似地, 由次数原因我们有

$E_1^{5,tq+q+1,*} \cong Z_p\{a_0h_{1,0}h_{1,n}b_{1,m-1}, a_0h_{1,0}h_{1,m}b_{1,n-1}, a_1b_{1,n-1}b_{1,m-1}\}$

$E_1^{5,tq+rq+1,*} = 0$ 当 $r = 3, 4$, $\quad E_1^{5,tq+rq,*} = 0$ 当 $r = 2, 3$

$E_1^{5,tq+2q+1,*} \cong Z_p\{h_{1,0}a_1h_{1,n}b_{1,m-1}, h_{1,0}a_1h_{1,m}b_{1,n-1}\}$

$E_1^{5,tq+1,*} = Z_p\{a_0b_{1,n-1}b_{1,m-1}\}$, $\quad E_1^{4,tq+2q+1,*} \cong Z_p\{h_{1,0}a_1h_{1,n}h_{1,m}\}$

$E_1^{5,tq+2,*} = Z_p\{a_0^2h_{1,m}b_{1,n-1}, a_0^2h_{1,n}b_{1,n-1}\}$

$E_1^{5,tq+q+1,*}$ 中的生成元在 MSS 中全部死掉, 这是因为 $a_0h_{1,0}h_{1,n}b_{1,m-1} = -d_1(a_1h_{1,n}\ b_{1,m-1})$, $a_0h_{1,0}h_{1,m}b_{1,n-1} = -d_1(a_1h_{1,m}b_{1,n-1})$ 以及

$$d_1(a_1b_{1,n-1}b_{1,m-1}) = -a_0h_{1,0}b_{1,n-1}b_{1,m-1} \neq 0 \in E_1^{5,tq+q+1,*}$$

因此 $\mathrm{Ext}_A^{5,tq+q+1}(Z_p, Z_p) = 0$. 另外, 类似于 (1) 的证明所述可知, $d_rE_r^{4,tq+u,*} = 0$, $d_rE_r^{4,tq+2q+1,*} = 0$ (对所有 $r \geqslant 1$), $u = 1, 2$. 因此 $E_1^{5,*,*}$ 中的生成元在 MSS 中分别非零地收敛到 $\widetilde{\alpha}_2h_nb_{m-1}, \widetilde{\alpha}_2h_mb_{n-1}, a_0b_{n-1}b_{m-1}, a_0^2h_mb_{n-1}, a_0^2h_nb_{m-1}$. 对最后一个结果, 注意到 $d_rE_r^{5,tq+2,*} = 0$ (对所有 $r \geqslant 1$), 因此 $a_0^2b_{n-1}b_{m-1} \neq 0 \in \mathrm{Ext}_A^{6,tq+2}(Z_p, Z_p)$. 这证明了 (2). 证毕.

定理 9.5.3 设 $p \geqslant 7, n \geqslant m + 2 \geqslant 4$, 则

$$h_0h_nh_m \in \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+p^mq+q}(Z_p, Z_p),$$

$$h_0(h_nb_{m-1} - h_mb_{n-1}) \in \mathrm{Ext}_A^{4,p^nq+p^mq+q}(Z_p, Z_p)$$

在 Adams 谱序列中是永久循环, 并且它们分别收敛到 $\pi_{p^nq+p^mq+q-3}S$ 以及 $\pi_{p^nq+p^mq+q-4}S$ 中的非零 p 阶元素.

证 由文献 [12]p.11 定理 1.2.14, 有非零二阶微分算子 $d_2(h_n) = a_0b_{n-1}, n \geqslant 1$, 随之有 $d_2(h_nh_m) = d_1(h_n)h_m + (-1)^{1+p^nq}h_nd_2(h_m) = a_0h_mb_{n-1} - a_0h_nb_{m-1}$. 因此 $(h_nh_m, h_mb_{n-1} - h_nb_{m-1})$ 是一对 a_0 相关元素. 将主要定理 A 应用到 $(\sigma, \sigma') = (h_nh_m, h_mb_{n-1} - h_nb_{m-1}), (s, tq) = (2, p^nq + p^mq)$ 可得出 $h_0(h_mb_{n-1} - h_nb_{m-1}) \in \mathrm{Ext}_A^{4,p^nq+p^mq+q}(Z_p, Z_p)$ 以及 $i_*(h_0h_nh_m) \in \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+p^mq+q}(Z_p, Z_p)$ 在 Adams 谱序列中都是永久循环, 这是因为由第 5 章关于 $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(Z_p, Z_p), s \leqslant 3$ 的 Z_p 基的表格以及命题 9.5.2 可知主要定理 A 的假设 (I), (II), (III) 成立. 由注 9.2.35, 主要定理 A 还可得出 $(1_L \wedge i)_*\phi_*(h_nh_m) \in \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+p^mq+2q}(H^*L, Z_p)$ 在 Adams 谱序列中是永久循环, 再应用主要定理 C 即可得出本定理的结果, 这是因为由第 5 章关于

$\mathrm{Ext}_A^{s,*}(Z_p, Z_p)$ 当 $s = 1,2,3$ 的 Z_p 基元的计算结果容易看出主要定理 C 的假设 (I) 成立. 证毕.

以上定理 9.5.1 和定理 9.5.3 得出了球面稳定同伦群的一序列共 4 族 $h_0\sigma$ 新元素族. 实际上, 还存在另外若干对 a_0 相关元素, 从而预期可以再得出球面稳定同伦群的另外一序列 $h_0\sigma$ 新元素族. 我们有以下猜想.

猜想 9.5.4 设 $p \geqslant 7, n \geqslant 3$, 则存在非零二阶微分算子 $d_2(g_n) = a_0 l_n \in \mathrm{Ext}_A^{4,p^{n+1}q+2p^nq+1}(Z_p, Z_p), n \geqslant 3$(相差非零系数), 并且

$$h_0 g_n \in \mathrm{Ext}_A^{3,p^{n+1}q+2p^nq+q}(Z_p, Z_p)$$

$$h_0 l_n \in \mathrm{Ext}_A^{4,p^{n+1}q+2p^nq+q}(Z_p, Z_p)$$

在 Adams 谱序列中是永久循环, 它们分别收敛到 $\pi_{p^{n+1}q+2p^nq+q-3}S$ 以及 $\pi_{p^{n+1}q+2p^nq+q-4}S$ 中的非零 p 阶元素, 其中 $g_n \in \mathrm{Ext}_A^{2,p^{n+1}q+2p^nq}(Z_p, Z_p), l_n \in \mathrm{Ext}_A^{3,p^{n+1}q+2p^nq}(Z_p, Z_p)$.

猜想 9.5.5 设 $p \geqslant 7, n \geqslant 3$, 则存在非零微分算子 $d_2(k_n) = a_0 l'_n \in \mathrm{Ext}_A^{4,2p^{n+1}q+p^nq+1}(Z_p, Z_p)$ (相差非零系数), $n \geqslant 3$, 并且

$$h_0 k_n \in \mathrm{Ext}_A^{3,2p^{n+1}q+p^nq+q}(Z_p, Z_p)$$

$$h_0 l'_n \in \mathrm{Ext}_A^{4,2p^{n+1}q+p^nq+q}(Z_p, Z_p)$$

在 Adams 谱序列中是永久循环, 它们分别收敛到 $\pi_{2p^{n+1}q+p^nq+q-3}S$ 以及 $\pi_{2p^{n+1}q+p^nq+q-4}S$ 中的非零 p 阶元素, 其中 $k_n \in \mathrm{Ext}_A^{2,2p^{n+1}q+p^nq}(Z_p, Z_p), l'_n \in \mathrm{Ext}_A^{3,2p^{n+1}q+p^nq}(Z_p, Z_p)$.

注 9.5.6 由文献 [10], [25], 存在 Thom 映射 $\Phi : \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s,*}(BP_*, BP_*) \to \mathrm{Ext}_A^{s,*}(Z_p, Z_p)$, $s = 2,3$, 使得 $\Phi(\beta_{p^{n-1}/p^{n-1}-1}) = h_0 h_n$, $\Phi(\beta_{p^{n-1}/p^{n-1}}) = b_{n-1}$,

$$\Phi(\beta_{p^{m-1}/p^{m-1}-1}\beta_{p^{n-1}/p^{n-1}} - \beta_{p^{n-1}/p^{n-1}-1}\beta_{p^{m-1}/p^{m-1}}) = h_0(h_m b_{n-1} - h_n b_{m-1}),$$

$\Phi(\gamma_{p^{n-2}/p^{n-2}-p^{m-1},p^{m-1}-1}) = h_0 h_n h_m$. 因此, 定理 9.5.1 和定理 9.5.3 中得出的 π_*S 中的 $h_0 h_n, h_0 b_{n-1}, h_0(h_m b_{n-1} - h_n b_{m-1}), h_0 h_n h_m$ 映射在 Adams-Novikov 谱序列中分别由 $\beta_{p^{n-1}/p^{n-1}-1}$ + 其他项 $\in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{2,p^nq+q}(BP_*, BP_*)$, $\alpha_1\beta_{p^{n-1}/p^{n-1}}$ + 其他项 $\in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{3,p^nq+q}(BP_*, BP_*)$, $\beta_{p^{m-1}/p^{m-1}-1}\beta_{p^{n-1}/p^{n-1}} - \beta_{p^{n-1}/p^{n-1}-1} \cdot \beta_{p^{m-1}/p^{m-1}}$ + 其他项 $\in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{4,p^nq+p^mq+q}(BP_*, BP_*)$, $\gamma_{p^{n-2}/p^{n-2}-p^{m-1},p^{m-1}-1}$ + 其他项 $\in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{3,p^nq+p^mq+q}(BP_*, BP_*)$ 所表示.

9.6 球面稳定同伦群的一序列 $h_0\sigma\widetilde{\gamma}_s, g_0\sigma\widetilde{\gamma}_s$ 新元素族

在本节, 我们利用主要定理 B 得出 $i'_*i_*(g_0h_n), i'_*i_*(g_0b_{n-1}), i'_*i_*(g_0h_nh_m)$, $i'_*i_*(g_0(h_nb_{m-1} - b_mb_{n-1}))$ 等收敛到 Toda 谱 $V(1)$ 的同伦群中相应的非零元素族. 在此基础上, 我们得出球面稳定同伦群的一序列 $g_0\sigma\widetilde{\gamma}_s, h_0\sigma\widetilde{\gamma}_s$ 元素族.

定理 9.6.1 设 $p \geqslant 5, n \geqslant 2$, 则

$$i'_* i_*(g_0 h_n) \in \mathrm{Ext}_A^{3,p^n q+pq+2q}(H^*K, Z_p)$$
$$i'_* i_*(g_0 b_{n-1}) \in \mathrm{Ext}_A^{4,p^n q+pq+2q}(H^*K, Z_p)$$

在 Adams 谱序列中是永久循环, 并且它们分别收敛到 $\pi_{p^n q+pq+2q-3}K$, $\pi_{p^n q+pq+2q-4}K$ 的非零元素.

证 先将主要定理 B 应用到 $(\sigma, s, tq) = (h_n, 1, p^n q)$. 由定理 9.5.1, 主要定理 B 的假设 (II) 成立. 由第 5 章关于 $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(Z_p, Z_p)$ 当 $s = 1,2,3$ 时的 Z_p 基元的计算表格可知主要定理 B 的假设 (I) 也成立, 因此第一个结果可由主要定理 B 直接得出. 对于第二个结果, 将主要定理 B 应用到 $(\sigma, s, tq) = (b_{n-1}, 2, p^n q)$. 同样由定理 9.5.1, 主要定理 B 的假设 (II) 成立. 由第 5 章以及 [17] 关于 $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(Z_p, Z_p)$ 当 $s = 2,3,4$ 时的 Z_p 基元的计算表格可知主要定理 B 的假设 (I) 也成立. 因此, 第二个结果由主要定理 B 直接得出. 证毕.

另证 在主要定理 9.5.1 的证明中我们已知, 当 $(\sigma, \sigma') = (h_n, b_{n-1}), (s, tq) = (1, p^n q)$ 时, 主要定理 A 的假设 (I)(II)(III) 成立. 因此, 将 §3 中主要定理 B' 应用到 $(\sigma, \sigma') = (h_n, b_{n-1}), (s, tq) = (1, p^n q)$ 就可得出本定理的两个结果. 证毕.

定理 9.6.2 设 $p \geqslant 7, n \geqslant m+2 \geqslant 4$, 则

$$i'_* i_*(g_0 h_n h_m) \in \mathrm{Ext}_A^{4,p^n q+p^m q+pq+2q}(H^*K, Z_p)$$
$$i'_* i_*(g_0(h_n b_{m-1} - h_m b_{n-1})) \in \mathrm{Ext}_A^{5,p^n q+p^m q+pq+2q}(H^*K, Z_p)$$

在 Adams 谱序列中是永久循环, 并且它们分别收敛到 $\pi_{p^n q+p^m q+pq+2q-4}K$, $\pi_{p^n q+p^m q+pq+2q-5}K$ 的非零元素.

证 先将主要定理 B 应用到 $(\sigma, s, tq) = (h_n h_m, 2, p^n q + p^m q)$. 由定理 9.5.3, 主要定理 B 的假设 (II) 成立. 由第 5 章以及 [17] 关于 $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(Z_p, Z_p)$ 当 $s = 2,3,4$ 时的 Z_p 基元的计算表格可知主要定理 B 的假设 (I) 也成立. 因此, 第一个结果可由主要定理 B 直接得出. 再将主要定理 B 应用到 $(\sigma, s, tq) = (h_n b_{m-1} - h_m b_{n-1}, 3, p^n q + p^m q)$. 同样由定理 9.5.3, 主要定理 B 的假设 (II) 成立. 由第 5 章以及 [17] 关于 $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(Z_p, Z_p)$ 当 $s = 3,4$ 时的 Z_p 基元的计算表格以及命题 9.5.2 关于 $\mathrm{Ext}_A^{5,p^n q+p^m q+2q+1}(Z_p, Z_p) \cong Z_p\{\widetilde{\alpha}_2 h_n b_{m-1}, \widetilde{\alpha}_2 h_m b_{n-1}\}$ 可知主要定理 B 的假设 (I) 也成立. 因此, 第二个结果可由主要定理 B 直接得出. 证毕.

另证 在定理 9.5.2 的证明中已知, 当 $(\sigma, \sigma') = (h_n h_m, h_n b_{m-1} - h_m b_{n-1})$, $(s, tq) = (2, p^n q + p^m q)$ 时, 主要定理 A 的假设 (I)(II)(III) 成立. 因此, 将中主要定理 B' 应用到 $(\sigma, \sigma') = (h_n h_m, h_n b_{m-1} - h_m b_{n-1}), (s, tq) = (2, p^n q + p^m q)$ 就可得出本定理的两个结果. 证毕.

利用上纤维序列 (6.2.7)~(6.2.10) 中的记号, 可知当 $3 \leqslant s < p$,

$$\widetilde{\gamma}_s = ((j_1 j_2 j_3)_*(\gamma)_*^s (i_3 i_2 i_1)_*(1) \in \mathrm{Ext}_A^{s, sp^2q+(s-1)pq+(s-2)q+s-3}(Z_p, Z_p)$$

在 Adams 谱序列中收敛到第三周期性元素

$$\gamma_s = j_1 j_2 j_3 \gamma^s i_3 i_2 i_1 \in \pi_{sp^2q+(s-1)pq+(s-2)q-3} S$$

其中 $1 \in \mathrm{Ext}_A^{0,0}(Z_p, Z_p)$. 下面考查 $\mathrm{Ext}_A^{*,*}(Z_p, Z_p)$ 中的乘积 $g_0\sigma\widetilde{\gamma}_s, h_0\sigma\widetilde{\gamma}_s$, 并且我们将证明它们收敛到球面稳定同伦群相应的 p 阶元素, 其中 $\sigma = h_n, b_{n-1}$, $h_n h_m$, 或 $h_n b_{m-1} - h_m b_{n-1}$.

定理 9.6.3 设 $p \geqslant 7, n \geqslant 3, 3 \leqslant s < p$, 则乘积

$$g_0 h_n \widetilde{\gamma}_s \neq 0 \in \mathrm{Ext}_A^{s+3, p^nq+sp^2q+spq+sq+s-3}(Z_p, Z_p)$$

$$g_0 b_{n-1} \widetilde{\gamma}_s \neq 0 \in \mathrm{Ext}_A^{s+4, p^nq+sp^2q+spq+sq+s-3}(Z_p, Z_p)$$

在 Adams 谱序列中是永久循环, 并且它们收敛到球面稳定同伦群相应的 p 阶元素.

证 由定理 9.6.1, 存在非零的 $f \in \pi_{p^nq+pq+2q-3} K$ 使得它在 Adams 谱序列中由 $i'_* i_*(g_0 h_n) \in \mathrm{Ext}_A^{3, p^nq+pq+2q}(H^*K, Z_p)$ 所表示. 令 $\tilde{f} = j_1 j_2 j_3 \gamma^s i_3 f$ 为以下合成 $(tq = p^nq + pq + 2q - 3)$:

$$\tilde{f} : \Sigma^{tq} S \xrightarrow{f} V(1) \xrightarrow{i_3} V(2) \xrightarrow{\gamma^s} \Sigma^{-s(p^2q+pq+q)} V(2)$$
$$\xrightarrow{j_1 j_2 j_3} \Sigma^{-s(p^2+p+1)q+(p+2)q+q+3} S$$

由于 f 在 Adams 谱序列中由 $(i_2)_*(i_1)_*(g_0 h_n) \in \mathrm{Ext}_A^{3, p^nq+pq+2q}(H^*K, Z_p)$ 所表示, 因此以上的 $\tilde{f}$ 在 Adams 谱序列中由

$$c = (j_1 j_2 j_3)_*(\gamma_*)^s (i_3 i_2 i_1)_*(g_0 h_n) \in \mathrm{Ext}_A^{s+3, p^nq+s(p^2+p+1)q+s-3}(Z_p, Z_p)$$

所表示. 由 Yoneda 乘积的知识可知以上的元素 c 恰好是乘积 $g_0 h_n \widetilde{\gamma}_s \in \mathrm{Ext}_A^{s+3, p^nq+s(p^2+p+1)q+s-3}(Z_p, Z_p)$. 因此, 为了得到我们的第一个结果, 只要证明乘积 $g_0 h_n \widetilde{\gamma}_s$ 非零, 并且它在 Adams 谱序列中不会是一个 d_r 边缘, 即还要证明 $\mathrm{Ext}_A^{s+3-r, p^nq+s(p^2+p+1)q+s-2-r}(Z_p, Z_p)$ 当 $r \geqslant 2$ 为零. 我们可以通过 May 谱序列的计算来证明这两点. 由次数原因, $h_n, g_0, \widetilde{\gamma}_s$ 在 May 谱序列的 $E_1^{*,*,*}$ 项中分别由 $h_{1,n}, h_{1,1}h_{1,0}, h_{2,1}h_{1,2}h_{3,0}a_3^{s-3} \in E_1^{*,*,*}$ 所表示. 因此, 乘积 $g_0 h_n \widetilde{\gamma}_s$ 由

$$h_{1,n} h_{1,1} h_{1,0} h_{2,1} h_{1,2} h_{3,0} a_3^{s-3} \in E_1^{s+3, p^nq+s(p^2+p+1)q+s-3,*}$$

所表示. 因此, 只要通过次数的计算来证明 $E_1^{s+2, p^nq+s(p^2+p+1)q+s-3,*} = 0$ 以及 $E_1^{s+3-r, p^nq+s(p^2+p+1)q+s-2-r,*} = 0 (r \geqslant 2)$ 就可以得出本定理的第一个结果. 我们将这个计算过程留给读者. 第二个结果的证明和计算过程是类似的. 证毕.

利用定理 9.6.2, 定理 9.5.1 和定理 9.5.3, 和以上定理 9.6.3 的证明类似, 我们可得出以下定理 9.6.4~9.6.6.

定理 9.6.4 设 $p \geqslant 7, n \geqslant m + 2 \geqslant 5, 3 \leqslant s < p$, 则

$$g_0 h_n h_m \widetilde{\gamma}_s \neq 0 \in \mathrm{Ext}_A^{s+4, p^nq+p^mq+s(p^2+p+1)q+s-3}(Z_p, Z_p)$$

$$g_0(h_nb_{m-1}-h_mb_{n-1})\widetilde{\gamma}_s\neq 0\in \mathrm{Ext}_A^{s+5,p^nq+p^mq+s(p^2+p+1)q+s-3}(Z_p,Z_p)$$

在 Adams 谱序列中是永久循环, 并且它们收敛到球面稳定同伦群相应的 p 阶元素.

定理 9.6.5 设 $p\geqslant 7,n\geqslant 3,3\leqslant s<p$, 则乘积

$$h_0h_n\widetilde{\gamma}_s\neq 0\in \mathrm{Ext}_A^{s+2,p^nq+sp^2q+(s-1)(p+1)q+s-3}(Z_p,Z_p)$$

$$h_0b_{n-1}\widetilde{\gamma}_s\neq 0\in \mathrm{Ext}_A^{s+3,p^nq+sp^2q+(s-1)(p+1)q+s-3}(Z_p,Z_p)$$

在 Adams 谱序列中是永久循环, 并且它们收敛到球面稳定同伦群相应的 p 阶元素.

定理 9.6.6 设 $p\geqslant 7,n\geqslant m+2\geqslant 5,3\leqslant s<p$, 则乘积

$$h_0h_nh_m\widetilde{\gamma}_s\neq 0\in \mathrm{Ext}_A^{s+3,p^nq+p^mq+sp^2q+(s-1)(p+1)q+s-3}(Z_p,Z_p)$$

$$h_0(h_nb_{m-1}-h_mb_{n-1})\widetilde{\gamma}_s\neq 0\in \mathrm{Ext}_A^{s+4,p^nq+p^mq+sp^2q+(s-1)(p+1)q+s-3}(Z_p,Z_p)$$

在 Adams 谱序列中是永久循环, 并且它们收敛到球面稳定同伦群相应的 p 阶元素.

注 9.6.7 定理 9.6.5 以及定理 9.6.6 中得出的新元素分别是定理 9.5.1 中的 h_0h_n 元素, h_0b_{n-1} 元素, 定理 9.5.3 中 $h_0h_nh_m$ 元素, $h_0(h_nb_{m-1}-h_mb_{n-1})$ 元素与 $\gamma_s=j_1j_2j_3\gamma^si_3i_2i_1\in\pi_{sp^2q+(s-1)pq+(s-2)q-3}S$ 的 (合成) 乘积. 但是, 定理 9.6.3 以及定理 9.6.4 中得出的新元素是球面稳定同伦群中的不可分解元素, 即它们不是球面稳定同伦群的其他更少次数元素的 (合成) 乘积. 这是因为 $g_0\in\mathrm{Ext}_A^{2,pq+2q}(Z_p,Z_p)$ 在 Adams 谱序列中死掉, 即有非零的二阶微分:$d_2(g_0)=b_0\widetilde{\alpha}_2$ (相差非零系数)$\in\mathrm{Ext}_A^{4,pq+2q+1}(Z_p,Z_p)$. 这可以比较容易地证明如下. 由于 $\widetilde{\alpha}_2,b_0$ 分别在 Adams 谱序列中收敛到 $\alpha_2=j\alpha^2i,\beta_1=jj'\beta i'i\in\pi_*S$, 因此 (合成) 乘积 $\beta_1\alpha_2\in\pi_{pq+2q-3}S$ 在 Adams 谱序列中必由 $b_0\widetilde{\alpha}_2\in\mathrm{Ext}_A^{4,pq+2q+1}(Z_p,Z_p)$ 所表示. 但是容易看出 $\beta_1\alpha_2=jj'\beta i'ij\alpha^2i=0$, 而 $b_0\widetilde{\alpha}_2\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{4,pq+2q+1}(Z_p,Z_p)$, 因此 $b_0\widetilde{\alpha}_2$ 必定是一个 d_r 边缘. 由次数原因, 只能是 $b_0\widetilde{\alpha}_2=d_2(g_0)$(相差非零系数).

猜想 9.6.8 根据猜想 9.5.4~9.5.5, 我们可以猜想, 当 $p\geqslant 7,n\geqslant 3,3\leqslant s<p$, 乘积 $h_0g_n\widetilde{\gamma}_s,h_0l_n\widetilde{\gamma}_s,g_0g_n\widetilde{\gamma}_s,g_0l_n\widetilde{\gamma}_s,h_0k_n\widetilde{\gamma}_s,h_0l'_n\widetilde{\gamma}_s,g_0k_n\widetilde{\gamma}_s,g_0l'_n\widetilde{\gamma}_s$ 在 Adams 谱序列中是永久循环, 并且它们都收敛到球面稳定同伦群相应的 p 阶元素. 另外, 本节的所有结果和猜想, 如果将与 $\widetilde{\gamma}_s$ 的乘积改为与 $\widetilde{\beta}_s(2\leqslant s<p)$ 的乘积, 则可得出球面稳定同伦群的一序列 $h_0\sigma\widetilde{\beta}_s,g_0\sigma\widetilde{\beta}_s$ 元素, 其中 $\widetilde{\beta}_s=(j_1j_2)_*\beta_*^s(i_1i_1)_*(1)\in\mathrm{Ext}_A^{s,spq+(s-1)q+s-2}(Z_p,Z_p),2\leqslant s<p$.

9.7 球面稳定同伦群的第三周期性元素族

在本节, 将首先证明 Toda 谱 $V(1)$ 的同伦群的 h_n 元素族的收敛性, 在此基础上可得出球面稳定同伦群第三周期性元素族 $\gamma_{p^n/s}(1\leqslant s\leqslant p^n-1)$ 在 Adams-Novikov 谱序列的收敛性.

定理 9.7.1 (文献 [9] 定理 II) 设 $p \geqslant 5, n \geqslant 0$,

$$h_n \in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,p^n q}(BP_*, BP_*K)$$

是 Cobar 复形中由 $[t_1^{p^n}]$ 所表示的元素, 则这个 h_n 在 Adams-Novikov 谱序列中是永久循环, 并且它收敛到 $\pi_{p^nq-1}K$ 中的一个非零元素.

以上的 h_n- 定理的证明将是本节的主要内容. 由定理 8.1.6(b)(ii), 存在一个关系

(9.7.2) $$h_n = c_2(p^{n-2}) + v_2^{p^{n-2}} h_{n-2} \in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,p^n q}(BP_*BP_*K)$$

由文献 [10].p.502 推论 7.8, $v_2^s c_2(p^{n-2})(p^{n-2} > s \geqslant 1)$ 在以下边缘同态 (或联接同态)

$$j'_* : \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,*}(BP_*, BP_*K) \to \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{2,*}(BP_*, BP_*M)$$

以及

$$j_* : \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{2,*}(BP_*, BP_*M) \to \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{3,*}(BP_*, BP_*)$$

的合成作用之下恰好就是第三周期性元素 $\gamma_{p^{n-2}/p^{n-2}-s} \neq 0 \in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{3,*}(BP_*, BP_*)$. 因此, 由定理 9.7.1 和关系式 (9.7.2) 以及第 7 章定理 7.3.2, 可直接得出以下球面稳定同伦群第三周期性元素族的收敛性定理.

定理 9.7.3 (文献 [9] 定理 I) 设 $p \geqslant 5, n \geqslant 1$ 并且 $1 \leqslant s \leqslant p^n - 1$, 则以下第三周期性元素族

$$\gamma_{p^n/s} \in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{3,*}(BP_*, BP_*)$$

在 Adams-Novikov 谱序列中是永久循环, 并且它收敛到 π_*S 的具有次数 $p^{n+2}q + (p^n - s)(p+1)q - q - 3$ 的 p 阶元素.

为了证明定理 9.7.1, 我们先证明以下比它更弱一些的定理.

定理 9.7.4 (文献 [9] 定理 4.1) 设 $p \geqslant 5, n \geqslant 0$, $h_n \in \mathrm{Ext}_A^{1,p^n q}(Z_p, Z_p)$ 为第 5 章中的元素, 则 $i'_* i_*(h_n) \in \mathrm{Ext}_A^{1,p^n q}(H^*K, Z_p)$ 在 Adams 谱序列中是永久循环, 并且它收敛到 $\pi_{p^nq-1}K$ 的一个非零元素.

定理 9.7.4 的证明是本节的主要内容. 它的证明需要低维 Ext 群的一些预备知识, 然后在与球谱相关的一些谱的 Adams 分解中进行推理而证得. 我们先证明 Ext 群的一些结果.

命题 9.7.5 设 $p \geqslant 3, n \geqslant 2$, 则

(1) $\mathrm{Ext}_A^{s,p^n q+r}(H^*K, Z_p) = 0$, 当 $s = 2, 3, r = 1, 2$,
$\mathrm{Ext}_A^{s,p^n q+1}(H^*K, H^*M) = 0$,
$\mathrm{Ext}_A^{3,p^n q+q}(H^*K, H^*K) \cong Z_p\{(h_0 b_{n-1})'\}$.

(2) $\mathrm{Ext}_A^{s-1,p^n q+q+s-3}(H^*Y, Z_p) = 0$ for s = 1, 2, 3.

(3) $\mathrm{Ext}_A^{1,p^n q}(H^*K, H^*Y) = 0$,

其中 Y 是上纤维序列 (9.1.4) 中的谱.

证 (1) 考查以下由 (9.1.1) 导出的恰当序列 $(s=1,2,3,r=1,2)$

$$\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq+r}(Z_p,Z_p)\xrightarrow{i_*}\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq+r}(H^*M,Z_p)\xrightarrow{j_*}\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq+r-1}(Z_p,Z_p)\xrightarrow{p_*}$$

右边的群由第 5 章中关于 $\mathrm{Ext}_A^{s,*}(Z_p,Z_p)$ 的 Z_p- 基元的计算表格可知除了当 $(s,r)=(1,1),(2,1),(2,2),(3,2)$ 是分别有唯一生成元 $h_n,b_{n-1},a_0h_n,a_0b_{n-1}$ 之外都为零. 但是, $p_*(h_n)=a_0h_n\neq 0,p_*(b_{n-1})=a_0b_{n-1}\neq 0,p_*(a_0h_n)=a_0^2h_n\neq 0,p_*(a_0b_{n-1})=a_0^2b_{n-1}\neq 0$, 因此以上的 p_* 单射从而 $\mathrm{im}\ j_*=0$. 另外, 左边的群除了当 $(s,r)=(2,1),(3,1),(3,2)$ 时分别有唯一生成元 $a_0h_n=p_*(h_n),a_0b_{n-1}=p_*(b_{n-1}),a_0^2h_n=p_*(a_0h_n)$ 之外都为零. 因此有 $\mathrm{im}\ i_*=0$, 从而得出 $\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq+r}(H^*M,Z_p)=0$ 当 $s=1,2,3,r=1,2$.

再考查以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列 $(s=2,3,r=1,2)$

$$0=\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq+r}(H^*M,Z_p)\xrightarrow{i'_*}\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq+r}(H^*K,Z_p)$$
$$\xrightarrow{j'_*}\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq-q+r-1}(H^*M,Z_p)$$

左边的群由以上已证都为零. 右边的群也都为零, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq-q+r-1}(Z_p,Z_p)=0$ 当 $s=2,3,r=1,2,3$(参见第 5 章的计算表格). 因此, 中间的群当 $s=2,3,r=1,2$ 为零, 从而也可得出 $\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq+1}(H^*K,H^*M)=0\ (s=2,3)$.

对于最后一个结果, 考查以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+2q+1}(H^*K,H^*M)\xrightarrow{(j')^*}\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q}(H^*K,H^*K)$$
$$\xrightarrow{(i')^*}\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q}(H^*K,H^*M)\xrightarrow{\alpha^*}$$

左边的群由命题 9.3.2(1) 为零而右边的群由命题 9.3.1 有唯一生成元 $i'_*(\alpha_1\wedge 1_M)_*(\tilde{b}_{n-1}))$ 使满足 $\alpha^*(i')_*(\alpha_1\wedge 1_M)_*(\tilde{b}_{n-1})=0$. 因此, 中间的群如所求的有唯一生成元 $(h_0b_{n-1})'$ 使得 $(i')^*(h_0b_{n-1})'=i'_*(\alpha_1\wedge 1_M)(\tilde{b}_{n-1})$. 证毕.

(2) 当 $s=1$ 时结果是显然的. 对于 $s=2,3$, 考查由 (9.1.4) 导出的恰当序列

$$\xrightarrow{(i'i)_*}\mathrm{Ext}_A^{s-1,p^nq+q+s-3}(H^*K,Z_p)\xrightarrow{r_*}\mathrm{Ext}_A^{s-1,p^nq+q+s-3}(H^*Y,Z_p)$$
$$\xrightarrow{\epsilon_*}\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq+q+s-3}(Z_p,Z_p)\xrightarrow{(i'i)_*}$$

左边的群当 $s=2$ 时为零, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{1,t}(Z_p,Z_p)=0$ 当 $t=-1,-2\ (\mathrm{mod}\ q)$ (参见第 5 章). 左边的群当 $s=3$ 时有唯一生成元 $(i'i)_*(h_0h_n)$, 从而有 $\mathrm{im}\ r_*=0$. 右边的群当 $s=2$ 时为零而当 $s=3$ 时有唯一生成元 h_0b_{n-1} 使满足 $(i'i)_*(h_0b_{n-1})\neq 0$, 因此 $\mathrm{im}\ \epsilon_*=0$, 从而中间的群当 $s=1,2,3$ 时如所求的为零.

(3) 观察以下由 (9.1.4) 导出的恰当序列

$$0=\mathrm{Ext}_A^{0,p^nq}(H^*K,Z_p)\xrightarrow{\epsilon^*}\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*K,H^*Y)$$
$$\xrightarrow{r^*}\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*K,H^*K)\xrightarrow{(i'i)^*}$$

左边的群显然为零而右边的群由命题 9.3.6 有唯一生成元 $(h_n)'$ 使满足 $(i'i)^*(h_n)'=(i'i)_*(h_n)\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*K,Z_p)$, 因此中间的群如所求的为零. 证毕.

命题 9.7.6 设 $p\geqslant 3,n\geqslant 2$, 则

(1) $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq}(Z_p, H^*M) = 0$, $\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p, H^*M) = 0$.

(2) $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq}(Z_p, H^*K) = 0$, $\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p, H^*K) = 0$.

(3) $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q-u}(Z_p, H^*K) = 0$ 当 $u = 0, 1$,
$\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q}(Z_p, H^*K) = 0$.

证 (1) 考查以下由 (9.1.1) 导出的两个恰当序列:

$$\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+1}(Z_p, Z_p) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq}(Z_p, H^*M) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq}(Z_p, Z_p) \xrightarrow{p^*}$$

$$\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+2}(Z_p, Z_p) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p, H^*M) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p, Z_p) \xrightarrow{p^*}$$

左上边的群有唯一生成元 a_0h_n (参见第 5 章) 使满足 $j^*(a_0h_n) = j^*p^*(h_n) = 0$ 而右上边的群有唯一生成元 b_{n-1} 使满足 $p^*(b_{n-1}) = a_0b_{n-1} \neq 0 \in \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p, Z_p)$ (参见第 5 章定理 5.4.1), 因此我们有 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq}(Z_p, H^*M) = 0$. 左下边的群有唯一生成元 $a_0^2h_n$ (参见第 5 章定理 5.4.1) 使满足 $j^*(a_0^2h_n) = j^*p^*\ (a_0h_n) = 0$ 而右下边的群有唯一生成元 a_0b_{n-1} (参见第 5 章定理 5.4.1) 使满足 $p^*(a_0b_{n-1}) = a_0^2b_{n-1} \neq 0 \in \mathrm{Ext}_A^{4,p^nq+2}(Z_p, Z_p)$ (参见命题 9.5.2(2)), 因此有 $\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p, H^*M) = 0$.

(2) 观察以下由 (9.1.2) 导出的两个恰当序列:

$$0 = \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q+1}(Z_p, H^*M) \xrightarrow{(j')^*} \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq}(Z_p, H^*K) \xrightarrow{(i')^*} \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq}(Z_p, H^*M) = 0$$

$$0 = \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q+2}(Z_p, H^*M) \xrightarrow{(j')^*} \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p, H^*K) \xrightarrow{(i')^*} \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p, H^*M) = 0$$

两个右边的群由 (1) 都为零而两个左边的群也都为零, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q+r}(Z_p, Z_p) = 0$ 当 $r = 1, 2$ (参见第 5 章) 而 $\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q+r}(Z_p, Z_p) = 0$ 当 $r = 2, 3$ (参见第 5 章定理 5.4.1), 因此结论得出.

(3) 考查以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列

$$\xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+2q}(Z_p, H^*M) \xrightarrow{(j')^*} \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q-1}(Z_p, H^*K) \xrightarrow{(i')^*} \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q-1}(Z_p, H^*M) \xrightarrow{\alpha^*}$$

左边的群为零, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+2q+r}(Z_p, Z_p) = 0$ 当 $r = 0, 1$ (参见第 5 章). 右边的群有唯一生成元 $j^*(h_0h_n)$, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q-1}(Z_p, Z_p) = 0$ 而 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q}(Z_p, Z_p) \cong Z_p\{h_0h_n\}$. 另外, 我们推断 $\alpha^*j^*(h_0h_n) = \frac{1}{2} \cdot j^*(\widetilde{\alpha}_2h_n) \neq 0 \in \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+2q}(Z_p, H^*M)$. 为了证明这一点, 只要证明 $\alpha^*j^*(h_0) = \frac{1}{2}j^*(\widetilde{\alpha}_2) \in \mathrm{Ext}_A^{2,2q}(Z_p, H^*M)$. 由于 $i^*\alpha^*j^*(h_0) = \alpha_1^*(h_0) = h_0^2 = 0$, 因此 $\alpha^*j^*(h_0) = \lambda j^*(\widetilde{\alpha}_2)$ 某个系数 $\lambda \in Z_p$. 由于等式两边的元素都发觉同伦群的相应元素, 因此关系式 $\alpha_1j\alpha = \frac{1}{2}\alpha_2j$ 蕴涵 $\lambda = \frac{1}{2}$. 这证明了以上推断从而以上的 α^* 单射, im $(i')^* = 0$, 从而我们有 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q-1}(Z_p, H^*K) = 0$. $t = 0$ 的情况的证明是类似的.

对于第二个结果, 观察以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+2q+1}(Z_p,H^*M)&\xrightarrow{(j')^*}\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q}(Z_p,H^*K)\\&\xrightarrow{(i')^*}\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q}(Z_p,H^*M)\xrightarrow{\alpha^*}\end{aligned}$$

左边的群有唯一生成元 $j_*\alpha_*\alpha_*(\tilde{h}_n)=j_*\alpha_*\alpha^*(\tilde{h}_n)$, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+2q+1}(Z_p,Z_p)$ 有唯一生成元 $\widetilde{\alpha}_2h_n=j_*\alpha_*\alpha_*i_*(h_n)=i^*j_*\alpha_*\alpha_*(\tilde{h}_n)$ 而 $\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+2q+2}(Z_p,Z_p)=0$ (参见第 5 章定理 5.4.1), 因此 $\mathrm{im}\,(j')^*=0$. 右边的群有唯一生成元 $j_*\alpha_*(\tilde{b}_{n-1})$, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q}(Z_p,Z_p)$ 有唯一生成元 $h_0b_{n-1}=j_*\alpha_*i_*(b_{n-1})=j_*\alpha_*i^*(\tilde{b}_{n-1})$ 而 $\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q+1}(Z_p,Z_p)=0$ (参见定理 5.4.1). 另外, $\alpha^*j_*\alpha_*\cdot(\tilde{b}_{n-1})=j_*\alpha_*\alpha_*(\tilde{b}_{n-1})\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{4,p^nq+2q+1}(Z_p,H^*M)$, 这是因为 $i^*j_*\alpha_*\alpha_*\cdot(\tilde{b}_{n-1})=\widetilde{\alpha}_2b_{n-1}\neq 0$ (参见命题 9.5.2(2)). 因此以上的 α^* 单射, $\mathrm{im}\,(i')^*=0$ 从而中间的群如所求的为零. 证毕.

命题 9.7.7 设 $p\geqslant 3,n\geqslant 2$, 则

(1) $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq}(Z_p,H^*X)=0$, $\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p,H^*X)=0$.

(2) $\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q}(H^*X,H^*K)\cong Z_p\{w_*(h_0b_{n-1})'\}$.

(3) $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+q-1}(H^*X,Z_p)\cong Z_p\{\tau_*(h_n)\}$,

其中 X 是上纤维序列 (9.3.7) 中的谱, $\tau:\Sigma^{q-1}S\to X$ 是映射使满足 $u\tau=i'i:S\to K$, 由 $\alpha''i'i=0$ 和 (9.3.7) 所得出.

证 (1) 考查以下两个由 (9.3.7) 导出的恰当序列:

$$\begin{aligned}0=\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q-1}(Z_p,H^*K)&\xrightarrow{u^*}\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq}(Z_p,H^*X)\\&\xrightarrow{w^*}\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq}(Z_p,H^*K)=0\\0=\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q}(Z_p,H^*K)&\xrightarrow{u^*}\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p,H^*X)\\&\xrightarrow{w^*}\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p,H^*K)=0\end{aligned}$$

由命题 9.7.6(2), (3), 两边的四个群都为零. 因此结论得出.

(2) 我们推断 $\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq+1}(H^*K,H^*K)=0(\ s=2,3)$, 因此结果由以下 (9.3.7) 导出的恰当序列得出:

$$\begin{aligned}\xrightarrow{(\alpha'')_*}\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q}(H^*K,H^*K)&\xrightarrow{w_*}\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q}(H^*X,H^*K)\\&\xrightarrow{u_*}\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(H^*K,H^*K)=0\end{aligned}$$

其中左边的群有唯一生成元 $(h_0b_{n-1})'$(参见命题 9.7.5(1)). 为证明以上推断, 观察以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列

$$\begin{aligned}\xrightarrow{\alpha^*}\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq+q+2}(H^*K,H^*M)&\xrightarrow{(j')^*}\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq+1}(H^*K,H^*K)\\&\xrightarrow{(i')^*}\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq+1}(H^*K,H^*M)\xrightarrow{\alpha^*}\end{aligned}$$

右边的群当 $s=2,3$ 时为零 (参见命题 9.7.5(1)) 而左边的群由命题 9.3.2(2) 为零. 这证明了以上推断.

(3) 由于 $\alpha'' i' i = 0$, 因此, 由 (9.3.7), 存在 $\tau \in \pi_{q-1}X$ 使得 $u\tau = i'i : S \to K$. 考查以下由 (9.3.7) 导出的恰当序列

$$0 = \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+q-1}(H^*K, Z_p) \xrightarrow{w_*} \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+q-1}(H^*X, Z_p)$$
$$\xrightarrow{u_*} \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*K, Z_p) \xrightarrow{\alpha''_*}$$

左边的群为零, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{1,t}(Z_p, Z_p) = 0$ 当 $t \equiv -1, -2 \pmod q$. 右边的群有唯一生成元 $(i'i)_*(h_n)$ 使满足 $\alpha''_*(i'i)_*(h_n) = 0$, 因此中间的群有唯一生成元 $\tau_*(h_n)$ 使满足 $u_*\tau_*(h_n) = (i'i)_*(h_n)$. 证毕.

由于 $u\tau \cdot p = i'i \cdot p = 0$, 因此由 (9.3.7) 可得 $\tau \cdot p = wi'i\alpha_1$ (相差非零系数), 这是因为 $\pi_{q-1}K \cong Z_p\{i'i(\alpha_1)\}$. 因此, 由 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+1}(H^*K, Z_p) = 0$(参见命题 9.7.5(1)) 以及 (9.3.7) 导出的 Ext 群恰当序列我们有

(9.7.8) $$\tau_*(a_0b_{n-1}) = \tau_*p_*(b_{n-1}) = w_*(i'i)_*(\alpha_1)_*(b_{n-1})$$
$$= w_*(i'i)_*(h_0b_{n-1}) \neq 0 \in \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q}(H^*X, Z_p).$$

命题 9.7.9 设 $p \geqslant 3, n \geqslant 2$, 则

(1) $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+q-1}(H^*K, H^*K) = 0$, $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*K, H^*X) = 0$.

(2) $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq-q+1}(H^*K, H^*X) \cong Z_p\{u^*(h_n)'\}$.

(3) $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q}(H^*X, Z_p) \cong Z_p\{w_*(i'i)_*(h_0h_n)\}$.

(4) $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+1}(H^*X, H^*K) = 0$.

证 (1) 考查以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列

$$\xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+2q}(H^*K, H^*M) \xrightarrow{(j')^*} \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+q-1}(H^*K, H^*K)$$
$$\xrightarrow{(i')^*} \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+q-1}(H^*K, H^*M)$$

右边的群为零, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq-2}(H^*M, H^*M) = 0$, $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+q-1}(H^*M, H^*M) = 0$, 由 $\mathrm{Ext}_A^{1,t}(Z_p, Z_p) = 0$ 当 $t \equiv -1, -2 \pmod q$ 以及 $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+q+t}(Z_p, Z_p) = 0$ 当 $t = -1, 0, 1$ 所得出. 左边的群也为零, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+q-1}(H^*M, H^*M) = 0$ 和 $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+2q}(H^*M, H^*M) = 0$ 由与上面相同的理由所得出. 因此中间的群为零.

第二个结果由以下由 (9.3.7) 导出的恰当序列得出:

$$0 = \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+q-1}(H^*K, H^*K) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*K, H^*X)$$
$$\xrightarrow{w^*} \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*K, H^*K) \xrightarrow{(\alpha'')^*}$$

其中右边的群有唯一生成元 $(h_n)'$ 使满足 $(\alpha'')^*(h_n)' = (h_0h_n)'' \neq 0 \in \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q-1}(H^*K, H^*K)$ (参见 (9.3.8)).

(2) 考查以下由 (9.1.2) 导出的恰当序列

$$\xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+2}(H^*K,H^*M) \xrightarrow{(j')^*} \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq-q+1}(H^*K,H^*K)$$
$$\xrightarrow{(i')^*} \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq-q+1}(H^*K,H^*M) \xrightarrow{\alpha^*}$$

左边的群为零, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq-q+1}(H^*M,H^*M)=0$ 以及 $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+2}(H^*M,H^*M)=0$. 由 $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq-q+t}(Z_p,Z_p)=0$ 当 $t=0,1,2$ 以及 $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+t}(Z_p,Z_p)=0$ $(t=1,2)$ 所得出. 右边的群也为零, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq-2q}(H^*M,H^*M)=0$ 以及 $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq-q+1}$
$(H^*M,H^*M)=0$. 因此我们有 $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq-q+1}(H^*K,H^*K)=0$.

所要的结果可由以下由 (9.3.7) 导出的恰当序列得出:

$$\xrightarrow{(\alpha'')^*} \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*K,H^*K) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq-q+1}(H^*K,H^*X)$$
$$\xrightarrow{w^*} \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq-q+1}(H^*K,H^*K)=0$$

其中左边的群有唯一生成元 $(h_n)'$ (参见命题 9.3.6).

(3) 考查以下由 (9.3.7) 导出的恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+1}(H^*K,Z_p) \xrightarrow{\alpha''_*} \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q}(H^*K,Z_p) \xrightarrow{w_*}$$
$$\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q}(H^*X,Z_p) \xrightarrow{u_*} \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+1}(H^*K,Z_p)=0$$

右边的群由命题 9.7.5(1) 为零而左边的群有唯一生成元 $(i'i)_*(h_0h_n)$, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{2,(p^nq+q}Z_p,Z_p)\cong Z_p\{h_0h_n\}$, 并且 $\mathrm{Ext}_A^{2,t}(Z_p,Z_p)=0$ 当 $t\equiv -1,-2 \pmod q$. 另外, $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+1}(H^*K,Z_p)=0$, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+1}(H^*M,Z_p)$=0 (参见命题 9.7.5(1) 的证明) 以及 $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq-q}(H^*M,Z_p)=0$ (参见第 5 章), 因此 w_* 单射从而结论得出.

(4) 考查以下由 (9.3.7) 导出的恰当序列

$$0=\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+1}(H^*K,H^*K) \xrightarrow{w_*} \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+1}(H^*X,H^*K)$$
$$\xrightarrow{u_*} \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq-q+2}(H^*K,H^*K)=0$$

左边的群正如命题 9.7.7(2) 的证明中所指出的为零. 右边的群也为零, 这是因为 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+3}(H^*K,H^*M)=0$ 以及 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq-q+2}(H^*K,H^*M)=0$, 由 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+t}$ $(Z_p,Z_p)=0$ 当 $t=2,3$ 以及 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq-rq+t}(Z_p,Z_p)=0$ 当 $r=1,2$, $t=1,2,3$ 所得出. 因此, 中间的群为零. 证毕.

以下我们将着手证明本节的主要定理 9.7.4. 它将通过在一些谱的 Adams 分解 (9.2.9) 中进行推理来加以证明. 我们首先证明以下命题和两个引理.

命题 9.7.10 设 $p\geqslant 5, n\geqslant 2$, $(h_0h_n)''\in[\Sigma^{p^nq+q-1}K,KG_2\wedge K]$ 为 d_1 循环, 它表示元素 $(h_0h_n)''=(\alpha'')^*(h_n)'\in \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q-1}(H^*K,H^*K)$(参见 (9.3.8)), 则存在 $\eta''_{n,2}\in[\Sigma^{p^nq+q-1}K,E_2\wedge K]$ 以及 $(\eta''_{n,2})_Y\in[\Sigma^{p^nq+q-1}Y,E_2\wedge K]$ 使得 $(\bar b_2\wedge 1_K)\eta''_{n,2}=(\bar b_2\wedge 1_K)(\eta''_{n,2})_Y\cdot r=(h_0h_n)''\in[\Sigma^{p^nq+q-1}K,KG_2\wedge K]$ 其中 $r:K\to Y$ 为 (9.1.4) 中的映射.

证　将定理 9.3.9 应用到 $(\sigma, s, tq) = (h_n, 1, p^n q)$, 或者将 9.3 节中主要定理 B' 及其证明应用到 $(\sigma, \sigma') = (h_n, b_{n-1}), (s, tq) = (1, p^n q)$, 则有 $(\bar{c}_2 \wedge 1_K)(h_0 h_n)'' = 0$, 从而存在 $\eta''_{n,2} \in [\Sigma^{p^n q+q-1}K, KG_2 \wedge K]$ 使得 $(\bar{b}_2 \wedge 1_K)\eta''_{n,2} = (h_0 h_n)'' \in [\Sigma^{p^n q+q-1}K, KG_2 \wedge K]$. 对第二个结果, 注意到 $(h_0 h_n)'' i' i \in [\Sigma^{p^n q+q-1}S, KG_2 \wedge K] = 0$, 这是因为 $\pi_{p^n q+tq-u} KG_2 \cong \mathrm{Ext}_A^{2,p^n q+tq-u}(Z_p, Z_p) = 0$ 当 $t = 0, 1, u = 1, 2, 3$. 因此, 存在 $(h_0 h_n)''_Y \in [\Sigma^{p^n q+q-1}Y, KG_2 \wedge K]$ 使得 $(h_0 h_n)'' = (h_0 h_n)''_Y \cdot r$, 其中 $r : K \to Y$ 为 (9.1.4) 中的映射. 因此由定理 9.3.9 得出 $(\bar{c}_2 \wedge 1_K)(h_0 h_n)''_Y \cdot r = 0$, 从而由上纤维序列 (9.1.4) 有 $(\bar{c}_2 \wedge 1_K)(h_0 h_n)''_Y = f'_0 \epsilon = (1_{E_2} \wedge \epsilon \wedge 1_K)(1_Y \wedge f'_0) = 0$, 某个 $f'_0 \in [\Sigma^{p^n q+q}S, E_3 \wedge K]$, 其中我们用到 $\epsilon \wedge 1_K = \mu(i'i \wedge 1_K)(\epsilon \wedge 1_K) = 0$, 由 (9.1.26) 和上纤维序列 (9.1.4) 所得出. 因此, 存在 $(\eta''_{n,2})_Y \in [\Sigma^{p^n q+q-1}Y, E_2 \wedge K]$ 使得 $(\bar{b}_2 \wedge 1_K)(\eta''_{n,2})_Y = (h_0 h_n)''_Y \in [\Sigma^{p^n q+q-1}Y, KG_2 \wedge K]$. 证毕.

引理 9.7.11　设 $p \geqslant 5, n \geqslant 2$, 而 $(\eta''_n)_Y = (\bar{a}_0 \bar{a}_1 \wedge 1_K)(\eta''_{n,2})_Y \in [\Sigma^{p^n q+q-3}Y, K]$ 为命题 9.7.10 中得出的映射, 则 $w(\eta''_n)_Y \cdot r = \lambda' w(\zeta_{n-1} \wedge 1_K) + (\bar{a}_0 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \wedge 1_X) f''_1$, 某个 $f''_1 \in [\Sigma^{p^n q+q+1}K, E_4 \wedge X]$ 以及非零的 $\lambda' \in Z_p$, 其中 $\zeta_{n-1} \in \pi_{p^n q+q-3}S$ 是定理 9.5.1 中得出的映射, 它在 Adams 谱序列中由 $h_0 b_{n-1} \in \mathrm{Ext}_A^{3,p^n q+q}(Z_p, Z_p)$ 所表示.

证　由命题 9.7.10 以及 (9.3.8), (9.3.7), $(\bar{b}_2 \wedge 1_X)(1_{E_2} \wedge w)(\eta''_{n,2})_Y \cdot r = (1_{KG_2} \wedge w)(h_0 h_n)'' = (\bar{b}_2 \bar{c}_1 \wedge 1_X) g''$, 某个 $g'' \in [\Sigma^{p^n q+q-1}K, KG_1 \wedge X]$, 因此

(9.7.12)　　$(1_{E_2} \wedge w)(\eta''_{n,2})_Y \cdot r = (\bar{c}_1 \wedge 1_X) g'' + (\bar{a}_2 \wedge 1_X) f''_0$

某个 $f''_0 \in [\Sigma^{p^n q+q}K, E_3 \wedge X]$. d_1 循环 $(\bar{b}_3 \wedge 1_X) f''_0 \in [\Sigma^{p^n q+q}K, KG_3 \wedge X]$ 表示 $\mathrm{Ext}_A^{3,p^n q+q}(H^*X, H^*K)$ 中一个元素, 而这个群有唯一生成元 $w_*[h_0 b_{n-1} \wedge 1_K]$ (参见命题 9.7.7(2)), 因此

$$\begin{aligned}(\bar{b}_3 \wedge 1_X) f''_0 &= \lambda'(1_{KG_3} \wedge w)(h_0 b_{n-1} \wedge 1_K) + (\bar{b}_3 \bar{c}_2 \wedge 1_X)\tilde{g}_0 \\ &= \lambda'(\bar{b}_3 \wedge 1_X)(1_{E_3} \wedge w)(\zeta_{n-1,3} \wedge 1_K) + (\bar{b}_3 \bar{c}_2 \wedge 1_X)\tilde{g}_0\end{aligned}$$

某个 $\lambda' \in Z_p$ 以及 $\tilde{g}_0 \in [\Sigma^{p^n q+q}K, KG_2 \wedge X]$, 其中我们用到 $(\bar{b}_3 \wedge 1_K)(\zeta_{n-1,3} \wedge 1_K) = h_0 b_{n-1} \wedge 1_K$ (参见定理 9.5.1) . 因此, $f''_0 = \lambda'(1_{E_3} \wedge w)(\zeta_{n-1,3} \wedge 1_K) + (\bar{c}_2 \wedge 1_X)\tilde{g}_0 + (\bar{a}_3 \wedge 1_X) f''_1$, 某个 $f''_1 \in [\Sigma^{p^n q+q+1}K, E_4 \wedge X]$, 从而有 $(\bar{a}_2 \wedge 1_X) f''_0 = \lambda'(\bar{a}_2 \wedge 1_X)(1_{E_3} \wedge w)(\zeta_{n-1,3} \wedge 1_K) + (\bar{a}_2 \bar{a}_3 \wedge 1_X) f''_1$, 并且 (9.7.12) 变成为

(9.7.13)$(1_{E_2} \wedge w)(\eta''_{n,2})_Y \cdot r = (\bar{c}_1 \wedge 1_X) g''$

$$+\lambda'(\bar{a}_2 \wedge 1_X)(1_{E_3} \wedge w)(\zeta_{n-1,3} \wedge 1_K) + (\bar{a}_2 \bar{a}_3 \wedge 1_X) f''_1$$

某个 $g'' \in [\Sigma^{p^n q+q-1}K, KG_1 \wedge X]$, $f''_1 \in [\Sigma^{p^n q+q+1}K, E_4 \wedge X]$ 以及 $\lambda' \in Z_p$.

为了证明引理, 只需证 (9.7.13) 中的系数 λ' 非零. 现在反设 $\lambda' = 0$, 因此由 (9.7.13), (9.1.4) 可得

(9.7.14)　　$(\bar{a}_2 \bar{a}_3 \wedge 1_X) f''_1 i' i = -(\bar{c}_1 \wedge 1_X) g'' i' i$

如下面所证明的, 这将导出矛盾.

d_1 循环 $g''i'i \in \pi_{p^nq+q-1}KG_1 \wedge X$ 表示 $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq+q-1}(H^*X, Z_p) \cong Z_p\{\tau_*(h_n)\}$ (参见命题 9.7.7(3)) 中的一个元素. 因此 $g''i'i = \lambda_0(1_{KG_1} \wedge \tau)(h_n)$, 其中 $h_n \in \pi_{p^nq}KG_1 \cong \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(Z_p, Z_p)$ 而 $\lambda_0 \in Z_p$. 因此 (9.7.14) 变成为

(9.7.15) $$(\bar{a}_2\bar{a}_3 \wedge 1_X)f_1''i'i = -\lambda_0(\bar{c}_1 \wedge 1_X)(1_{KG_1} \wedge \tau)(h_n)$$

等式 (9.7.15) 意味着二阶微分 $-\lambda_0 d_2(\tau_*(h_n)) = 0$. 可是, 由 [12] p.11 定理 1.2.14, $d_2(h_n) = a_0b_{n-1} \neq 0 \in \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p, Z_p)$, 其中 $d_2 : \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(Z_p, Z_p) \to \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p, Z_p)$ 是 Adams 谱序列的二阶微分. 这蕴涵了 $d_2(\tau_*(h_n)) = \tau_* d_2(h_n) = \tau_*(a_0b_{n-1}) = w_*(i'i)_*(h_0b_{n-1}) \neq 0 \in \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q}(H^*X, Z_p)$ (参见 (9.7.8)). 因此证得 $\lambda_0 = 0$, 从而由 (9.7.15) 我们有 $(\bar{a}_2\bar{a}_3 \wedge 1_X)f_1''i'i = 0$.

随之有 $(\bar{a}_3 \wedge 1_X)f_1''i'i = (\bar{c}_2 \wedge 1_X)g_2'' = 0$, 其中 d_1 循环 $g_2'' \in \pi_{p^nq+q}KG_2 \wedge X$ 表示 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q}(H^*X, Z_p) \cong Z_p\{w_*(i'i)_*(h_0h_n)\}$ (参见命题 9.7.9(3)) 中的一个元素, 而这个群的生成元由定理 9.5.1 可知在 Adams 谱序列中是永久循环, 从而有 $(\bar{c}_2 \wedge 1_X)g_2'' = 0$. 因此有 $f_1''i'i = (\bar{c}_3 \wedge 1_X)g_3'' = (\bar{c}_3 \wedge 1_X)g_4''i'i$, 某个 $g_3'' \in \pi_{p^nq+q+1}KG_3 \wedge X$ 以及 $g_4'' \in [\Sigma^{p^nq+q+1}K, KG_3 \wedge X]$, 这是因为 $g_3'' \cdot \epsilon = 0$, 由 $\epsilon : Y \to \Sigma S$ 导出 Z_p- 上同调群的零同态所得出. 随之有, $f_1'' = (\bar{c}_3 \wedge 1_X)g_4'' + f_2''r$, 某个 $f_2'' \in [\Sigma^{p^nq+q+1}Y, E_4 \wedge X]$ 而 $(\bar{a}_2\bar{a}_3 \wedge 1_X)f_1'' = (\bar{a}_2\bar{a}_3 \wedge 1_X)f_2''r$. 因此, 若 $\lambda' = 0$, 则 (9.7.13) 变成

$$(1_{E_2} \wedge w)(\eta_{n,2}'')_Y \cdot r = (\bar{a}_2\bar{a}_3 \wedge 1_X)f_2''r + (\bar{c}_1 \wedge 1_X)g_5''r$$

其中 $g_5'' \in [\Sigma^{p^nq+q-1}Y, KG_2 \wedge X]$ 使得 $g_5''r = g''$. 最后, 由上式可得

(9.7.16) $$(1_{E_2} \wedge w)(\eta_{n,2}'')_Y = (\bar{a}_2\bar{a}_3 \wedge 1_X)f_2'' + (\bar{c}_1 \wedge 1_X)g_5'' + f_3''\epsilon$$

某个 $f_3'' \in \pi_{p^nq+q}E_2 \wedge X$. 由于 $\epsilon : Y \to \Sigma S$ 导出 Z_p- 上同调群的零同态, 因此 (9.7.16) 的右式具有 filtration $\geqslant 3$. 可是, $(\eta_n'')_Y = (\bar{a}_0\bar{a}_1 \wedge 1_K)(\eta_{n,2}'')_Y$ 具有 filtration 2, 因为它由 $(h_0h_n)_Y'' \in \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q-1}(H^*K, H^*Y)$ 所表示. 另外, 以下由 (9.3.7) 导出的恰当序列

$$0 = \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*K, H^*Y) \xrightarrow{\alpha_*''} \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q-1}(H^*K, H^*Y)$$
$$\xrightarrow{w_*} \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q-1}(H^*X, H^*Y) \xrightarrow{(\alpha'')_*}$$

指出 $w_*(h_0h_n)_Y'' \neq 0$, 这是因为左边的群由命题 9.7.5(3) 为零. 这就是说 $(1_{E_2} \wedge w)(\eta_n'')_Y$ 具有 filtration 2, 它在 Adams 谱序列中由 $w_*(h_0h_n)_Y''$ 所表示. 这证明了等式 (9.7.16) 是一个矛盾, 从而 (9.7.13) 中的 λ' 必须非零. 证毕.

引理 9.7.17 设 $w : K \to X$ 为上纤维序列 (9.3.7) 中的映射而 W 是 $wi'i : S \to X$ 的上纤维, 由上纤维序列 $S \xrightarrow{wi'i} X \xrightarrow{w_1} W \xrightarrow{u_1} \Sigma S$ 所给出, 则

(1) $\mathrm{Ext}_A^{s-1,p^nq+q+s-3}(H^*W, Z_p) = 0$ 当 $s = 1,3$ 而当 $s = 2$ 时有唯一生成元 $(w_1)_*\tau_*(h_n) = (\tau)^*(w_1)_*[h_n \wedge 1_X]$.

(2) $\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*W, H^*X) \cong Z_p\{(w_1)_*(h_n)_X' = (w_1)_*[h_n \wedge 1_X]\}$.

(3) $(w_1)_*[a_0b_{n-1}\wedge 1_X]\neq 0\in \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(H^*W,H^*X)$.

证　(1) 注意到 W 也是 $r\alpha'':\Sigma^{q-2}K\to Y$ 的上纤维, 这可由以下稳定同伦范畴中的 3×3 引理的同伦可换图形看出:

$$\begin{array}{ccccccc}
S & \xrightarrow{wi'i} & X & \xrightarrow{u} & \Sigma^{q-1}K \\
\searrow i'i & & \nearrow w \quad \searrow w_1 & & \nearrow u_2 \\
& K & & W & \\
\nearrow \alpha'' & & \searrow r \quad \nearrow w_2 & & \searrow u_1 \\
\Sigma^{q-2}K & \xrightarrow{r\alpha''} & Y & \xrightarrow{\epsilon} & \Sigma S
\end{array}$$

即我们有上纤维序列

$\Sigma^{q-2}K\xrightarrow{r\alpha''}Y\xrightarrow{w_2}W\xrightarrow{u_2}\Sigma^{q-1}K$ 并且它导出以下恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{s-1,p^nq+q+s-3}(H^*Y,Z_p)\xrightarrow{(w_2)_*}\mathrm{Ext}_A^{s-1,p^nq+q+s-3}(H^*W,Z_p)$$
$$\xrightarrow{(u_2)_*}\mathrm{Ext}_A^{s-1,p^nq+s-2}(H^*K,Z_p)\xrightarrow{(r\alpha'')_*}$$

左边的群当 $s=1,2,3$ 时为零 (参见命题 9.7.5(2)). 右边的群当 $s=1,3$ 时为零 (参见命题 9.7.5(1)) 而当 $s=2$ 时有唯一生成元 $(i'i)_*(h_n)=u_*\tau_*(h_n)=(u_2)_*(w_1)_*(\tau)_*(h_n)$. 因此结论得出.

(2) 考查以下恰当序列

$$\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*X,H^*X)\xrightarrow{(w_1)_*}\mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*W,H^*X)$$
$$\xrightarrow{(u_1)_*}\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq}(Z_p,H^*X)=0$$

右边的群由命题 9.7.7(1) 为零而由命题 9.7.9(2)(1) 我们可以得出左边的群有唯一生成元 $(h_n)'_X=[h_n\wedge 1_X]$ 使满足 $u_*(h_n)'_X=u^*(h_n)'\in \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq-q+1}(H^*K,H^*X)$. 因此, 中间的群有唯一生成元 $(w_1)_*(h_n)'_X$.

(3) 由于 $\alpha'':\Sigma^{q-2}K\to K$ 不是一个 M 模谱映射, 因此作为 α'' 的上纤维, 谱 X 不是一个 M 模谱, 即映射 $p\wedge 1_X\neq 0\in [X,X]$. 因此 $[a_0\wedge 1_X]=(p\wedge 1_X)_*[\tau\wedge 1_X]\neq 0\in \mathrm{Ext}_A^{1,1}(H^*X,X^*X)$ (其中 τ 为 π_0KG_0 中的单位), 从而 $[a_0b_{n-1}\wedge 1_X]=(p\wedge 1_X)_*[b_{n-1}\wedge 1_X]=[a_0\wedge 1_X][b_{n-1}\wedge 1_X]\neq 0\in \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(H^*X,X^*X)$ 可由 $a_0b_{n-1}\neq 0\in \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p,Z_p)$ 利用 Yoneda 乘积得出. 注意到以下恰当序列

$$0=\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(Z_p,H^*X)\xrightarrow{(wi'i)_*}\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(H^*X,H^*X)$$
$$\xrightarrow{(w_1)_*}\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(H^*W,H^*X)$$

中左边的群由命题 9.7.7(1) 为零, 因此 $(w_1)_*$ 单射, 从而结论得出. 证毕.

注　引理 9.7.17(3) 中有关 $[a_0b_{n-1}\wedge 1_X]\neq 0$ 的结论还可以由 Ext 的计算而证明如下. 反设 $(p\wedge 1_X)_*[b_{n-1}\wedge 1_X]=[a_0b_{n-1}\wedge 1_X]=0$, 则由 (1.1), $[b_{n-1}\wedge 1_X]=(j\wedge 1_X)_*(x_1)$, 某个 $x_1\in \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+1}(H^*M\wedge X,H^*X)$. 注意到 X 是 (9.3.7)

中的谱, 因此有 $w^*(1_M\wedge u)_*(x_1)\in \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq-q+1}(H^*M\wedge K,H^*K)=0$, 这可由 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq-q+1}(H^*M\wedge K,H^*M)=0$ 和 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+2}(H^*M\wedge K,H^*M)=0$ 得出. 再由 (9.3.7) 导出的 Ext 群的恰当序列, 可得 $(1_M\wedge u)_*(x_1)\in u^*\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+1}(H^*M\wedge K,H^*K)$. 但是这个群有唯一生成元 $(\overline{m}_K)_*(b_{n-1})'$, 因此 $(1_M\wedge u)_*(x_1)=\lambda u^*(\overline{m}_K)_*(b_{n-1})'$, 某个 $\lambda\in Z_p$. 再作用于 $(1_M\wedge\alpha'')_*$ 可得出 $\lambda u^*(1_M\wedge\alpha'')_*(\overline{m}_K)_*(b_{n-1})'=0$, 从而有 $\lambda(1_M\wedge\alpha'')_*(\overline{m}_K)_*(b_{n-1})'\in(\alpha'')^*\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+1}(H^*M\wedge K,H^*K)$. 因此 $\lambda(\alpha_1\wedge 1_K)_*(b_{n-1})'=\lambda(m_K)_*(1_M\wedge\alpha'')_*(\overline{m}_K)_*(b_{n-1})'=0$ 从而得出 $\lambda=0$. 因此 $x_1=(1_M\wedge w)_*(x_2)$, 某个 $x_2\in\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+1}(H^*M\wedge K,H^*X)$. 类似可证 $w^*(x_2)=0$. 因此 $x_1\in u^*(1_M\wedge w)_*\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q}(H^*M\wedge K,H^*K)$. 可是, $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q}(H^*M\wedge K,H^*K)$ 有两个生成元 $(i\wedge 1_K)_*(h_0h_n)'$ 和 $(\overline{m}_K)_*(h_0h_n)''$, 而 $u^*(h_0h_n)''=u^*(\alpha'')^*(h_n)'=0$, 因此有 $x_1=u^*(1_M\wedge w)_*(i\wedge 1_K)_*(h_0h_n)'$(相差系数), 从而有 $[b_{n-1}\wedge 1_X]=(j\wedge 1_X)_*(x_1)=0$. 这是一个矛盾, 从而证明了 $[a_0b_{n-1}\wedge 1_X]\neq 0\in\mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+1}(H^*X,X^*X)$.

定理 9.7.4 的证明 当 $n=0,1$ 时结论是已知的, 因此我们假设 $n\geqslant 2$. 由引理 9.7.11 和 (9.1.4) 我们有

(9.7.18) $$\lambda' wi'i\zeta_{n-1}=\lambda' w(\zeta_{n-1}\wedge 1_K)i'i=-(\bar a_0\bar a_1\bar a_2\bar a_3\wedge 1_X)f_1''i'i$$

由引理 9.7.17 中的上纤维序列可得 $(\bar a_0\bar a_1\bar a_2\bar a_3\wedge 1_W)(1_{E_4}\wedge w_1)f_1''i'i=0$, 从而有 $(\bar a_0\bar a_1\bar a_2\bar a_3\wedge 1_W)(1_{E_4}\wedge w_1)f_1''u=k\tau'$, 某个 $k\in[\Sigma^{p^nq-2}X',W]$, 其中 $i'i=u\tau:\Sigma^{q-1}S\xrightarrow{\tau}X\xrightarrow{u}\Sigma^{q-1}K$, 由 $\alpha''i'i=0$ 以及 (9.3.7) 所得出, 而 $\tau':X\to X'$ 是以下上纤维序列中的映射:

(9.7.19) $$\Sigma^{q-1}S\xrightarrow{\tau}X\xrightarrow{\tau'}X'\xrightarrow{\tau''}\Sigma^qS.$$

我们推断 $k\in[\Sigma^{p^nq-2}X',W]$ 具有 filtration $\geqslant 4$, 这可证明如下.

由引理 9.7.17(1) 以及 (9.7.18), 我们有 $(\tau'')^*\mathrm{Ext}_A^{s-1,p^nq+q+s-3}(H^*W,Z_p)=0\subset\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq+s-2}(H^*W,H^*X')$, 从而有 $(\tau')^*:\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq+s-2}(H^*W,H^*X')\to\mathrm{Ext}_A^{s,p^nq+s-2}(H^*W,H^*X)$ 当 $s=1,2,3$ 时单射. 因此, 关于 $k\tau'$ 具有 filtration $\geqslant 4$ 的事实蕴涵 $k\in[\Sigma^{p^nq-2}X',W]$ 也具有 filtration $\geqslant 4$. 这证明了以上推断, 从而有 $k=(\bar a_0\bar a_1\bar a_2\bar a_3\wedge 1_W)k_3$, 某个 $k_3\in[\Sigma^{p^nq+2}X',E_4\wedge W]$ 并且 $(\bar a_0\bar a_1\bar a_2\bar a_3\wedge 1_W)(1_{E_4}\wedge w_1)f_1''u=(\bar a_0\bar a_1\bar a_2\bar a_3\wedge 1_W)k_3\tau'$. 随之有

(9.7.20) $$\begin{aligned}(\bar a_2\bar a_3\wedge 1_W)(1_{E_4}\wedge w_1)f_1''u&=(\bar a_2\bar a_3\wedge 1_W)k_3\tau'+(\bar c_1\wedge 1_W)\bar g\\&=(\bar a_2\bar a_3\wedge 1_W)k_3\tau'+\lambda_1(\bar c_1\wedge 1_W)(1_{KG_1}\wedge w_1)(h_n\wedge 1_X)\end{aligned}$$

其中 d_1 循环 $\bar g=\lambda_1(1_{KG_1}\wedge w_1)(h_n\wedge 1_X)\in[\Sigma^{p^nq}X,KG_1\wedge W]$, 某个 $\lambda_1\in Z_p$ 由引理 9.7.17(2) 所得出.

等式 (9.7.20) 意味着二阶微分 $d_2(\lambda_1(w_1)_*[h_n\wedge 1_X])=0$. 可是, $d_2((w_1)_*[h_n\wedge 1_X])=(w_1)_*[a_0b_{n-1}\wedge 1_X]\neq 0$ (参见引理 9.7.17(3)). 因此, 系数 $\lambda_1=0$ 并且我们有 $\bar g=0$, $(\bar a_2\bar a_3\wedge 1_W)(1_{E_4}\wedge w_1)f_1''u=(\bar a_2\bar a_3\wedge 1_W)k_3\tau'$ 以及 $(\bar a_2\bar a_3\wedge 1_K)(1_{E_4}\wedge u)f_1''i'i=(\bar a_2\bar a_3\wedge 1_K)(1_{E_4}\wedge u_2w_1)f_1''u\tau=0$. 随之我们有 $(\bar a_3\wedge 1_K)(1_{E_4}\wedge u)f_1''i'i=(\bar c_2\wedge 1_K)\bar g_2=$

0, 这是因为 d_1 循环 $\bar{g}_2 \in \pi_{p^nq+1}KG_2 \wedge K$ 表示 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+1}(H^*K, Z_p) = 0$ (参见命题 9.7.5(1)) 中的元素. 因此, $(1_{E_4} \wedge u)f_1''i'i = (\bar{c}_3 \wedge 1_K)\bar{g}_3$, 某个 $\bar{g}_3 \in [\Sigma^{p^nq+2}S, KG_3 \wedge K]$. 由于 $(1_{KG_3} \wedge \alpha'')\bar{g}_3 = 0$, 因此 $\bar{g}_3 = (1_{KG_3} \wedge u)\bar{g}_4$, 某个 $\bar{g}_4 \in [\Sigma^{p^nq+q+1}S, KG_3 \wedge X]$, 从而我们有 $(1_{E_4} \wedge u)f_1''i'i = (\bar{c}_3 \wedge 1_K)(1_{KG_3} \wedge u)\bar{g}_4$, $f_1''i'i = (\bar{c}_3 \wedge 1_X)\bar{g}_4 + (1_{E_4} \wedge w)\bar{f}_2$, 某个 $\bar{f}_2 \in [\Sigma^{p^nq+q+1}S, E_4 \wedge K]$.

因此, 由 (9.7.18) 我们有 $\lambda' w i' i \zeta_{n-1} = -(\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3 \wedge 1_X)f_1''i'i = -(\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3 \wedge 1_X)(1_{E_4} \wedge w)\bar{f}_2$. 而由 (9.3.7), $\lambda' i' i \zeta_{n-1} = -(\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3 \wedge 1_K)\bar{f}_2 + \alpha''\omega_n$, 某个 $\omega_n \in \pi_{p^nq-1}K$. 由于 $\lambda' i' i \zeta_{n-1}$ 是具有 filtration 3 的映射, 它在 Adams 谱序列中由 $\lambda'(i'i)_*(h_0 b_{n-1}) \in \mathrm{Ext}_A^{3,p^nq+q}(H^*K, Z_p)$ 所表示, 因此 $\alpha''\omega_n$ 具有 filtration 3, 从而 $\omega_n \in \pi_{p^nq-1}K$ 具有 filtration $\leqslant 2$. 可是, 由命题 9.7.5(1) 有 $\mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+1}(H^*K, Z_p) = 0$, 因此 $\omega_n \in \pi_{p^nq-1}K$ 必由唯一生成元 $(i'i)_*(h_n) \in \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*K, Z_p)$ 所表示 (相差非零系数). 证毕.

注　定理 9.7.4 中得出的元素 $\omega_n \in \pi_{p^nq-1}K$ 可扩张为 $(\omega_n)' \in [\Sigma^{p^nq-1}K, K]$ 使得 $(\omega_n)'i'i = \omega_n$. 因此, $(\omega_n)'$ 在 Adams 谱序列中由 $(h_n)' \in \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*K, H^*K)$ 所表示, 而 $\alpha''(\omega_n)'$, $(\omega_n)'\alpha'' \in [\Sigma^{p^nq+q-3}K, K]$ 由 $\alpha''_*(h_n)' = (\alpha'')^*(h_n)' = (h_0h_n)'' \in \mathrm{Ext}_A^{2,p^nq+q-1}(H^*K, H^*K)$ 所表示. 由定理 9.7.4 以及引理 9.7.11 , 我们有 $\alpha''(\omega_n)' = (\omega_n)'\alpha'' + \lambda'\zeta_{n-1} \wedge 1_K$ (模更高 filtration 的元素).

由 [10] p.511, 存在映射 $\phi_*\phi : BP_*BP \to A_*$ 使得 $t_n \mapsto \xi_n$ 的共轭, 其中 $A_* = E[\tau_0, \tau_1, \tau_2, \cdots] \otimes P[\xi_1, \xi_2, \cdots]$ 是 Steenrod 代数 A 的对偶. 因此 $\phi_*\phi$ 导出 Thom 映射 $\Phi : \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,p^nq}(BP_*, BP_*K) \to \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*K, Z_p)$ 使得 $h_n \in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,p^nq}(BP_*, BP_*K)$ 的像是 $\Phi(h_n) = (i'i)_*(h_n) \in \mathrm{Ext}_A^{1,p^nq}(H^*K, Z_p)$. 因此, 定理 9.7.4 中得出的 $\omega_n \in \pi_{p^nq-1}K$ 在 Adams-Novikov 谱序列中由 $h_n +$ 其他项 $\in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,p^nq}(BP_*, BP_*K)$ 所表示. 为了了解其他项都是些甚么元素, 我们先证明以下引理.

引理 9.7.21　由次数原因, $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,p^nq}(BP_*, BP_*K)$ (加法的) 由以下 v_2 挠元素 $c_2(p^{n-2})$ 和 v_2 挠自由元素 $h_n, v_2^{p^{n-2}(p-1)}h_{n-2}, v_2^{a_ip^i}h_i$ 所生成, 其中 $i \geqslant 0, a_i = (p^{2k}-1)/(p+1), n-i = 2k \geqslant 4$. 另外, 存在关系 $h_n = c_2(p^{n-2}) + v_2^{p^{n-2}(p-1)}h_{n-2} \in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,p^nq}(BP_*, BP_*K)$.

证　由文献 [19] 定理 1.1 和 1.5, $\mathrm{Ext}^{1,*}(BP_*, BP_*K)$ 是一个 $Z_p[v_2]$ 模, 它由 v_2 挠元素 $c_2(ap^s)$ 以及 v_2 挠自由元素 w_2, h_i 所生成, 其中 $a \neq 0 \pmod p$, $s \geqslant 0$ 而 $i \geqslant 0$. 另外, 内次数 $|h_i| = p^iq$, $|c_2(ap^s)| = ap^s(p^2+p+1)q - q(ap^s)(p+1)q$ 以及 $|w_2| = (p+1)^2q$.

由于 $|v_2^bw_2| \equiv 0 \pmod{(p+1)q}$, 因此 $|v_2^bw_2| \neq p^nq$. 如果 $|v_2^bh_i| = p^nq$, 则 $b(p+1)q + p^iq = p^nq, b(p+1) = p^i(p^{n-i}-1)$, 从而 $(p^{n-i}-1)$ 必可除予 $p+1$. 因此 $b = 0$ 且 $i = n$ 或者 $b = a_ip^i$, 某个 $a_i = (p^{2k}-1)/(p+1)$ 而 $n-i = 2k \geqslant 2$. 因此 $h_n, v_2^{p^{n-2}(p-1)}h_{n-2}$ 以及 $v_2^{a_ip^i}h_i (0 \leqslant i < n-2)$ 是 $\mathrm{Ext}^{1,p^nq}(BP_*, BP_*K)$ 的所有的挠

自由元素.

若 $|v_2^b c_2(ap^s)| = p^n q$, 则 $p^n q = ap^s(p^2+p+1)q - (q(ap^s)-b)(p+1)q$, $ap^s(p^2+p+1) = p^n + (q(ap^s)-b)(p+1)$, 从而右式必可除予 p^2+p+1. 因此我们有

(9.7.22) $$ap^s = p^{n-2} + \frac{(q(ap^s)-b-p^{n-2})(p+1)}{p^2+p+1}$$

我们推断: $s \leqslant n-2$(将在下面证明), 因此 $q(ap^s)-b$ 必可除予 p^s. 可是, 由 [19] p.132, $q(ap^s) = p^s$ 当 $a=1$ 而 $q(ap^s) = p^s +$ 其他项, 当 $a \geqslant 2$. 因此, 只可能有 $q(ap^s) = p^s, a=1, b=0$ 而 $s=n-2$. 这就是说, 仅有的 $\mathrm{Ext}^{1,p^n q}(BP_*, BP_*K)$ 中的 v_2- 挠元素是 $c_2(p^{n-2})$.

现在我们证明以上推断. 反设 $s \geqslant n-1$, 因此由 (9.7.22) 我们有

$$\frac{(q(ap^s)-b-p^{n-2})(p+1)}{p^2+p+1} = ap^s - p^{n-2} \geqslant p^s - p^{n-2},$$

$$2p^s > q(ap^s) - b - p^{n-2} \geqslant \frac{(p^s-p^{n-2})(p^2+p+1)}{p+1} > p^{s+1} - p^{n-1}$$

而这是一个矛盾. 因此证明了以上推断. 证毕.

定理 9.7.1 的证明 对于 Thom 映射 $\Phi: \mathrm{Ext}^{1,p^n q}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*K) \to \mathrm{Ext}^{1,p^n q}_A(H^*K, Z_p)$, 我们有 $\Phi(h_n) = (i'i)_*(h_n)$. 由此可知, 定理 9.7.4 得到的元素 $\omega_n \in \pi_{p^n q-1}K$ 在 Adams-Novikov 谱序列中由 $h_n +$ (其他项) $\in \mathrm{Ext}^{1,p^n q}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*K)$ 所表示. 由引理 9.7.21, 其他项是 $v_2^{p^{n-2}(p-1)} h_{n-2}$ 以及 $v_2^{a_i p^i} h_i$ 的线性组合, 其中 $i \geqslant 0, n-i = 2k \geqslant 4$ 而 $a_i = (p^{2k}-1)/(p+1)$. 设 $\beta \in [\Sigma^{(p+1)q}K, K]$ 为已知的 v_2- 映射, 则 $i'i\alpha_1 \in \pi_{q-1}K$ and $i'j'\beta i'i \in \pi_{pq-1}K$ 分别由 $h_0, h_1 \in \mathrm{Ext}^{1,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*K)$ 所表示. 即 $h_0, h_1 \in \mathrm{Ext}^{1,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*K)$ 在 Adams-Novikov 谱序列中是永久循环. 因此, 归纳假设 $h_i \in \mathrm{Ext}^{1,p^i q}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*K)$ 当 $i \leqslant n-1 (n \geqslant 2)$ 在 Adams-Novikov 谱序列中是永久循环. 由于 $\omega_n \in \pi_{p^n q-1}K, \omega_{n+1} \in \pi_{p^{n+1}q-1}K$ 在 Adams-Novikov 谱序列中分别由

$$h_n + v_2^{p^{n-2}(p-1)} h_{n-2} \text{ 与 } v_2^{a_i p^i} h_i \text{ 的线性组合} \in \mathrm{Ext}^{1,p^n q}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*K),$$

$$h_{n+1} + v_2^{p^{n-1}(p-1)} h_{n-1} \text{ 与 } v_2^{a_i p^i} h_i \text{ 的线性组合} \in \mathrm{Ext}^{1,p^{n+1} q}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*K)$$

所表示, 因此 $h_n, h_{n+1} \in \mathrm{Ext}^{1,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*K)$ 也是永久循环. 这完成了归纳法从而定理结论得出. 证毕.

猜想 9.7.23 定理 9.7.4 可以推广成以下一般性结果. 设 $p \geqslant 5, s \leqslant 4$, $\mathrm{Ext}^{s,tq}_A(Z_p, Z_p) \cong Z_p\{x\}$, $\mathrm{Ext}^{s+1,tq+q}_A(Z_p, Z_p) \cong Z_p\{h_0 x\}$, $\mathrm{Ext}^{s+2,tq+2q+1}_A(Z_p, Z_p) \cong Z_p\{\widetilde{\alpha}_2 x\}$ 并且还有一些 Ext 群为零的一些假设. 如果二阶微分 $d_2(x) = a_0 x' \in \mathrm{Ext}^{s+2,tq+1}_A(Z_p, Z_p)$, 某个 $x' \in \mathrm{Ext}^{s+1,tq}_A(Z_p, Z_p)$, 即 x 和 x' 是一对 a_0 相关元素, 则存在 $\omega \in \pi_{tq-s}K$ 使得 $i'i\xi = \alpha'' \cdot \omega$ (模 $F^{s+2}\pi_*K$) 并且 $\omega \in \pi_{tq-s}K$ 在 Adams 谱序列中由 $(i'i)_*(x) \in \mathrm{Ext}^{s,tq}_A(H^*K, Z_p)$ 所表示, 其中 $\xi \in \pi_{tq+q-s-2}S$ 是在 Adams 谱序列中

由 $h_0x' \in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+q}(Z_p, Z_p)$ 所表示的元素, 而 $F^{s+2}\pi_*K$ 表示同伦群 π_*K 中具有 filtration $\geqslant s+2$ 的所有元素所组成的群.

9.8 球面稳定同伦群的第二周期性元素族

由第 8 章定理 8.1.2, $\mathrm{Ext}^{1,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)$ 由 $\alpha_{tp^n/n+1}(n \geqslant 0, p$ 不整除 $t \geqslant 1)$ 所生成, 而且 Novikov 已经证明了这些第一周期性元素族 $\alpha_{tp^n/n+1}$ 全部收敛到 im $J \subset \pi_*S$. 本节中, 我们将以定理 9.5.1 得出的 h_0h_{n+1} 元素以及文献 [20], [21] 中的元素 $\beta_{p/r}, 1 \leqslant r \leqslant p-1$ 和元素 $\beta_{tp/r}, t \geqslant 2, 1 \leqslant r \leqslant p$ 作为几何输入, 证明球面稳定同伦群的第二周期性元素族 $\beta_{tp^n/r}$ 在 Adams-Novikov 谱序列收敛性的以下定理.

定理 9.8.1 设 $p \geqslant 5, n \geqslant 1, 1 \leqslant s \leqslant p^n - 1$ 当 p 不整除 $t \geqslant 1$ 或者 $1 \leqslant s \leqslant p^n$ 当 p 不整除 $t \geqslant 2$, 则定理 8.1.3 中的元素

$$\beta_{tp^n/s} \in \mathrm{Ext}^{2,tp^n(p+1)q-sq}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)$$

在 Adams-Novikov 谱序列中是永久循环, 并且它收敛到 $\pi_{tp^n(p+1)q-sq-2}S$ 的一个 p 阶元素.

以下我们将分别对 $t \geqslant 1$ 和 $t \geqslant 2$ 两种情况来证明定理 9.8.1. 它将通过在典则 Adams-Novikov 分解中进行推理来加以证明. 首先需要一些预备知识, 如下所述.

设 M 为 Moore 谱, 它的 BP_* 同调为 $BP_*(M) = BP_*/(p)$. 设 $\alpha : \Sigma^q M \to M$ 为已知的 (6.2.8) 中的映射. 它导出的 BP_* 同调的同态为 $v_1 : BP_*/(p) \to BP_*/(p)$. 设 K_r 为 $\alpha^r : \Sigma^{rq}M \to M$ 的上纤维, 由以下上纤维序列

$$\Sigma^{rq}M \xrightarrow{\alpha^r} M \xrightarrow{i'_r} K_r \xrightarrow{j'_r} \Sigma^{rq+1}M \tag{9.8.2}$$

给出. 上纤维序列 (9.8.2) 导出以下 BP_* 同调的短恰当序列

$$0 \to BP_*/(p) \xrightarrow{v_1^r} BP_*/(p) \longrightarrow BP_*/(p, v_1^r) \to 0$$

回顾 6.5 节, K_r 是一个 M 模谱, 并且 M 模谱之间的映射 i'_r, j'_r, α, ij 有如下的导数算子:

$$d(i'_r) = 0, \quad d(j'_r) = 0, \quad d(\alpha) = 0, \quad d(ij) = -1_M \tag{9.8.3}$$

另外, $i'_s j'_r : K_r \to \Sigma^{rq+1}K_s$ 的上纤维是 ΣK_{r+s}, 由以下上纤维序列

$$\Sigma^{rq}K_s \xrightarrow{\psi_{s,s+r}} K_{s+r} \xrightarrow{\rho_{s+r,r}} K_r \xrightarrow{i'_s j'_r} \Sigma^{rq+1}K_s \tag{9.8.4}$$

给出. 这可由以下 3×3 引理的同伦可换图形

$$\begin{array}{ccccccccc}
K_r & & \xrightarrow{i'_s j'_r} & & \Sigma^{rq+1}K_s & & \xrightarrow{j'_s} & & \Sigma^{(r+s)q+2}M \\
& \searrow j'_r & & \nearrow i'_s & & \searrow \psi_{s,r+s} & & \nearrow j'_{r+s} & & \searrow \alpha^s \\
& & \Sigma^{rq+1}M & & & & \Sigma K_{r+s} & & & & \Sigma^{rq+2}M \\
& \nearrow \alpha^s & & \searrow \alpha^r & & \nearrow i'_{r+s} & & \searrow \rho_{r+s,r} & & \nearrow j'_r \\
\Sigma^{(r+s)q+1}M & & \xrightarrow{\alpha^{r+s}} & & \Sigma M & & \xrightarrow{i'_r} & & \Sigma K_r
\end{array} \tag{9.8.5}$$

得出. 更进一步可得出, 上纤维序列 (9.8.4) 导出 BP_* 同调的以下短恰当序列

$$0 \to BP_*/(p, v_1^s) \xrightarrow{v_1^r} BP_*/(p, v_1^{s+r}) \longrightarrow BP_*/(p, v_1^r) \to 0$$

并且由同伦可换图 (9.8.5), 我们有以下关系式:

(9.8.6)
$$\psi_{s,s+r} i_s' = i_{s+r}' \alpha^r, \qquad j_r' \rho_{s+r,r} = \alpha^s j_{s+r}'$$
$$j_{s+r}' \psi_{s,s+r} = j_s', \qquad \rho_{s+r,r} i_{s+r}' = i_r'$$

命题 9.8.7 设 $p \geqslant 5$ 而 $f \in [\Sigma^t K_r, S]$ 为任意映射, 则 $f = jj_r'\overline{f}$, 某个 $\overline{f} \in [\Sigma^{t+rq+2} K_r, K_r]$.

证 由第 6 章定理 6.5.16(A), 存在 $\nu_r : \Sigma^{rq+2} K_r \to K_r \wedge K_r$ 使得 $(jj_r' \wedge 1_{K_r})\nu_r = 1_{K_r}$. 令 K_r' 为 $jj_r' : \Sigma^{-1} K_r \to \Sigma^{rq+1} S$ 的上纤维, 由上纤维序列 $\Sigma^{-1} K_r \xrightarrow{jj_r'} \Sigma^{rq+1} S \xrightarrow{z_r} K_r' \to K_r$ 给出, 则 $z_r \wedge 1_{K_r} = (z_r jj_r' \wedge 1_{K_r})\nu_r = 0 \in [\Sigma^{rq+1} K_r, K_r' \wedge K_r]$. 因此, $z_r f = (1_{K_r'} \wedge f)(z_r \wedge 1_{K_r}) = 0$, 从而有 $f = jj_r'\overline{f}$, 某个 $\overline{f} \in [\Sigma^{t+rq+1} K_r, K_r]$. 证毕.

设

(9.8.8)
$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \xrightarrow{\tilde{a}_2} & \Sigma^{-2}\widetilde{E}_2 & \xrightarrow{\tilde{a}_1} & \Sigma^{-1}\widetilde{E}_1 & \xrightarrow{\tilde{a}_0} & \widetilde{E}_0 = S \\
& \downarrow \tilde{b}_2 & & \downarrow \tilde{b}_1 & & \downarrow \tilde{b}_0 \\
& \Sigma^{-2} BP \wedge \widetilde{E}_2 & & \Sigma^{-1} BP \wedge \widetilde{E}_1 & & BP \wedge \widetilde{E}_0 = BP
\end{array}$$

为球谱 S 的典则 Adams-Novokov 分解, 其中 $\widetilde{E}_s \xrightarrow{\tilde{b}_s} BP \wedge \widetilde{E}_s \xrightarrow{\tilde{c}_s} \widetilde{E}_{s+1} \xrightarrow{\tilde{a}_s} \Sigma \widetilde{E}_s$ 对所有 $s \geqslant 0$ 是上纤维序列使得 $\widetilde{E}_0 = S, \tilde{b}_s = \tau \wedge 1_{\widetilde{E}_s}$(s >0), 而 $\tilde{b}_0 = \tau : S \to BP$ 是最低维胞腔的内射. 因此 $\pi_t BP \wedge \widetilde{E}_s$ 是 Adams-Novikov 谱序列的 $E_1^{s,t}$ 项, $(\tilde{b}_{s+1}\tilde{c}_s)_* : \pi_t BP \wedge \widetilde{E}_s \to \pi_t BP \wedge \widetilde{E}_{s+1}$ 是谱序列的 $d_1^{s,t}$- 微分, 并且有

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s,t}(BP_*, BP_*) \Longrightarrow (\pi_{t-s} S)_p$$

命题 9.8.9 设 $p \geqslant 3, r \geqslant 1, s \geqslant 0$ 而 $\widetilde{E}_s$ 为 Adams-Novikov 分解 (9.8.8) 中的谱, $\wedge^s BP = BP \wedge \cdots \wedge BP$ 为 s 个 BP 的压挤乘积, 则 $(BP \wedge \widetilde{E}_s)^*, (BP \wedge \widetilde{E}_s)^*(M), (BP \wedge \widetilde{E}_s)^*(K_r)$ 分别是 $(\wedge^{s+1} BP)^*, (\wedge^{s+1} BP)^*(M), (\wedge^{s+1} BP)^*(K_r)$ 的直加项并且有 $[\Sigma^t M, BP \wedge \widetilde{E}_s] = (BP \wedge \widetilde{E}_s)^{-t}(M) = 0$ 当 $t \neq -1$ (mod q), $[\Sigma^t K_r, BP \wedge \widetilde{E}_s] = (BP \wedge \widetilde{E}_s)^{-t}(K_r) = 0$ 当 $t \neq -2$ (mod q).

证 我们先考查 BP^* 上同调. 已知 $\pi_t BP = BP_t = BP^{-t}$, 因此 $BP^* = Z_{(p)}[v_1, v_2, \cdots]$, 其中次数 $|v_i| = -2(p^i - 1)$ 而 $I_n = (p, v_1, \cdots, v_{n-1}), (p, v_1^r)$ 是 BP^* 的不变理想. 显然, 有以下两个 BP^* 上同调群的短恰当序列

$$0 \to BP^* \xrightarrow{p} BP^* \xrightarrow{\rho_0} BP^*/(p) \to 0$$

$$0 \to \Sigma^{-rq} BP^*/(p) \xrightarrow{v_1^r} BP^*/(p) \xrightarrow{\rho_1} BP^*/(p, v_1^r) \to 0$$

其中 ρ_0, ρ_1 为投射.

注意到 $(\wedge^s BP)^* = \pi_*(\wedge^s BP) = BP_*(\wedge^{s-1}BP) = BP_*BP \otimes \cdots \otimes BP_*BP$，其中有 $s-1$ 个 BP_*BP 而 $s \geqslant 2$. 因此我们有以下短恰当序列 $(s \geqslant 1)$

(9.8.10)
$$0 \to (\wedge^s BP)^* \xrightarrow{p} (\wedge^s BP)^* \longrightarrow (\wedge^s BP)^*/(p) \to 0$$
$$0 \to \Sigma^{-rq}(\wedge^s BP)^*/(p) \xrightarrow{v_1^r} (\wedge^s BP)^*/(p) \longrightarrow (\wedge^s BP)^*/(p, v_1^r) \to 0$$

对任意 $f \in [\Sigma^t M, \wedge^s BP] = (\wedge^s BP)^{-t}(M)$, 若 $t \neq 0 (\mathrm{mod}\ q)$，则由 $(\wedge^s BP)^* = BP_*BP \otimes \cdots \otimes BP_*BP$ 的稀疏性 (即 $BP_rBP = 0$ 当 $r \neq 0\ (\mathrm{mod}\ q)$) 可得 $fi \in (\wedge^s BP)^{-t} = 0$；若 $t = 0\ (\mathrm{mod\ q})$, 则 fi 是 $Z_{(p)}$ 模 $(\wedge^s BP)^{-t}$ 中的 p 阶元素从而我们也有 $fi = 0$. 这证明了 $i^* = 0 : (\wedge^s BP)^*(M) \to (\wedge^s BP)^*$.

类似地有 $(i'_r)^* = 0 : (\wedge^s BP)^*(K_r) \to (\wedge^s BP)^*(M)$ ($r \geqslant 1$). 因此, 上纤维序列 (9.1.1), (9.8.2) 对所有 $(r \geqslant 1)$ 分别导出短恰当序列

$$0 \to (\wedge^s BP)^* \xrightarrow{p} (\wedge^s BP)^* \xrightarrow{j^*} (\wedge^s BP)^*(M) \to 0$$

$$0 \to (\wedge^s BP)^*(M) \xrightarrow{(\alpha^r)^*} (\wedge^s BP)^*(M) \xrightarrow{(j'_r)^*} (\wedge^s BP)^*(K_r) \to 0$$

其中次数 $| j^* | = -1$, $| (j'_r)^* | = -(rq+1)$. 将以上两个短恰当序列和 (9.8.10) 作比较可得

(9.8.11)
$$(\wedge^s BP)^*(M) \cong \Sigma(\wedge^s BP)^*/(p),$$
$$(\wedge^s BP)^*(K_r) \cong \Sigma^{rq+2}(\wedge^s BP)^*/(p, v_1^r)$$

设 $\mu : BP \wedge BP \to BP$ 为环谱 BP 的乘法映射. 回顾前面所述, $\tau : S \to BP$ 是最低维胞腔的内射, 因此有 $\mu(1_{BP} \wedge \tau) = 1_{BP} = \mu(\tau \wedge 1_{BP})$, 从而上纤维序列 $\widetilde{E}_{s-1} \xrightarrow{\tilde{b}_{s-1}} BP \wedge \widetilde{E}_{s-1} \xrightarrow{\tilde{c}_{s-1}} \widetilde{E}_s \xrightarrow{\tilde{a}_{s-1}} \Sigma\widetilde{E}_{s-1}$ 导出以下分裂的短恰当序列

$$BP \wedge \widetilde{E}_{s-1} \xrightarrow{1_{BP} \wedge \tilde{b}_{s-1}} BP \wedge BP \wedge \widetilde{E}_{s-1} \xrightarrow{1_{BP} \wedge \tilde{c}_{s-1}} BP \wedge \widetilde{E}_s$$

这是因为 $(\mu \wedge 1_{\widetilde{E}_{s-1}})(1_{BP} \wedge \tilde{b}_{s-1}) = (\mu \wedge 1_{\widetilde{E}_{s-1}})(1_{BP} \wedge \tau \wedge 1_{\widetilde{E}_{s-1}}) = 1_{BP \wedge \widetilde{E}_{s-1}}$. 这就是说, $BP \wedge \widetilde{E}_s$ 是 $BP \wedge BP \wedge \widetilde{E}_{s-1}$ 的直加项, 而由归纳法可得出 $BP \wedge \widetilde{E}_s$ 是 $\wedge^{s+1}BP$ 的直加项. 因此, $(BP \wedge \widetilde{E}_s)^*, (BP \wedge \widetilde{E}_s)^*(M), (BP \wedge \widetilde{E}_s)^*(K_r)$ 分别是 $(\wedge^{s+1}BP)^*, (\wedge^{s+1}BP)^*(M), (\wedge^{s+1}BP)^*(K_r)$ 的直加项, 而后一个结果由 (9.8.11) 得出. 证毕.

命题 9.8.12　设 $p \geqslant 3, n \geqslant 1$, 则

$$\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{0,p^n(p+1)q}(BP_*, BP_*/(p, v_1^{p^n-1}))$$

加法的由生成元 $v_2^{p^n}, v_1^{p^n-p^{n-2r}}\tilde{c}_1(t_r p^{n-2r}) (r \geqslant 1)$ 所生成, 其中 $t_r = (p^{2r+1}+1)/(p+1)$, 而 $\tilde{c}_1(ap^s)$ 是第 8 章定理 8.1.7 中具有次数 $sp^s(p+1)q$ 的生成元.

证　由定理 8.1.7, 所要的生成元具有形式 $v_1^b\tilde{c}_1(ap^s)$ 使得其次数 $bq + ap^s(p+1)q = p^n(p+1)q$, p 不整除 $a \geqslant 1$, $0 \leqslant b < p^n - 1$, 而 $b \geqslant \max\{0, p^n - 1 - q_1(ap^s)\}$, 其中 $q_1(ap^s) = p^s$ 若 $a = 1$, $q_1(ap^s) = p^s + p^{s-1} - 1$ 若 p 不整除 $a \geqslant 2$.

若 $b=0$, 则我们得到 $v_2^{p^n}$. 由于 $b<p^n-1$, 则 $s<n$ 并且 $b\equiv 0\ (\bmod p^s)$. 因此, $b\geqslant p^n-1-q_1(ap^s)\geqslant p^n-p^{n-1}$ 若 $b\geqslant 1$. 设 $b=(p-1)p^{n-1}+c_{n-2}p^{n-2}+\cdots+c_sp^s$ 为 b 的 p 进展开式使得 $0\leqslant c_i\leqslant p-1$. 由 $b\geqslant(p^n-1)-(p^s+p^{s-1}-1)$ 或者 $b\geqslant(p^n-1)-p^s$ 可得出 $c_{n-2}p^{n-2}+\cdots+c_sp^s\geqslant p^{n-1}-p^s-p^{s-1}$ 或者 $p^{n-1}-p^s-1$. 因此我们有 $c_{n-2}=\cdots=c_s=p-1$. 另一方面, b 可除予 $p+1$, 因此 $(p-1)-c_{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1-s}c_s=0$, 从而 $n-1-s$ 必为奇数. 设 $n-1-s=2r-1$, 则如所求的 $s=n-2r, b=p^n-p^{n-2r}$ 并且 $a=(p^{2r+1}+1)/(p+1)$. 证毕.

命题 9.8.13 设 $p\geqslant 3, n\geqslant 1$, 则

(1) $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{2,p^{n+1}q+q}(BP_*,BP_*)$ 加法的由生成元 $\beta_{p^n/p^n-1},\beta_{t_rp^{n-2r}/p^{n-2r}-1}$ (对所有 $r\geqslant 1$) 所生成, 其中 $t_r=(p^{2r+1}+1)/(p+1)$.

(2) $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,p^{n+1}q+q}(BP_*,BP_*M)$ 加法的由生成元 $\beta'_{p^n/p^n-1},\beta'_{t_rp^{n-2r}/p^{n-2r}-1}$ (对所有 $r\geqslant 1$) 所生成, 其中 $t_r=(p^{2r+1}+1)/(p+1)$, 而 $\beta'_{tp^n/s}$ 是 $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,*}(BP_*, BP_*M)$ 中的生成元使得 $j_*(\beta'_{tp^n/s})=\beta_{tp^n/s}\in\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{2,*}(BP_*,BP_*)$.

证 由第 8 章定理 8.1.3, $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{2,*}(BP_*,BP_*)$ 加法的由生成元 $\beta_{ap^s/b,c+1}\in\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{2,ap^s(p+1)q-bq}(BP_*,BP_*)$ 所生成, 其中 $s\geqslant 0$, p 不整除 $a\geqslant 1, b\geqslant 1, c\geqslant 0$ 满足以下条件:

(i) $b\leqslant s$ 若 $a=1$.

(ii) $p^c\mid b\leqslant p^{s-c}+p^{s-c-1}-1$.

(iii) $p^{s-c-1}+p^{s-c-2}-1<b$ 若 $p^{c+1}\mid b$.

并且 $\beta_{ap^s/b,1}=\beta_{ap^s/b}$. 因此, 对 $\beta_{ap^s/b,c+1}\in\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{2,p^{n+1}q+q}(BP_*,BP_*)$ 我们有 $ap^s(p+1)q-bq=p^{n+1}q+q=p^n(p+1)q-(p^n-1)q$, 从而 $ap^s(p+1)q+(p^n-1-b)q=p^n(p+1)q$. 与命题 9.8.12 的证明类似可得 $a=1, s=n, b=p^n-1$ 或者 $a=(p^{2r+1}+1)/(p+1), b=p^{n-2r}-1, s=p^{n-2r}(\ r\geqslant 1)$, 并且最终有 $c=0$. 这证明了 (1).(2) 的证明类似. 证毕.

在完成了以上命题的证明之后, 下面我们开始着手证明定理 9.8.1 当 $t\geqslant 1$ 的情况. 它是通过在一些谱的 Adams-Novikov 分解中进行推理并且用定理 9.5.1 中的 h_0h_{n+1}- 映射作几何输入来加以证明的. 我们先证明以下引理.

引理 9.8.14 若 g'' 是 $\pi_{p^n(p+1)q}BP$ 中的元素使得 $\tilde{b}_1\tilde{c}_0g''jj'_{p^n-1}=0\in[\Sigma^{p^{n+1}q+q-2}K_{p^n-1},BP\wedge E_1]$, 则存在 $\bar{g}=px_1+v_1^{p^n-1}x_2\in\pi_{p^n(p+1)q}BP$ 使得 $\tilde{b}_1\tilde{c}_0(g''-\bar{g})=0\in\pi_{p^n(p+1)q}BP\wedge\widetilde{E}_1$, 其中 x_1,x_2 为 π_*BP 的某个元素.

证 设 $\mu: BP\wedge BP\to BP$ 为环谱 BP 的乘法映射, 则有 $\mu(\tilde{b}_0\wedge 1_{BP})=1_{BP}=\mu(1_{BP}\wedge\tilde{b}_0)$, 其中 $\tilde{b}_0=\tau: S\to BP$ 如前面所述是最低维胞腔的内射. 因此我们有以下分裂的上纤维序列

$$BP\xrightarrow{1_{BP}\wedge\tilde{b}_0}BP\wedge BP\xrightarrow{1_{BP}\wedge\tilde{c}_0}BP\wedge\widetilde{E}_1\xrightarrow{1_{BP}\wedge\tilde{a}_0=0}\Sigma BP$$

$$BP\wedge\widetilde{E}_1\xrightarrow{1_{BP}\wedge\tilde{b}_0\wedge 1_{\widetilde{E}_1}}BP\wedge BP\wedge\widetilde{E}_1\xrightarrow{1_{BP}\wedge\tilde{c}_1}BP\wedge\widetilde{E}_2\xrightarrow{1_{BP}\wedge\tilde{a}_0=0}\Sigma BP\wedge\widetilde{E}_1$$

并且存在 $\mu': BP\wedge \widetilde{E}_1 \to BP\wedge BP$ 使得 $(1_{BP}\wedge \tilde{b}_0)\mu + \mu'(1_{BP}\wedge \tilde{c}_0) = 1_{BP\wedge BP}$.

由 $\tilde{b}_1\tilde{c}_0 g'' jj'_{p^n-1} = 0$, 则 $\tilde{c}_0 g'' jj'_{p^n-1} = \tilde{a}_1 g'$, 某个 $g' \in [\Sigma^{p^{n+1}q+q-1}K_{p^n-1}, \widetilde{E}_2]$. 因此 $(1_{BP}\wedge \tilde{c}_0 g'' jj'_{p^n-1}) = (1_{BP}\wedge\tilde{a}_1)(1_{BP}\wedge g') = 0$, 从而 $1_{BP}\wedge g'' jj'_{p^n-1} = [(1_{BP}\wedge \tilde{b}_0)\mu + \mu'(1_{BP}\wedge\tilde{c}_0)](1_{BP}\wedge g'' jj'_{p^n-1}) = (1_{BP}\wedge\tilde{b}_0)\mu(1_{BP}\wedge g'' jj'_{p^n-1})$ 并且我们有

(9.8.15)
$$\begin{aligned}(\tilde{b}_0\wedge 1_{BP})g'' jj'_{p^n-1} &= (1_{BP}\wedge g'' jj'_{p^n-1})(\tilde{b}_0\wedge 1_{K_{p^n-1}})\\ &= (1_{BP}\wedge\tilde{b}_0)\mu(1_{BP}\wedge g'' jj'_{p^n-1})(\tilde{b}_0\wedge 1_{K_{p^n-1}})\\ &= (1_{BP}\wedge\tilde{b}_0)g'' jj'_{p^n-1}\end{aligned}$$

注意到 $(\tilde{b}_0\wedge 1_{BP})_*, (1_{BP}\wedge\tilde{b}_0)_*: BP_*\to BP_*BP$ 分别是右和左单位 $\eta_R, \eta_L: BP_*\to BP_*BP$, 因此由 (9.8.15) 我们有 $\eta_R(g'') = \eta_L(g'') \bmod (p, v_1^{p^n-1})$. 这意味着 $(p, v_1^{p^n-1}, g'')$ 是 BP_* 的不变理想, 或等价地有 $g''\in \mathrm{Ext}^{0,p^n(p+1)q}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*/(p, v_1^{p^n-1}))$. 因此由命题 9.8.12 我们有

(9.8.16)
$$g'' = \lambda v_2^{p^n} + \Sigma\lambda_r v_1^{p^n-p^{n-2r}}\tilde{c}_1(t_r p^{n-2r}) + px_1 + v_1^{p^n-1}x_2 \in BP_*$$

其中 $1\leqslant \lambda, \lambda_r\leqslant p-1, t_r = (p^{2r+1}+1)/(p+1)$ 而 x_1, x_2 为 BP_* 的某个元素.

令 $\bar{g} = px_1 + v_1^{p^n-1}x_2$, 则 $(\tilde{b}_0\wedge 1_{BP})(g''-\bar{g}) = \eta_R(g''-\bar{g}) = \eta_L(g''-\bar{g}) = (1_{BP}\wedge\tilde{b}_0)(g''-\bar{g})$ 从而 $\tilde{b}_1\tilde{c}_0(g''-\bar{g}) = (1_{BP}\wedge\tilde{c}_0)(\tilde{b}_0\wedge 1_{BP})(g''-\bar{g}) = 0$. 证毕.

定理 9.8.1 当 $t\geqslant 1$ 的证明　由定理 9.5.1, 存在 $\tilde{\eta}_{n+1}\in\pi_{p^{n+1}q+q-1}M$ 使得 $\eta_{n+1} = j\tilde{\eta}_{n+1}\in\pi_{p^{n+1}q+q-2}S$ 在 Adams 谱序列中由 $h_0h_{n+1}\in \mathrm{Ext}_A^{2,p^{n+1}q+q}(Z_p, Z_p)$ 所表示. 由于 Thom 映射 $\Phi: \mathrm{Ext}^{2,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)\to \mathrm{Ext}^{2,*}_A(Z_p, Z_p)$ 有 $\Phi(\beta_{p^n/p^n-1}) = h_0h_{n+1}$ (参见第 8 章定理 8.1.5), 因此 $\eta_{n+1} = j\tilde{\eta}_{n+1}$ 在 Adams-Novikov 谱序列中由 $\beta_{p^n/p^n-1} + x\in \mathrm{Ext}^{2,p^{n+1}q+q}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)$ 所表示, 其中 $x = \Sigma_{r\geqslant 1}\lambda_r\beta_{t_rp^{n-2r}/p^{n-2r}-1}$, 某个 $\lambda_r\in Z_{(p)}$ (参见命题 9.8.13). 更进一步, $\tilde{\eta}_{n+1}\in\pi_{p^{n+1}q+q-1}M$ 在 Adams-Novikov 谱序列中由 $\beta'_{p^n/p^n-1} + x' + i_*(y)$ 所表示, 其中 $y\in \mathrm{Ext}^{1,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)$, 而 $x' = \Sigma_{r\geqslant 1}\lambda_r\beta'_{t_rp^{n-2r}/p^{n-2r}-1}$, $\beta'_{tp^n/s}$ 是 $\mathrm{Ext}^{1,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*(M))$ 中的元素使得 $j_*\beta'_{tp^n/s} = \beta_{tp^n/s}\in \mathrm{Ext}^{2,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)$. 已知 $\mathrm{Ext}^{1,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)$ 的所有生成元在 Adams-Novikov 中都是永久循环, 因此存在 $\tilde{f}\in\pi_{p^{n+1}q+q-1}M$ 使得它在 Adams-Novikov 中由 $\beta'_{p^n/P^n-1} + x'$ 所表示. 另外, $\tilde{f}$ 可扩张为 $f\in[\Sigma^{p^{n+1}q+q-1}M, M]\cap \ker d$ 使得 $\tilde{f} = fi$. 回顾 (9.8.8) 可知

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots\xrightarrow{\tilde{a}_2\wedge 1_M} & \Sigma^{-2}\widetilde{E}_2\wedge M & \xrightarrow{\tilde{a}_1\wedge 1_M} & \Sigma^{-1}\widetilde{E}_1\wedge M & \xrightarrow{\tilde{a}_0\wedge 1_M} & \widetilde{E}_0\wedge M = M\\ & \downarrow{\tilde{b}_2\wedge 1_M} & & \downarrow{\tilde{b}_1\wedge 1_M} & & \downarrow{\tilde{b}_0\wedge 1_M}\\ & \Sigma^{-2}BP\wedge\widetilde{E}_2\wedge M & & \Sigma^{-1}BP\wedge\widetilde{E}_1\wedge M & & BP\wedge M\end{array}$$

是 Moore 谱 M 的一个 Adams-Novikov 分解. 因此 fi 可提升为 $f_1i\in\pi_{p^{n+1}q+q}(\widetilde{E}_1\wedge M)$ 使得 $f_1\in[\Sigma^{p^{n+1}q+q}M, E_1\wedge M]\cap\ker d$, 并且 d_1 循环 $(\tilde{b}_1\wedge 1_M)f_1i\in\pi_{p^{n+1}q+q}BP\wedge\widetilde{E}_1\wedge M$ 表示 $\beta'_{p^n/p^n-1} + x'\in \mathrm{Ext}^{1,p^{n+1}q+q}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*(M))$, 而且 $(\tilde{a}_0\wedge 1_M)f_1i = fi$. 再通过对等式 $(\tilde{a}_0\wedge 1_M)f_1ij = fij$ 作用于导数算子 d 可得出 $(\tilde{a}_0\wedge 1_M)f_1 = f$.

由于 $(\tilde{a}_0\wedge 1_M)f_1 i = fi \in \pi_{p^{n+1}q+q-1}M$ 在 Adams-Novikov 谱序列中由 $\beta'_{p^n/p^n-1}+x' \in \mathrm{Ext}^{1,p^{n+1}q+q}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*(M))$ 所表示而 $v_1^{p^n-1}(\beta'_{p^n/p^n-1}+x')=0$, 因此 $(\tilde{a}_0\wedge 1_M)f_1\alpha^{p^n-1}i = f\alpha^{p^n-1}i=\alpha^{p^n-1}fi$ 具有 BP- filtration >1, 从而 $(\tilde{b}_1\wedge 1_M)f_1\alpha^{p^n-1}i$ 是一个 d_1 边缘并且它等于 $(\tilde{b}_1\tilde{c}_0\wedge 1_M)gi$, 某个 $g\in[\Sigma^{p^n(p+1)q}M, BP\wedge M]$. 因此, $(\tilde{b}_1\wedge 1_M)f_1\alpha^{p^n-1}=(\tilde{b}_1\tilde{c}_0\wedge 1_M)g$, 这是因为 $\pi_{p^n(p+1)q+1}BP\wedge\widetilde{E}_1\wedge M=0$, 由 $BP_*(\widetilde{E}_1\wedge M)$ 的稀疏性所得出. 因此我们有

$$f_1\alpha^{p^n-1}=(\tilde{c}_0\wedge 1_M)g+(\tilde{a}_1\wedge 1_M)f_2 \quad 某个\ f_2\in[\Sigma^{p^n(p+1)q+1}M, \widetilde{E}_2\wedge M]$$

并且

$$(1_{\widetilde{E}_1}\wedge j)f_1\alpha^{p^n-1}=\tilde{c}_0 g'' j+\tilde{a}_1(1_{\widetilde{E}_2}\wedge j)f_2 \quad 某个\ g''\in\pi_{p^n(p+1)q}BP$$

其中 $g''j=(1_{BP}\wedge j)g$, 这是因为 $(1_{BP}\wedge j)gi\in\pi_{p^n(p+1)q-1}BP=0$. 另外, 由 $\tilde{b}_2(1_{\widetilde{E}_2}\wedge j)f_2\in[\Sigma^{p^n(p+1)q}M, BP\wedge\widetilde{E}_2]=0$ 以及 $[\Sigma^{p^n(p+1)q+1}M, BP\wedge\widetilde{E}_3]=0$ (参见命题 9.8.9), 因此 $(1_{\widetilde{E}_2}\wedge j)f_2=\tilde{a}_2\tilde{a}_3 f_3$, 某个 $f_3\in[\Sigma^{p^n(p+1)q+2}M, E_4]$ 并且我们有

(9.8.17) $$(1_{E_1}\wedge j)f_1\alpha^{p^n-1}=\tilde{c}_0 g'' j+\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3 f_3.$$

由 (9.8.17) 可得 $\tilde{b}_1\tilde{c}_0 g'' jj'_{p^n-1}=0$, 因此由引理 9.8.14, 存在 $\bar{g}=px_1+v_1^{p^n-1}x_2\in\pi_{p^n(p+1)q}BP$, 某个 $x_1,x_2\in\pi_*BP$, 使得 $\tilde{b}_1\tilde{c}_0(g''-\bar{g})=0$. 因此, $\tilde{c}_0(g''-\bar{g})=\tilde{a}_1 f_4$, 某个 $f_4\in\pi_{p^n(p+1)q+1}\widetilde{E}_2$ 并且 $f_4=\tilde{a}_2\tilde{a}_3 f_5$, 某个 $f_5\in\pi_{p^n(p+1)q+3}\widetilde{E}_4$, 由 $\pi_*BP\wedge\widetilde{E}_s$ 的稀疏性所得出. 因此 (9.8.17) 变成为

(9.8.18) $$(1_{\widetilde{E}_1}\wedge j)f_1\alpha^{p^n-1}=\tilde{c}_0\bar{g}j+\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3 f_5 j+\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3 f_3$$

注意到 $\bar{g}=px_1+v_1^{p^n-1}x_2$, 因此, $\bar{g}jj'_{p^n-1}=0\in BP^*(K_{p^n-1})\cong\Sigma^{-(p^n-1)q-2}BP^*/(p, v_1^{p^n-1})$, 从而有 $\bar{g}j=\tilde{g}\alpha^{p^n-1}$, 某个 $\tilde{g}\in[\Sigma^{p^{n+1}q+q-1}M, BP]$. 因此, 由 (9.8.4), 等式 (9.8.18) 变成为

(9.8.19) $$\begin{aligned}(1_{\widetilde{E}_1}\wedge j)f_1 j'_1\rho_{p^n,1}&=(1_{\widetilde{E}_1}\wedge j)f_1\alpha^{p^n-1}j'_{p^n}\\&=\tilde{c}_0\tilde{g}\alpha^{p^n-1}j'_{p^n}+\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3(f_5 j+f_3)j'_{p^n}\\&=\tilde{c}_0\tilde{g}j'_1\rho_{p^n,1}+\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3(f_5 j+f_3)j'_{p^n}\end{aligned}$$

再由 (9.8.4), (9.8.6) 可得 $\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3(f_5 j+f_3)j'_{p^n-1}=\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3(f_5 j+f_3)j'_{p^n}\psi_{p^n-1,p^n}=0$, 因此我们有 $(f_5 j+f_3)j'_{p^n-1}=0$, 这是因为 $[\Sigma^{p^{n+1}q+q+r}, K_{p^n-1}, BP\wedge\widetilde{E}_{2+r}]=0$ 当 $r=-1,0,1$(参见命题 9.8.9). 这证明了 $(f_5 j+f_3)=f_6\alpha^{p^n-1}$, 某个 $f_6\in[\Sigma^{p^{n+1}q+q+2}M, \widetilde{E}_4]$. 因此, 等式 (9.8.19) 变成为

(9.8.20) $$\begin{aligned}(1_{\widetilde{E}_1}\wedge j)f_1 j'_1\rho_{p^n,1}&=\tilde{c}_0\tilde{g}j'_1\rho_{p^n,1}+\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_2 f_6\alpha^{p^n-1}j'_{p^n}\\&=\tilde{c}_0\tilde{g}j'_1\rho_{p^n,1}+\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3 f_6 j'_1\rho_{p^n,1}\end{aligned}$$

并且由 (9.8.6) 我们有

(9.8.21) $$(1_{\widetilde{E}_1}\wedge j)f_1 j'_1=\tilde{c}_0\tilde{g}j'_1+\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3 f_6 j'_1+\epsilon i'_{p^n-1}j'_1$$

某个 $\epsilon\in[\Sigma^{p^{n+1}q+q-1}K_{p^n-1}, \widetilde{E}_1]$. 通过合成 $\tilde{a}_0$ 于 (9.8.21) 可得 $jfj'_1=\tilde{a}_0\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3 f_6 j'_1+\tilde{a}_0\epsilon i'_{p^n-1}j'_1=\tilde{a}_0\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3 f_6 j'_1+jj'_{p^n-1}\bar{\epsilon}i'_{p^n-1}j'_1$, 这是因为 $\tilde{a}_0\epsilon=jj'_{p^n-1}\bar{\epsilon}$, 某个 $\bar{\epsilon}\in$

$[\Sigma^{p^n(p+1)q}K_{p^n-1}, K_{p^n-1}]$ (参见命题 9.8.2). 因此我们有

(9.8.22) $$jfi = \tilde{a}_0\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3 f_6 i + jj'_{p^n-1}\bar{\epsilon}i'_{p^n-1}i + f_7\alpha i$$

某个 $f_7 \in [\Sigma^{p^{n+1}q-2}M, S]$.

我们推断 (9.8.22) 中的映射 $f_7\alpha i$ 具有 filtration $\geqslant 3$, 从而由 (9.8.22) 可得出 $jj'_{p^n-1}\tilde{\epsilon}i'_{p^n-1}i \in \pi_{p^{n+1}q+q-2}S$ 在 Adams 谱序列中由 $h_0h_{n+1} \in \mathrm{Ext}_A^{2,p^{n+1}q+q}(Z_p, Z_p)$ 所表示. 这个推断将在最后证明. 因此, $jj'_{p^n-1}\tilde{\epsilon}i'_{p^n-1}i$ 在 Adams-Novikov 谱序列中由 $\lambda_0\beta_{p^n/p^n-1} + \Sigma_{r\geqslant 1}\lambda_r\beta_{t_rp^{n-2r}/p^{n-2r}-1} \in \mathrm{Ext}^{2,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)$ 所表示, 从而由命题 9.8.12 可知 $\tilde{\epsilon}i'_{p^n-1}i \in \pi_{p^n(p+1)q}K_{p^n-1}$ 在 Adams-Novikov 谱序列中由 $v_2^{p^n} + \Sigma_{r\geqslant 1}\lambda_r v_1^{p^n-p^{n-2r}}\tilde{c}_1(t_rp^{n-2r}) \in \mathrm{Ext}^{0,p^n(p+1)q}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*K_{p^n-1})$ 所表示, 其中 $\lambda_r \in Z_p$ 而 $t_r = (p^{2r+2}+1)/(p+1)$.

由 [22] 定理 C, D 已知, $v_2^{tp} \in \mathrm{Ext}^{0,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*K_r)$, 当 $t \geqslant 1, 1 \leqslant r \leqslant p-1$, 在 Adams-Novikov 谱序列中是永久循环. 今归纳假设 $v_2^{tp^s} \in \mathrm{Ext}^{0,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*K_r)$ (当 $t \geqslant 1, 1 \leqslant r \leqslant p^s - 1$ 且 $s \leqslant n-1$) 在 Adams-Novikov 谱序列中是永久循环, 因此可得 $v_1^{p^n-p^{n-2r}}\tilde{c}_1(t_rp^{n-2r}) \in \mathrm{Ext}^{0,p^n(p+1)q}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*K_{p^n-1})$ 对所有 $r \geqslant 1$ 也是永久循环. 再由以上 $\tilde{\epsilon}i'_{p^n-1}i$ 的表示就可得出 $v_2^{p^n} \in \mathrm{Ext}^{0,p^n(p+1)q}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*K_{p^n-1})$ 是永久循环. 这样的话, 由 (9.8.6), 存在 $k \in [\Sigma^{p^n(p+1)q}K_{p^n-1}, K_{p^n-1}]$ 使得它导出的 BP_*- 同态 $k_* = v_2^{p^n}$. 更进一步, (9.8.4) 中的映射 $\rho_{p^n-1,r}: K_{p^n-1} \to K_r$ 对所有 $r \leqslant p^n - 1$ 是一个投射, 因此 $\rho_{p^n-1,r}k^ti'_{p^n-1}i \in \pi_{tp^n(p+1)q}K_r$ 在 Adams-Novikov 谱序列中由 $v_2^{tp^n} \in \mathrm{Ext}^{0,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*K_r)$ 所表示. 这完成了归纳法并且可得出 $jj'_r\rho_{p^n-1,r}k^ti'_{p^n-1}i \in \pi_*S$ 是本定理所要得的 $\beta_{tp^n/r}$ 元素.

现在我们剩下的工作是证明以上推断. 我们转而在 Adams 谱序列中推理并且设 A 为 mod p Steenrod 代数. 由 $\mathrm{Ext}_A^{1,p^{n+1}q-1}(Z_p, H^*M) \cong Z_p\{j^*(h_{n+1})\}$ 以及文献 [12] .p.206 定理 5.4.8(i) 中关于 $\beta_{p^n/p^n} \in \mathrm{Ext}^{2,p^{n+1}q}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)$ 在 Adams-Novikov 谱序列中具有非零的 $2p-1$ 阶微分可得出

(9.8.23) $$j^*(h_{n+1}) \in \mathrm{Ext}_A^{1,p^{n+1}q-1}(Z_p, H^*M)$$

在 Adams 谱序列中死掉. 因此, (9.8.22) 中的映射 $f_7 \in [\Sigma^{p^{n+1}q-2}M, S]$ 在 Adams 谱序列中具有 filtration $\geqslant 2$, 从而 $f_7\alpha i$ 具有 filtration $\geqslant 3$. 再由 (9.8.21) 可得 $jj'_{p^n-1}\bar{\epsilon}i'_{p^n-1}i$ 和 $jfi \in \pi_{p^{n+1}q+q-2}S$ 必定具有相同的 filtration, 从而它在 Adams 谱序列中由 $h_0h_{n+1} \in \mathrm{Ext}_A^{2,p^{n+1}q+q}(Z_p, Z_p)$ 所表示. 这证明了以上推断从而定理得证. 证毕.

注 9.8.24 我们给出 (9.8.23) 的详细证明如下. 它将通过在 Adams 分解 (9.2.9) 中进行推理来证明. 反设 (9.8.23) 中 $j^*h_{n+1} \in \mathrm{Ext}_A^{1,p^{n+1}q-1}(Z_p, H^*M)$ 在 Adams 谱序列中是永久循环, 则有 $\bar{c}_1h_{n+1}\cdot j = 0$, 其中 $h_{n+1} \in \pi_{p^{n+1}q}KG_1 \cong \mathrm{Ext}_A^{1,p^{n+1}q}(Z_p, Z_p)$. 因此 $\bar{c}_1h_{n+1} = \bar{f}\cdot p$, 某个 $\bar{f} \in \pi_{p^{n+1}q}E_2$. 另一方面, $\bar{b}_2\bar{f} \in \pi_{p^{n+1}q}KG_2 \cong \mathrm{Ext}_A^{2,p^{n+1}q}(Z_p, Z_p) \cong Z_p\{b_n\}$, 从而有 $\bar{b}_2\bar{f} = \lambda \cdot b_n$, 某个 $\lambda \in Z_p$. 但是, 系数 λ 必为零, 这是因为 b_n

在 Adams 谱序列中具有非零微分 $d_{2p-1}(b_n)=d_{2p-1}\Phi(\beta_{p^n/p^n})=\Phi d_{2p-1}(\beta_{p^n/p^n})=\Phi(\alpha_1\beta^p_{p^{n-1}/p^{n-1}})=h_0b^p_{n-1}\neq 0$ (参见 [12] p.206 定理 5.4.8(i)). 因此 $\bar f=\bar a_2\bar f_1$, 某个 $\bar f_1\in\pi_{p^{n+1}q+1}E_3$, 并且我们有 $\bar c_1h_{n+1}=\bar a_2\bar f_1\cdot p=\bar a_2\bar a_3\bar f_2$, 某个 $\bar f_2\in\pi_{p^{n+1}q+2}E_4$. 这意着二阶微分 $d_2(h_{n+1})=0$ 与以下已知的非零微分 $d_2(h_{n+1})=a_0b_n\neq 0\in \mathrm{Ext}_A^{3,p^{n+1}q+1}(Z_p,Z_p)$ (参见 [12] p.11 定理 1.2.14) 相矛盾. 因此我们有 $\tilde c_1h_{n+1}\cdot j\neq 0$ 从而 (9.8.23) 成立.

下面我们着手证明定理 9.8.1 当 $t\geqslant 2$ 的情况. 我们先证明以下引理和命题.

引理 9.8.25 设 $p\geqslant 3$ 而 $v_1x\in \mathrm{Ext}^{0,tp^n(p+1)q}_{BP_*BP}(BP_*,BP_*K_{p^n})$, 则 $v_1x=\Sigma_{r=1}^{[n/2]}\lambda_rv_1^{p^n-p^{n-2r}}\tilde c_1(a_rp^{n-2r})$, 其中 $\lambda_r\in Z_p, a_r=(tp^{2r+1}+tp^{2r}-p^{2r}+1)/(p+1)$ 而 $\tilde c_1(ap^s)$ 是第 8 章定理 8.1.7 中具有次数 $ap^s(p+1)q$ 的生成元.

证 由第 8 章定理 8.1.7, v_1x 是如下形式的生成元 $v_1^b\tilde c_1(ap^s)$ 的线性组合, 其中 p 不整除 $a\geqslant 1, 1\leqslant b<p^n, b\geqslant \max\{0,p^n-q_1(ap^s)\}$ 而 $q_1(ap^s)=p^s$ 若 $a=1, q_1(ap^s)=p^s+p^{s-1}-1$ 若 $a\geqslant 2$.

由次数原因我们有 $bq+ap^s(p+1)q=tp^n(p+1)q$, 因此 $s<n, b\geqslant p^n-(p^s+p^{s-1}-1)>0$, 从而 $b\geqslant p^n-p^{n-1}$ 若 $s\leqslant n-2$. 若 $s=n-1$, 则 b 可除于 $p^{n-1}(p+1)$ 从而 $b\geqslant p^n+p^{n-1}$. 在各种情况下我们有 $b\geqslant p^{n-1}(p-1)$ 而剩下的步骤和命题 9.8.12 的证明类似. 证毕.

命题 9.8.26 设 $r>s$ 而 $\rho_{r,s}:K_r\to K_s$ 是 (9.8.4) 中的投射, 则 $d(\rho_{r,s})=i'_s\xi j'_r$, 某个 $\xi\in[\Sigma^{rq+1}M,M]\cap \ker d$.

证 由 (9.8.6), (9.8.3) 我们有 $j'_sd(\rho_{r,s})=d(j'_s\rho_{r,s})=d(\alpha^{r-s}j'_r)=0$, 因此 $d(\rho_{r,s})=i'_s\bar\xi$, 某个 $\bar\xi\in[\Sigma K_r,M]$ 而 $\bar\xi=\xi j'_r$, 某个 $\xi\in[\Sigma^{rq+1}M,M]$, 这是因为 $\bar\xi i'_r\in[\Sigma M,M]=0$. 由第 6 章定理 6.4.14, 可设 $\xi=\xi_1+\xi_2ij$, 其中 $\xi_1,\xi_2\in\ker d\cap[\Sigma^*M,M]$. 因此 $d(\rho_{r,s})=i'_s\xi_1j'_r+i'_s\xi_2ijj'_r$ 而通过作用于导数算子 d 并运用 (9.8.3) 可得 $i'_s\xi_2j'_r$ =0. 因此, $i'_s\xi_2=\xi_3\alpha^r=0$, 这是因为 $\xi_3\in[\Sigma^2M,K_s]=0$. 因此如所求的有 $d(\rho_{r,s})=i'_s\xi_1j'_r$, 某个 $\xi_1\in\ker d\cap[\Sigma^{rq+1}M,M]$. 证毕.

定理 9.8.1 当 $t\geqslant 2$ 的证明 由定理 9.8.1 当 $t\geqslant 1$, 存在 $f'\in[\Sigma^{p^n(p+1)q}K_a,K_a]$ 使得导出的 BP_* 同态 $f'_*=v_2^{p^n}$, 其中我们将 p^n-1 简记为 a. 由第 6 章定理 6.5.22, 我们可设 $f\in \mathrm{Mod}_*$, 这是因为 f' 在 Der_* 和 $\mathrm{Mod}_*\delta_0$ 的分量都导出零 BP_* 同态.

记 $\delta'=i'_sj'_s\in[\Sigma^{-sq-1}K_s,K_s]$. 由第 6 章定理 6.5.23, $\delta'f'-f'\delta'\in\mathrm{Mod}_*$ 而这个群是 $[\Sigma^*K_s,K_s]$ 的交换子环. 因此有 $f'(\delta'f'-f'\delta')=(\delta'f'-f'\delta'f')f'$ 或者等价的有 $(f')^2\delta'-\delta'(f')^2=2((f')^2\delta'-f'\delta'f')$. 用归纳法可得出 $(f')^s\delta'-\delta'(f')^s=s((f')^s\delta'-(f')^{s-1}\delta'f')$, $s\geqslant 1$. 即, 我们有

$$s\cdot(f')^{s-1}\delta'f'=\delta'(f')^s+(s-1)(f')^s\delta',\qquad s\geqslant 1 \tag{9.8.27}$$

设 $\rho_{a,1}:K_a\to K_1$ 为 (9.8.4) 中的投射, 则由第 6 章定理 6.5.23, $\rho_{a,1}(f')^si'_ai\in\pi_*K_1$ 可扩张为 $k_s\in\mathrm{Mod}_*\subset[\Sigma^{sp^n(p+1)q}K_1,K_1]$ 使得 $\rho_{a,1}(f')^si'_ai=k_si'_1i$ 而 $(k_s)_*=$

$v_2^{sp^n}$. 由于 $j_1'k_s i_1' i = \alpha^{a-1} j_a'(f')^s i_a' i$ 而 $(i_1'j_1'k_s - k_s i_1' j_1') \in \mathrm{Mod}_*$, 因此 $(i_1'j_1'k_s - k_s i_1'j_1')i_1'i = 0$, 从而 $i_1'j_1'k_s = k_s i_1'j_1'$. 通过作用于导数算子 d 于等式 $\rho_{a,1}(f')^s i_a'\delta = k_s i_1'\delta$ (其中我们记 $\delta = ij$) 可得

(9.8.28)
$$\begin{aligned}\rho_{a,1}(f')^s i_a' &= k_s i_1' - d(\rho_{a,1})(f')^s i_a'\delta = k_s i_1' - i_1'\xi j_a'(f')^s i_a'\delta \\ &= k_s i_1' - i_1'j_a'(f')^s i_a'\xi\delta, \quad s \geqslant 1\end{aligned}$$

其中 $\xi \in [\Sigma^{aq+1}M, M] \cap \ker d$(参见命题 9.8.26). 设 p 不整除 $t \geqslant 2$, 则由 (9.8.27), (9.8.28) 我们有 $i_1'j_a'(f')^t i_a' = \rho_{a,1} i_a' j_a'(f')^t i_a' = t\cdot\rho_{a,1}(f')^{t-1} i_a' j_a' f' i_a' = t\cdot k^{t-1} i_1' j_a' f' i_a' - t\cdot i_1'j_a'(f')^{t-1} i_a'\xi\delta j_a' f' i_a'$, 并且有

(9.8.29)
$$i_1'j_a'\phi = t\cdot k^{t-1} i_1' j_a' f' i_a'$$

其中记 $\phi = (f')^t i_a' + t\cdot (f')^{t-1} i_a'\xi\delta j_a' f' i_a'$.

设 X 为 $i_1'j_a'f'i_a' : \Sigma^{p^{n+1}q+q-1}M \to K_1$ 的上纤维, 由以下同伦可换图形的上一行给出 $(m = (t-1)p^n(p+1)q + (p^n-1)q)$:

(9.8.30)
$$\begin{array}{ccccccc}\Sigma^{-1}X & \xrightarrow{u} & \Sigma^{p^{n+1}q+q-1}M & \xrightarrow{i_1'j_a'f'i_a'} & K_1 & \xrightarrow{w} & X \\ \big\downarrow \bar\phi & & \big\downarrow \phi & & \big\downarrow t\cdot k^{t-1} & & \big\downarrow \bar\phi \\ \Sigma^{-m-1}K_{a+1} & \xrightarrow{\rho_{a+1,a}} & \Sigma^{-m-1}K_a & \xrightarrow{i_1'j_a'} & \Sigma^{-m+aq}K_1 & \xrightarrow{\psi_{1,a+1}} & \Sigma^{-m}K_{a+1}\end{array}$$

以上中间方块由 (9.8.29) 可知是同伦可换的, 因此存在 $\bar\phi$ 使以上所有方块都是同伦可换的.

由 $wi_1'j_a'f'i_a' = 0$ 可得 $wi_1'j_a'f' = yj_a'$, 某个 $y \in [\Sigma^{p^n(p+1)q}M, X]$, 从而有 $uyj_a' = 0$ 并且 $uy = \lambda\cdot\alpha^a$, 某个 $\lambda \in [M, M] \cong Z_p\{1_M\}$, 即我们有

(9.8.31)
$$wi_1'j_a'f' = yj_a', \quad uy = \lambda\cdot\alpha^a, \text{某个 } \lambda \in Z_p$$

另一方面, $j_a'(f')^s\psi_{1,a}i_1' = j_a'(f')^s i_a'\alpha^{a-1} = \alpha^{a-1}j_a'(f')^s i_a' = j_1'\rho_{a,1}(f')^s i_a' = j_1'k_s i_1'$, 因此 $j_a'f'\psi_{1,a} = j_1'k_1 + \eta j_1'$, 某个 $\eta \in [\Sigma^* M, M]$, 从而 $yj_1' = wi_1'j_a'f'\psi_{1,a} = wi_1'j_1'k_1 + wi_1'\eta j_1' = wk_1 i_1'j_1' + wi_1'\eta j_1'$, 并且我们有

(9.8.32)
$$\begin{aligned}y &= wk_1 i_1' + wi_1'\eta + z\alpha, \qquad \text{某个 } z \in [\Sigma^* M, X] \\ \bar\phi y &= t\cdot\psi_{1,a+1}k_{t-1}k_1 i_1' + t\cdot\psi_{1,a+1}k_{t-1}i_1'\eta + \bar\phi z\alpha\end{aligned}$$

由 (9.8.31) 所得出.

我们推断

(9.8.33)
$$\bar\phi z\alpha i \in \pi_{tp^n(p+1)q+aq}K_{a+1} \text{ 具有 } BP \text{ filtration} > 0$$

这将在最后证明. 因此 $\bar\phi yi = t\cdot\psi_{1,a+1}k_{t-1}k_1 i_1' i$ (modulo 更高的 filtration) 在 Adams-Novikov 谱序列中由 $t\cdot v_1^a v_2^{tp^n} \in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{0,*}(BP_*, BP_*K_{a+1})$ 所表示.

因此, 由 (9.8.31), (9.8.30), (9.8.28), (9.8.27) 我们有 $\bar\phi yj_a' = \bar\phi wi_1'j_a'f' = t\cdot\psi_{1,a+1}k_{t-1}i_1'j_a'f' = t\cdot\psi_{1,a+1}\rho_{a,1}(f')^{t-1}i_a'j_a'f' = \psi_{1,a+1}\rho_{a,1}(i_a'j_a'(f')^t + (t-1)(f')^t i_a'j_a') = (t-1)\psi_{1,a+1}\rho_{a,1}(f')^t i_a'j_a'$, 从而 $\bar\phi y = (t-1)\psi_{1,a+1}\rho_{a,1}(f')^t i_a' + \tilde f\alpha^a$, 某个 $\tilde f \in [\Sigma^{tp^n(p+1)q}M, K_{a+1}]$.

由推断 (9.8.33), $\bar{\phi}yi$ 在 Adams-Novikov 谱序列中由 $t\cdot v_1^a v_2^{tp^n}$ 所表示, 因此 $\tilde{f}\alpha^a i$ 由 $v_1^a v_2^{tp^n}$ 所表示, 从而 $\tilde{f}i \in \pi_{tp^n(p+1)q}K_{a+1}$ 在 Adams-Novikov 谱序列中由 $v_2^{tp^n} + v_1 x \in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{0,tp^n(p+1)q}(BP_*, BP_*K_{a+1})$ 所表示, 其中 $v_1 x = \Sigma_{r=1}^{[n/2]}\lambda_r v_1^{p^n-p^{n-2r}}\tilde{c}_1(a_r p^{n-2r})$, 由引理 9.8.25 所得出.

由 [20], 当 p 不整除 $t\geqslant 2, 1\leqslant r\leqslant p$ 时, $v_2^{tp}\in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{0,*}(BP_*, BP_*K_r)$ 在 Adams-Novikov 谱序列中是永久循环. 归纳设 $v_2^{tp^s}\in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{0,*}(BP_*, BP_*K_r)$ 对所有 p 不整除 $t\geqslant 2, 1\leqslant r\leqslant p^s$ 以及 $s\leqslant n-1$ 都是永久循环. 因此, 容易看出 $v_1^{p^n-p^{n-2r}}\tilde{c}_1(a_r p^{n-2r})$ 在 $[\Sigma^{tp^n(p+1)q}K_{a+1}, K_{a+1}]$ 中可实现, 从而由归纳假设以上的 v_1x 是永久循环. . 因此, $v_2^{tp^n}\in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{0,*}(BP_*, BP_*K_{a+1})$ 在 Adams-Novikov 谱序列中也是永久循环并且存在 $h\in\pi_{tp^n(p+1)q}K_{a+1}$ 使得导出的 BP_*- 同态 $h_* = v_2^{tp^n}$. 这样的话, 对 $1\leqslant r\leqslant a+1 = p^n$, $jj'_r\rho_{a+1,r}h\in\pi_{tp^n(p+1)q-rq-2}S$ 就是本定理所要得到的 $\beta_{tp^n/s}$- 元素.

现在我们剩下的工作是证明推断 (9.8.33). 回顾前面已知, $j'_a f' i'_a i\in\pi_*M$ 在 Adams-Novikov 谱序列中由 $\beta'_{p^n/p^n-1}\in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,*}(BP_*, BP_*M)$ 所表示而 $\beta'_{p^n/p^n-1} = v_1\beta'_{p^n/p^n}$, 因此 $(i'_1)_*(\beta'_{p^n/p^n-1}) = 0\in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,*}(BP_*, BP_*K_1)$, 从而 $i'_1 j'_a f' i'_a i\in \pi_*K_1$ 具有 BP-filtration $\geqslant q+1$. 因此, 在 K_1 的 Adams-Novikov 分解中, $i'_1 j'_a f' i'_a i$ 可提升为 $\kappa\in\pi_*\widetilde{E}_{q+1}\wedge K_1$ 使得 $(\tilde{a}_0\wedge 1_{K_1})\cdots(\tilde{a}_q\wedge 1_{K_1})\kappa = i'_1 j'_a f' i'_a i$. 由于 K_1 是一个 M- 模谱, 因此 $\kappa = \kappa'\cdot i$, 某个 $\kappa'\in[\Sigma^* M, \widetilde{E}_{q+1}\wedge K_1]$. 最终我们有 $i'_1 j'_a f' i'_a = (\tilde{a}_0\wedge 1_{K_1})\cdots(\tilde{a}_q\wedge 1_{K_1})\kappa' + \sigma j$, 某个 $\sigma\in[\Sigma^{p^{n+1}q+q}S, K_1]$. 注意到 $(\tilde{b}_0\wedge 1_{K_1})\sigma\in\pi_{p^{n+1}q+q}BP\wedge K_1\cong \mathrm{Hom}_{BP_*BP}^{p^{n+1}q+q}(BP_*, BP_*(BP\wedge K_1))$ 在 K_1 的 Adams-Novikov 分解中是一个 d_1 循环, 它表示群 $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{0,p^{n+1}q+q}(BP_*, BP_*K_1)$ 中的一个元素, 而这个群由次数原因为零 (注: 这是因为 $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{0,*}(BP_*, BP_*K_1)\cong Z_p[v_2]$), 因此有 $(\tilde{b}_0\wedge 1_{K_1})\sigma = 0$, 从而 σ 可提升为 $\sigma'\in\pi_*\widetilde{E}_{q+1}\wedge K_1$ 使得 $(\tilde{a}_0\wedge 1_{K_1})\cdots(\tilde{a}_q\wedge 1_{K_1})\sigma' = \sigma$. 因此有 $i'_1 j'_a f' i'_a = (\tilde{a}_0\wedge 1_{K_1})\cdots(\tilde{a}_q\wedge 1_{K_1})(\kappa' + \sigma' j)$. 由此可以说明, 以下由 (9.8.30) 的上行的上纤维序列所导出的短恰当序列作为 BP_*BP- 上模恰当序列是分裂的:

$$0\to BP_*K_1 \xrightarrow{u_*} BP_*X \xrightarrow{w_*} BP_*M \to 0, \quad \text{其中 } |w_*| = -(p^{n+1}+1)q$$

这个分裂性在以下 $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{0,*}$ 层级也是成立的:

$$0\to \mathrm{Ext}^0 K_1 \xrightarrow{u_*} \mathrm{Ext}^0 X \xrightarrow{w_*} \mathrm{Ext}^0 M \to 0$$

这也就是说, 存在 BP_* 不变同态 $u' : \mathrm{Ext}^0 X\to \mathrm{Ext}^0 K_1$ 和 $w' : \mathrm{Ext}^0 M\to \mathrm{Ext}^0 X$ 使得 $u'u_* = 1_{\mathrm{Ext}^0 K_1}, w_* w' = 1_{\mathrm{Ext}^0 M}$ 并且 $u_*u' + w'w_* = 1_{\mathrm{Ext}^0 X}$, 其中我们简记 $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{0,*}(BP_*, BP_*X)$ 为 $\mathrm{Ext}^0 X$.

为了证明推断 (9.8.33), 反设 $\bar{\phi}z\alpha i\in\pi_*K_{a+1}$ 具有 BP-filtration 0, 则由 (9.8.32), 它在 Adams-Novikov 谱序列中由 $\lambda v_1^a v_2^{tp^n}\in \mathrm{Ext}^0 K_{a+1}$ 所表示, 其中 $\lambda\neq 0\in Z_p$. 因此 $zi\in\pi_{tp^n(p+1)q+(a-1)q}X$ 必具有 BP filtration 0, 并且它由某个 $x\in \mathrm{Ext}^{0,*}X$ 所表示而 $(\bar{\phi})_*(v_1x) = \lambda\cdot v_1^a v_2^{tp^n}$. 可是,

$$x = u_* u'(x) + w'w_*(x) = w'w_*(x)$$

这是因为由次数原因有 $u'(x) \in \mathrm{Ext}^{0,tp^n(p+1)q+(a-1)q}K_1 = 0$, 因此

$$x = \lambda' w'(v_1^r), \quad 某个\ \lambda' \in Z_p, rq = tp^n(p+1)q + (a-1)q - p^{n+1}q - q$$

这是因为 $w_*(x) \in \mathrm{Ext}^{0,r}M \cong Z_p\{v_1^r\}$, 因此有

$$\lambda v_1^a v_2^{tp^n} = (\bar{\phi})_*(v_1 x) = \lambda'(\bar{\phi})_* w'(v_1^{r+1})$$

再由于 $w'(v_1^{r+1})$ 属于 $\mathrm{Ext}^{0,*}X$ 的同构于 $\mathrm{Ext}^{0,*}M$ 一个加项而 $\mathrm{Ext}^{0,*}M$ 是一个平凡的 $Z_p[v_2]$- 模, 因此我们有

$$0 = v_2^{p^n} \cdot (\bar{\phi})_* w'(v_1^{r+1}) = \lambda \cdot v_1^a v_2^{(t+1)p^n} \in \mathrm{Ext}^{0,*}K_{a+1}$$

这是一个矛盾, 从而证明了推断 (9.8.33). 证毕.

在完成了关于球面稳定同伦群第二周期性新元素族的定理 9.8.1 之后, 我们不加证明地叙述关于球面稳定同伦群第二周期性新元素族的更进一步的结果. 它在定理 9.8.1 的结果的基础上利用谱 $M(p, p^r, v_1^{ap^s})$(它是 $BP_*/(p^r, v_1^{ap^s})$ 的几何实现) 的有关性质加以证明, 其详细证明可参见文献 [23]§3.

定理 9.8.34 设 $p \geqslant 5$. $j = cp^i \leqslant p^{n-i} - 1$ 若 $t \geqslant 1$ ($cp^i \leqslant p^{n-i}$ 若 $t \geqslant 2$), 则定理 8.1.3 中的元素

$$\beta_{tp^n/j,i+1} \in \mathrm{Ext}^{2,*}_{BP_*BP}(BP_*, BP_*)$$

在 Adams-Novikov 谱序列中是永久循环, 并且它收敛到 π_*S 相应的 p^{i+1} 阶元素.

参 考 文 献

[1] Aikawa T. 1980. 3-Dimensional cohomology of the mod p Steenrod algebra Math. Scanfd. 47, 91~115

[2] Cohen R. 1981. Odd primary families in stable homotopy theory. Memoirs of Amer. Math. Soc. No. 242

[3] Cohen R, Goerss P. 1984. Secondary cohomology operations that detect homotopy classes. Topology 22, 177~194

[4] Hoffman P. 1968. Relations in the stable homotopy of Moore spaces. Proc. London Math. Soc. 18, 621~634

[5] Lin J K, Zheng Q B. 1998. A new family of filtration seven in the stable homotopy of spheres. Hiroshima Math. J. 28, 183~205

[6] Lin J K. 2001. A new family of filtration three in the stable homotopy of spheres. Hiroshima Math. J. 31, 477~492

[7] Lin J K. 2002. Some new families in the stable homotopy of spheres revisited. Acta Math. Sinica 18, 95~106

[8] Lin J k. 2005. Two new families in the stable homotopy groups of sphere and Moore spectrum. To appear in Chin. Ann. of Math. 27B(2006) 311~328

[9] Lin J K. 2003. Third periodicity families in the stable homotopy of spheres. JP Journal of Geometry and Topology 3, 179~219

[10] Miller H R, Ravenel D C, Wilson W S. 1977. Periodic phenomena in the Adams-Novikov spectra sequence. Ann. of Math. 106, 469~516

[11] Oka S. 1984. Multilpicative structure of finite spectra and stable homotopy of spheres. Lecture Notes in Math. v.1051 Springer-verlag

[12] Ravenel D C. 1986. Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres . Academic Press Inc

[13] Thomas E, Zahler R. 1976. Generalized higher order cohomology operations and stable homotopy groups of spheres. Advances in Math. 20, 287~328

[14] Toda H. 1971. Algebra of stable homotopy of Z_p-spaces and applications. J. Math. Kyoto Univ. 11, 197~251

[15] Toda H. 1971. On spectra realizing exterior part of the Steenrod algebra. Topology 10, 53~65

[16] Wang X, Zheng Q. 1998. The convergence of $\tilde{\alpha}^{(n)}h_0h_k$ Science in China 41, 622~636

[17] Wang X. 1995. On the 4-dimensional cohomology of the Steenrod algebra. Beijing Mathematics 1, 80~99

[18] Zhou X. 1980. Higher cohomology operations that detect homology class. Lecture Notes in Math. v.1370 Springer-verlag, 416~436

[19] Miller H R, Wilson W S. 1976. On Novikov's Ext^1 modulo an invariant prime ideal. Topology 15, 131~141

[20] Oka S. 1977. Realizing some cyclic BP_* modules and applications to stable homotopy of spheres. Hiroshima Math. J.7, 427~447

[21] Oka S.1983. Small ring spectra and p-rank of the stable homotopy of spheres. Contemp. Math. 49, 267~308

[22] Oka S. 1975. A new familiy in the stable homotopy of spheres. Hiroshima Math. J. 5, 87~114

[23] Lin J K. 1990. Detection of second periodicity families in stable homotopy of spheres. American J. of Math. 112, 595~210

[24] Lin J K. A pull back Theorem in the Adams spectral sequence, to appear in Acta Mata Sinica

[25] Hirofumi Nakai.2000. The Chrometic E_1-term $H^0M_1^2$ for $p > 3$. New York Journal of Math. 6, 21~54

索　　引

三画

四画

五画

六画

七画

八画

九画

十画

十一画

十二画

十三画

十四画

其它

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1 数理逻辑基础（上册） 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论（上册） 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础（下册） 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 群构造（上册） 1982.11 张远达 著
9 有限群构造（下册） 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论（上册） 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论（上册） 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论（下册） 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著

29 同调代数 1988.2 周伯壎 著
30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青、段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜、陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉、冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙、吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇、张学莲 著
41 线性偏微分算子引论（下册） 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲、马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬、赵晓华、刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英、李冲、杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先、霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著

63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著
64 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德、郭柏灵 著
65 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪林、杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军、张祥、董梅芳 编著
71 随机分析学基础（第二版） 2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚、马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎、陆传荣、张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯、顾凡及、蔡志杰 编著
78 同调论——代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵等 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒、李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川、崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙、李登峰、谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李雷、吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群、尹景学、王春朋 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格（第二版） 2003.10 万哲先、霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用（第二版） 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩、周义仓、王稳地、靳 祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正、刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林、闫宝强、刘衍胜 著

97 代数学中的Frobenius结构 2005.7 汪明义 著
98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 凝固过程动力学与交界面稳定性引论 2006.12 徐鉴君 著
105 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马天 汪宁宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
109 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
110 鞅与Banach空间几何学 2007.5 刘培德 著
111 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著
112 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
113 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
114 Adams 谱序列和球面稳定同伦群 2007.7 林金坤 著